Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Арбатский, О структуре групп нелинейных автоморфизмов $(3, 3)$ -квадрик, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 164–173

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:14:33

О СТРУКТУРЕ ГРУПП НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ (3,3)-КВАДРИК

А. Ф. Арбатский

§ 1. Введение

Пусть $(z^1, \dots, z^n, w^1, \dots, w^k) = (z, w)$ – координаты в $\mathbb{C}^{n+k}$, и M – вещественная поверхность в окрестности начала координат задана уравнением

$$\operatorname{Im} w = F(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w), \quad (1)$$

где F – гладкая функция, причем $F = 0$ и $dF = 0$ при $z = 0$, $\operatorname{Re} w = 0$. После некоторой полиномиальной замены координат (см. [1, гл. III, § 13, п. 37]) уравнение M примет вид

$$\operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle + \dots,$$

где вместо многоточия стоят члены степени 3 и выше (при подсчете веса мономов переменные z и $\bar{z}$ берем с весом 1, переменную $u = \operatorname{Re} w$ – с весом 2). Эрмитова форма $\langle z, z \rangle$ называется формой Леви поверхности M .

Поверхность Q , задаваемая уравнением

$$\operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle, \quad (2)$$

называется (k, n) -квадрикой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квадрика Q называется *невыврожденной*, если выполнены два условия:

- (i) формы $\langle z, z \rangle^1 \dots \langle z, z \rangle^k$, задающие квадрику, линейно независимы,
- (ii) из $\langle z, e \rangle = 0 \forall z$ следует, что $e = 0$.

Про (k, n) -квадрики известно следующее (см. [2]):

1) Пусть $\operatorname{Aut}_0(M)$ – это группа голоморфных автоморфизмов многообразия M , оставляющих начало координат на месте. Тогда $\dim \operatorname{Aut}_0(M) \leq \dim \operatorname{Aut}_0(Q)$.

2) Размерность группы голоморфных автоморфизмов $\dim \text{Aut}(Q)$ конечна в том и только том случае, если квадрака невырождена.

3) Алгебра Ли $g(Q)$ векторных полей, равных нулю в начале координат, в случае невырожденной квадраки состоит из полей

$$\begin{aligned} f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial w}, \\ f = Cz + aw + A(z, z) + B(z, w), \\ g = sw + 2i\langle z, a\overline{w} \rangle + r(w, w), \end{aligned}$$

где все выражения линейны, причем

$$2 \operatorname{Re}\langle Cz, z \rangle = s\langle z, z \rangle, \quad (3)$$

$$\langle A(z, z), z \rangle = 2i\langle z, a\langle z, z \rangle \rangle, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re}\langle B(z, u), z \rangle = r(\langle z, z \rangle, u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im}\langle B(z, \langle z, z \rangle), z \rangle = 0. \quad (6)$$

4) Пусть $G(Q)$ – группа автоморфизмов, порожденная полями из $g(Q)$. В случае общего положения при $3 \leq k \leq n^2 - 3$ невырожденная квадрака является жесткой, т.е. $G(Q) = \{z \mapsto \lambda z, w \mapsto |\lambda|^2 w : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные со строением группы $G(Q)$. Группу нелинейных автоморфизмов квадраки, порожденных полями из $g_1(Q) + g_2(Q)$, обозначим $J(Q)$. В § 2 доказыва-ется, что группа Ли $J(Q)$ и отвечающая ей алгебра Ли являются нильпо-тентными ранга 2; дается описание групповой операции в $J(Q)$. В § 3 эти результаты иллюстрируются примерами нежестких (3, 3)-квадрик.

§ 2. Строение группы нелинейных автоморфизмов квадраки

Введем градуировку d на алгебре следующим образом: z имеет вес 1, w – вес 2, $\frac{\partial}{\partial z}$ – вес (-1) , $\frac{\partial}{\partial w}$ – вес (-2) . Тогда алгебра $g(Q)$ распадается на однородные компоненты

$$\begin{aligned} g(Q) &= g_0(Q) + g_1(Q) + g_2(Q), \\ g_0(Q) &= \left\{ Cz \frac{\partial}{\partial z} + sw \frac{\partial}{\partial w} \right\}, \\ g_1(Q) &= \left\{ (aw + A(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + 2i\langle z, a\overline{w} \rangle \frac{\partial}{\partial w} \right\}, \\ g_2(Q) &= \left\{ B(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + r(w, w) \frac{\partial}{\partial w} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где a, A, B, r удовлетворяют уравнениям (3)–(6). Нелинейным автоморфизмам квадрики отвечает подалгебра $g_1 + g_2$. Обозначим согласно [2]

$$C(Q) = \exp(g_0(Q)), \quad A(Q) = \exp(g_1(Q)), \quad B(Q) = \exp(g_2(Q)).$$

Возникает вопрос, сколь сложно устроена группа $J(Q) = A(Q) \circ B(Q)$. Оказывается, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – невырожденная квадратика. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) алгебра Ли $g_1(Q) + g_2(Q)$ нильпотентная ранга 2,
- (ii) группа Ли $J(Q)$ нильпотентная ранга 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_1, \dots, a_m\}$ – базис $g_1(Q)$, $\{b_1, \dots, b_l\}$ – базис $g_2(Q)$. Легко проверить, что при взятии скобки векторных полей градуировки складываются. Поэтому $d[b_i, b_j] = 4$, $d[a_i, b_j] = 3$, $d[a_i, a_j] = 2$. Но полей градуировки 3 и 4 согласно разложению (7) нет. Это означает, что $[b_i, b_j] = [a_i, b_j] = 0$, а коммутаторы $[a_i, a_j] \in B(Q)$. Раскладывая произвольные поля f, g, h по базису $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_l\}$ и раскрывая скобки, убеждаемся, что $[[f, g], h] = 0$. Утверждение (i) доказано.

По определению группы $J(Q)$ любой ее элемент записывается в виде $X = \exp(x)$ для некоторого $x \in g_1 + g_2$. По теореме Хаусдорфа–Кэмпбелла–Дынкина (см. [3, ч. I, § 6] или [4, гл. V, § 5])

$$X \circ Y = \exp(x) \circ \exp(y) = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots\right),$$

где вместо многоточия стоят коммутаторы порядка два и выше. Значит,

$$X \circ Y = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y]\right). \quad (8)$$

Применяя формулу (8) дважды, получаем:

$$(X, Y) = \exp([x, y]), \quad (9)$$

где $(X, Y) = X \circ Y \circ X^{-1} \circ Y^{-1}$. Применяя, в свою очередь, формулу (9) дважды, получаем $((X, Y), Z) = \exp([[x, y], z])$. Из утверждения (i) следует, что $((X, Y), Z) = \text{id}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Группа $B(Q)$ является подгруппой центра группы $J(Q)$.*

Введем обозначения: $\Phi_i(p^i) = \exp(p^i a_i)$, $\Psi_j(q^j) = \exp(q^j b_j)$. Рассмотрим произвольное слово в алфавите $\Phi_1(p^1), \dots, \Phi_m(p^m), \Psi_1(q^1), \dots, \Psi_l(q^l)$.

В силу следствия 3 Ψ_j коммутируют между собой и со всеми Φ_i . Вынесем их в конец слова. Далее, “рассортируем” Φ_i по номерам, пользуясь равенством $XY = (X, Y)YX$. При этом будут возникать коммутаторы $(\Phi_s, \Phi_t) \in B(Q)$, которые коммутируют со всеми Φ_i . Вынесем их в конец слова и перемножим все Ψ_j ; то, что получим, обозначим $\Psi(\bar{q})$, $\bar{q} \in \mathbb{R}^l$. Также перемножим Φ_i с одинаковыми номерами. Итак, мы получили, что любой элемент группы $J(Q)$ однозначно записывается в виде

$$X = \Phi_1(p^1) \circ \dots \circ \Phi_m(p^m) \circ \Psi(\bar{q}). \quad (10)$$

Выясним закон умножения элементов группы, записанных в виде (10). Пусть

$$\begin{aligned} X &= \Phi_1(p^1) \circ \dots \circ \Phi_m(p^m) \circ \Psi(\bar{q}), \\ Y &= \Phi_1(r^1) \circ \dots \circ \Phi_m(r^m) \circ \Psi(\bar{s}). \end{aligned}$$

Аналогично “рассортировывая” образующие $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \Psi$, получаем:

$$X \circ Y = \Phi_1(p^1 + r^1) \circ \dots \circ \Phi_m(p^m + r^m) \circ \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m (\Phi_j(p^j), \Phi_i(r^i)) \circ \Psi(\bar{q} + \bar{s}).$$

Пусть $[a_j, a_i] = \sum_s T_{ji}^s b_s$. Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_j(p^j), \Phi_i(r^i)) &= (\exp(p^j a_j), \exp(r^i a_i)) = \exp(p^j r^i [a_j, a_i]) \\ &= \exp\left(p^j r^i \sum_s T_{ji}^s b_s\right). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$X \circ Y = \Phi_1(p^1 + r^1) \circ \dots \circ \Phi_m(p^m + r^m) \circ \Psi(\bar{q} + \bar{s} + \bar{\beta}(\bar{p}, \bar{r})), \quad (11)$$

$$\bar{\beta}(\bar{p}, \bar{r}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(\sum_s T_{ji}^s \bar{e}_s \right) p^j r^i, \quad (12)$$

где $\bar{p} = (p^1, \dots, p^m)$, $\bar{r} = (r^1, \dots, r^m)$, $\bar{e}_s = (0, \dots, \overset{s}{1}, \dots, 0)$ – стандартный базисный вектор. Таким образом, мы доказали

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При фиксированных базисах в $g_1(Q)$, $g_2(Q)$ умножение в $J(Q)$ задается по формуле (11) некоторой билинейной вектор-функцией $\beta: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, где $m = \dim g_1$, $l = \dim g_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Структура группы $J(Q)$ легко восстанавливается по алгебрам $g_1(Q)$, $g_2(Q)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть квадратика является произведением двух квадратик:

$$Q = Q_1 \times Q_2 = \{(z_1, z_2, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{n_1+n_2+k_1+k_2} : v_j = \langle z_j, z_j \rangle_j, j = 1, 2\}.$$

$$\text{Тогда } \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. β получается из коммутаторов. Если $x \in g_1(Q_1)$, $y \in g_2(Q_2)$, то $[x, y] = 0$. Отсюда следует, что β не “перепутывает” соответствующие аргументы.

§ 3. Формулы нелинейных автоморфизмов невырожденных $(3, 3)$ -квадрик

Несмотря на феномен жесткости (k, n) -квадрик при $3 \leq k \leq n^2 - 3$, существуют $(3, 3)$ -квадрики с богатой группой автоморфизмов. Н. Ф. Палинчук получила полную классификацию $(3, 3)$ -квадрик с нетривиальной группой $J(Q)$ относительно действия группы

$$\{z \mapsto Cz, w \mapsto sw : (C, s) \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})\}.$$

Вот полный список таких квадрик:

$$\begin{array}{lll} Q_1 : v^1 = |z^1|^2, & v^2 = |z^2|^2, & v^3 = |z^3|^2, \\ Q_2 : v^1 = |z^1|^2 - |z^2|^2, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^3 = |z^3|^2, \\ Q_3 : v^1 = |z^1|^2, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^3 = |z^3|^2, \\ Q_4 : v^1 = |z^1|^2, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^3 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3 + |z^2|^2, \\ Q_5 : v^1 = |z^1|^2, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^3 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, \\ Q_6 : v^1 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}^3, & v^3 = 2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, \\ Q_7 : v^1 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3, & v^2 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}^3, & v^3 = 2 \operatorname{Im} z^2 \bar{z}^3, \\ Q_8 : v^1 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2, & v^2 = 2 \operatorname{Im} z^1 \bar{z}^2, & v^3 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^3 + |z^2|^2, \end{array}$$

где $v = \operatorname{Im} w$.

Отметим, что квадратика Q_1 есть прямое произведение $(1, 1)$ -квадрик $\{v^j = |z^j|^2\}$, $j = 1, 2, 3$. Поэтому согласно [2] группа нелинейных

автоморфизмов Q_1 распадается в прямое произведение соответствующих групп, которые состоят из автоморфизмов Пуанкаре (см. [5]), т.е. являются дробно-линейными.

Квадрика Q_2 (Q_3) является прямым произведением $(2, 2)$ -квадрики $\{v^1 = |z^1|^2 - |z^2|^2, v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2\}$ ($\{v^1 = |z^1|^2, v^2 = 2 \operatorname{Re} z^1 \bar{z}^2\}$ соответственно) и $(1, 1)$ -квадрики $\{v^3 = |z^3|^2\}$. Ее группа автоморфизмов вычислена в матричном виде Ежовым и Шмальцем в работе [6]. Непосредственный анализ формул показывает, что эта группа состоит из бирациональных отображений степени (числителя и знаменателя) не выше двух. В той же работе вычислены автоморфизмы Q_5 , которые являются бирациональными отображениями степени не выше трех.

Для нахождения групп $J(Q)$ оставшихся квадрик будем непосредственно строить экспоненциальное отображение из $g_1(Q) + g_2(Q)$, решая дифференциальные уравнения $\dot{z} = f, \dot{w} = g$.

Сначала вычислим соответствующие алгебры, пользуясь соотношениями (4)–(6). Получим, что векторные поля задаются следующими матрицами: для Q_6

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} c^1 & 0 & c^2 \\ 0 & c^1 & c^3 \\ ic^3 & -ic^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 2\bar{c}^3 & -\bar{c}^2 & i\bar{c}^1 \\ -\bar{c}^2 & 0 & 0 \\ i\bar{c}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{c}^3 & 0 \\ \bar{c}^3 & -2\bar{c}^2 & i\bar{c}^1 \\ 0 & i\bar{c}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{c}^3 \\ 0 & 0 & -\bar{c}^2 \\ \bar{c}^3 & -\bar{c}^2 & 2i\bar{c}^1 \end{pmatrix}, \\ r^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2q^1 & q^2 & q^3 \\ q^2 & 0 & 0 \\ q^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q^1 & 0 \\ q^1 & 2q^2 & q^3 \\ 0 & q^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ r^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^1 \\ 0 & 0 & q^2 \\ q^1 & q^2 & 2q^3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} q^1 & 0 & q^3 \\ q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq^2 \end{pmatrix}, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & q^1 & 0 \\ 0 & q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & -iq^1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -iq^3 & 0 \\ iq^3 & 0 & 0 \\ q^1 & q^2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

для Q_7

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 2c^1 & ic^3 & c^3 \\ 0 & c^1 & ic^1 \\ 0 & ic^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad A^1 = 2 \begin{pmatrix} 0 & \bar{c}^2 & i\bar{c}^1 \\ \bar{c}^2 & 0 & \bar{c}^3 \\ i\bar{c}^1 & \bar{c}^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\bar{c}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i\bar{c}^1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2q^1 & 2q^2 \\ 2q^1 & q^3 & 0 \\ 2q^2 & 0 & q^3 \end{pmatrix}, \quad r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^1 & q^2 \\ 0 & q^2 & -q^1 \end{pmatrix}, \\
r^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^2 & q^1 \\ 0 & q^1 & q^2 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & q^1 + iq^2 & q^2 - iq^1 \\ 2q^1 - 2iq^2 & q^3 & -iq^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^1 - iq^2 & q^2 + iq^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^1 + iq^2 & q^2 - iq^1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

для Q_8

$$\begin{aligned}
a &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ic^1 & c^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1 = A^2 = 0, \quad A^3 = -2 \begin{pmatrix} 0 & \bar{c}^1 & 0 \\ \bar{c}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
r^1 &= r^2 = 0, \quad r^3 = \begin{pmatrix} q^1 & 0 & 0 \\ 0 & -q^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B^1 &= B^2 = 0, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q^1 & -iq^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где все $c^j \in \mathbb{C}$, $q^i \in \mathbb{R}$.

Такое описание векторных полей позволяет выбрать естественные базисы в $g_1(Q)$, $g_2(Q)$: в матрицах a, A, B, r , положив все параметры кроме s -го нулями, получим s -й базисный вектор. (При построении базиса в $g_1(Q)$ необходимо отдельно рассматривать случаи $c^j \in \mathbb{R}$, $c^j \in i\mathbb{R}$.)

Будем использовать обозначения: $\Theta_j(c^j)$ – автоморфизм, отвечающий векторному полю с единственным ненулевым параметром c^j ; $\Psi_i(q^i)$ – автоморфизм, отвечающий векторному полю с единственным ненулевым параметром q^i ; $\Phi_{2j-1}(p^{2j-1}) = \Theta_j(p^{2j-1})$, $\Phi_{2j}(p^{2j}) = \Theta_j(ip^{2j})$, $p^s \in \mathbb{R}$. В соответствии с результатами § 2 произвольный автоморфизм представляется в виде $\Lambda = \Theta_1 \cdots \Theta_m \Psi_1 \cdots \Psi_l$ или $\Lambda = \Phi_1 \cdots \Phi_{2m} \Psi_1 \cdots \Psi_l$, причем умножение задается по формуле (11) с помощью функции β , которая будет вычислена в каждом случае.

3.1. Автоморфизмы Q_6 . Квадрика Q_6 является нуль-квадрикой, т.е. $\det(t_1 H^1 + t_2 H^2 + t_3 H^3) \equiv 0$, где H^j – это матрицы эрмитовых форм, задающих квадрику. Обозначим

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1 - 2i\bar{c}^1 z^3, \quad \Delta_2 = 1 - 2\bar{c}^2 z^2, \quad \Delta_3 = 1 - 2\bar{c}^3 z^1, \\
\Delta &= 1 - q^1 w^1 - q^2 w^2 - q^3 w^3.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Theta_1: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1 + c^1 w^1}{\Delta_1}, \quad z^2 \mapsto \frac{z^2 + c^1 w^2}{\Delta_1}, \quad z^3 \mapsto \frac{z^3}{\Delta_1}, \\
 w^1 &\mapsto \frac{w^1}{\Delta_1}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2}{\Delta_1}, \quad w^3 \mapsto \frac{w^3 - 2\bar{c}^1(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta_1}; \\
 \Theta_2: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1 + c^2 w^3}{\Delta_2}, \quad z^2 \mapsto \frac{z^2}{\Delta_2}, \quad z^3 \mapsto \frac{z^3 - ic^2 w^2}{\Delta_2}, \\
 w^1 &\mapsto \frac{w^1 + 2\bar{c}^2(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta_2}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2}{\Delta_2}, \quad w^3 \mapsto \frac{w^3}{\Delta_2}; \\
 \Theta_3: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1}{\Delta_3}, \quad z^2 \mapsto \frac{z^2 + c^3 w^3}{\Delta_3}, \quad z^3 \mapsto \frac{z^3 + ic^3 w^1}{\Delta_3}, \\
 w^1 &\mapsto \frac{w^1}{\Delta_3}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2 + 2\bar{c}^3(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta_3}, \quad w^3 \mapsto \frac{w^3}{\Delta_3}; \\
 \Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \Psi_3: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1 + q^2(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta}, \\
 z^2 &\mapsto \frac{z^2 - q^1(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta}, \\
 z^3 &\mapsto \frac{z^3 + iq^3(z^2 w^1 - z^1 w^2 + iz^3 w^3)}{\Delta}, \\
 w^1 &\mapsto \frac{w^1}{\Delta}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2}{\Delta}, \quad w^3 \mapsto \frac{w^3}{\Delta}.
 \end{aligned}$$

Вычисляем функцию β :

$$\beta(\bar{p}, \bar{r}) = (-4p^5 r^1 - 4p^6 r^2, -4p^5 r^3 - 4p^6 r^4, 4p^3 r^1 + 4p^4 r^2).$$

3.2. Автоморфизмы Q_7 . Обозначим

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= 1 - 4i\bar{c}^1 z^3, \quad \Delta_2 = 1 - 4\bar{c}^2 z^2, \\
 \Delta &= 1 - 2q^1 w^2 - 2q^2 w^3 + ((q^1)^2 + (q^2)^2)((w^2)^2 + (w^3)^2).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Theta_1: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1 + 2c^1 w^1}{\Delta_1}, \quad z^2 \mapsto z^2 + c^1(w^2 + iw^3), \quad z^3 \mapsto \frac{z^3}{\Delta_1}, \\
 w^1 &\mapsto \frac{w^1}{\Delta_1}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2 - 2i\bar{c}^1 z^3(w^2 + iw^3)}{\Delta_1}, \\
 w^3 &\mapsto \frac{w^3 - 2\bar{c}^1 z^3(w^2 + iw^3)}{\Delta_1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1}{\Delta_2}, \quad z^2 \mapsto \frac{z^2}{\Delta_2}, \quad z^3 \mapsto z^3 + ic^2(w^2 - iw^3), \\
w^1 &\mapsto \frac{w^1 - 4\bar{c}^2 z^2 w^1 + 2\bar{c}^2 z^1(w^2 + iw^3)}{\Delta_2}, \\
w^2 &\mapsto \frac{w^2 - 2\bar{c}^2 z^2(w^2 - iw^3)}{\Delta_2}, \quad w^3 \mapsto \frac{w^3 - 2i\bar{c}^2 z^2(w^2 - iw^3)}{\Delta_2}; \\
\Theta_3: \quad z^1 &\mapsto z^1 + c^3(iw^2 + w^3) + 4\bar{c}^3 z^2 z^3, \quad z^2 \mapsto z^2, \quad z^3 \mapsto z^3, \\
w^1 &\mapsto w^1 + 2\bar{c}^3 z^3(w^2 + iw^3), \quad w^2 \mapsto w^2, \quad w^3 \mapsto w^3; \\
\Psi_1 \circ \Psi_2: \quad z^1 &\mapsto \frac{z^1 - (q^2 + iq^1)z^1 w^3 - (q^1 - iq^1)z^1 w^2 - 2(-q^1 + iq^2)z^2 w^1}{\Delta}, \\
z^2 &\mapsto \frac{z^2(1 - (q^1 - iq^2)w^2 - (q^2 + iq^1)w^3)}{\Delta}, \\
z^3 &\mapsto \frac{z^3(1 - (q^1 - iq^2)w^2 - (q^2 + iq^1)w^3)}{\Delta}, \\
w^1 &\mapsto \frac{w^1}{\Delta}, \quad w^2 \mapsto \frac{w^2 + q^1((w^2)^2 + (w^3)^2)}{\Delta}, \\
w^3 &\mapsto \frac{w^3 - q^2((w^2)^2 + (w^3)^2)}{\Delta}; \\
\Psi_3: \quad z^1 &\mapsto z^1 + q^3 z^2(w^2 - iw^3), \quad z^2 \mapsto sz^2, \quad z^3 \mapsto z^3, \\
w^1 &\mapsto w^1 + \frac{q^3}{2}((w^2)^2 + (w^3)^2), \quad w^2 \mapsto w^2, \quad w^3 \mapsto w^3.
\end{aligned}$$

Вычисляем функцию β :

$$\beta(\bar{p}, \bar{r}) = (-4p^3 r^1 - 4p^4 r^2, 4p^3 r^2 - 4p^4 r^1, 8p^5 r^4 - 8p^6 r^3).$$

3.3. Автоморфизмы Q_8 .

$$\begin{aligned}
\Theta_1: \quad z^1 &\mapsto z^1, \quad z^2 \mapsto z^2, \quad z^3 \mapsto z^3 - ic^1 w^1 + c^1 w^2 - 4\bar{c}^1 z^1 z^2, \\
w^1 &\mapsto w^1, \quad w^2 \mapsto w^2, \quad w^3 \mapsto w^3 - 2\bar{c}^1 z^1 w^1 + 2i\bar{c}^1 z^1 w^2; \\
\Psi_1: \quad z^1 &\mapsto z^1, \quad z^2 \mapsto z^2, \quad z^3 \mapsto z^3 + q^1(z^2 w^1 - iz^2 w^2), \\
w^1 &\mapsto w^1, \quad w^2 \mapsto w^2, \quad w^3 \mapsto w^3 + q^1((w^1)^2 - (w^2)^2).
\end{aligned}$$

Так как Θ_1 и Ψ_1 коммутируют, то $\beta \equiv (0, 0, 0)$. Легко видеть, что произвольный нелинейный автоморфизм в случае квадрик Q_6, Q_7, Q_8 продолжается до бирационального отображения $\mathbb{C}^6$ степени не выше трех.

В силу того, что любая $(3, 3)$ -квадрика с нетривиальной группой нелинейных автоморфизмов эквивалентна одной из разобранных выше, доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Произвольный голоморфный нелинейный автоморфизм $(3, 3)$ -квадрики продолжается до бирационального отображения $\mathbb{C}^6$ степени не выше трех.*

Отметим следующую особенность этих автоморфизмов. С одной стороны, это рациональные отображения. При подстановке одного отображения в другое степень, вообще говоря, должна возрастать. С другой стороны, композиция автоморфизмов будет автоморфизмом, степень которого опять же не выше трех.

В связи с этим возникает задача: дать описание групп бирациональных отображений $\mathbb{C}^n$, обладающих свойством равномерной ограниченности степени.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1985.
- [2] Белошапка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [3] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [4] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
- [5] Poincaré H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Math. Palermo. 1907. P. 185–220.
- [6] Ešov V. V., Schmalz G. Holomorphic automorphisms of quadrics // Math. Z. 1994. V. 216. P. 453–470.