Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Бродский, О модулях, решеточно изоморфных линейно компактным, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 174–181

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:34:39

О МОДУЛЯХ, РЕШЕТОЧНО ИЗОМОРФНЫХ ЛИНЕЙНО КОМПАКТНЫМ

Г. М. Бродский

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули, гомоморфизмы записываются с противоположной стороны от скаляров.

Для модуля X через $L(X)$, $\text{End}(X)$, $E(X)$, $\text{Soc}(X)$ и $J(X)$ условимся обозначать его решетку подмодулей, кольцо эндоморфизмов, инъективную оболочку, поколь и радикал Джекобсона. Модули X и Y (вообще говоря, над разными кольцами) называется *решеточно изоморфными*, если изоморфны решетки $L(X)$ и $L(Y)$. Аналогично определяются *решеточно антиизоморфные* модули. Модуль X называется *линейно компактным* (в дискретной топологии), если для любого семейства $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов модуля X и любого семейства $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ подмодулей в X из разрешимости всякой конечной подсистемы сравнений $x \equiv x_\lambda \pmod{X_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, вытекает существование решения всей системы.

Цель настоящей заметки – охарактеризовать модули, решеточно изоморфные линейно компактному. Попутно обнаруживается невозможность определения линейно компактного модуля в терминах решетки его подмодулей. Отметим в этой связи, что линейная компактность модуля допускает теоретико-категорные описания (см. [1, предложение 1.4]; [2, теорема 29.7]).

Приведем необходимые определения и обозначения. Модуль X называется *AB5*-модулем*, если $Y + \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y + Y_\lambda)$ для всех подмодулей Y и направленных вниз семейств подмодулей $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Подмодуль Y модуля X называется *конечным*, если для любого семейства $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ подмодулей в X условие $Y = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ влечет $Y = \bigcap_{\lambda \in \Theta} Y_\lambda$ для некоторого конечного подмножества $\Theta \subseteq \Lambda$. Модуль X называется *конечно порожденным*, если его нулевой подмодуль 0 коконечен. Модуль X называется *конечномерным в смысле Голди*, если любое независимое семейство его ненулевых подмодулей конечно. Модуль X называется

QFD-модулем, если все его фактормодули конечномерны в смысле Голди. Семейство $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ подмодулей модуля X называется *конецзависимым*, если $Y_\mu + \bigcap_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} Y_\lambda = X$ для любых непустого конечного подмножества $\Theta \subseteq \Lambda$ и элемента $\mu \in \Theta$. Модуль X называется *коконечномерным* (в смысле Такеучи [3]), если любое конецзависимое семейство его собственных подмодулей конечно. Модуль X назовем SCD-модулем, если все его подмодули коконечномерны.

Всюду ниже $(E_i)_{i \in I}$ – семейство инъективных оболочек всех представителей классов изоморфных простых правых R -модулей и $U = E(\bigoplus_{i \in I} E_i)$ – наименьший инъективный кообразующий категории правых R -модулей. Пусть M_R – произвольный модуль. Положив $S = \text{End}(U)$, стандартным образом определим бимодуль ${}_S U_R$, левый S -модуль $H(M) = {}_S \text{Hom}_R(M, U)$ и аннуляторные отображения $\text{Ann}_{H(M)}: L(M) \rightarrow L(H(M))$ и $\text{Ann}_M: L(H(M)) \rightarrow L(M)$. Основным результатом является

ТЕОРЕМА. *Для модуля M_R равносильны условия:*

- 1) *M является AB5*-модулем и QFD-модулем;*
- 2) *M является AB5*-модулем и SCD-модулем;*
- 3) *M является AB5*-модулем, и для всякого подмодуля $A \subseteq M$ фактормодуль $A/J(A)$ конечно порожден;*
- 4) *M является AB5*-модулем, и для каждого подмодуля $A \subseteq M$ существует такой коконечный подмодуль $B \subseteq M$, что $A \subseteq B$ и $\text{Soc}(B/A) = 0$;*
- 5) *модуль $H(M)$ линейно компактен, причем отображения $\text{Ann}_{H(M)}: L(M) \rightarrow L(H(M))$ и $\text{Ann}_M: L(H(M)) \rightarrow L(M)$ являются взаимно обратными решеточными антиизоморфизмами;*
- 6) *M решеточно антиизоморфен некоторому линейно компактному модулю над подходящим кольцом;*
- 7) *M решеточно изоморфен некоторому линейно компактному модулю над подходящим кольцом.*

Доказательству теоремы предпослелим несколько лемм, дополняя по мере надобности список обозначений и определений.

Отождествив модули E_i с соответствующими подмодулями в U_R , рассмотрим подкольцо $T \subseteq S$, образованное всеми $\varphi \in S$, удовлетворяющими условию: для всякого $j \in I$ найдется такое конечное подмножество $\Xi(\varphi, j) \subseteq I$, что $\varphi(E_j) \subseteq \sum_{i \in \Xi(\varphi, j)} E_i$. Естественно возникающий бимодуль ${}_T U_R$ позволяет ассоциировать с модулем M_R левый T -модуль ${}_T \text{Hom}_R(M, U)$ и его подмодуль $D(M)$, состоящий из всех таких $f \in \text{Hom}_R(M, U)$, что $\text{Im } f \subseteq \sum_{i \in \Theta(f)} E_i$ для подходящего конечного

подмножества $\Theta(f) \subseteq I$. Аналогично случаю модуля $H(M)$ установим соответствие Галуа между $L(M)$ и $L(D(M))$ с помощью аннуляторных отображений $\text{Ann}_{D(M)}: L(M) \rightarrow L(D(M))$ и $\text{Ann}_M: L(D(M)) \rightarrow L(M)$, определяемых условиями

$$\text{Ann}_{D(M)}(A) = \{f \in D(M) \mid \text{Ker } f \supseteq A\}$$

и

$$\text{Ann}_M(V) = \bigcap_{f \in V} \text{Ker } f$$

для всех $A \in L(M)$ и $V \in L(D(M))$. Употребление обозначения Ann_M в двух различных ситуациях не приведет к путанице, так как ни в одном из нижеследующих утверждений конструкции $H(M)$ и $D(M)$ не будут использоваться одновременно.

ЛЕММА 1 [4]. *Для модуля M_R равносильны условия:*

- 1) M является AB5^* -модулем;
- 2) отображения $\text{Ann}_{D(M)}: L(M) \rightarrow L(D(M))$ и $\text{Ann}_M: L(D(M)) \rightarrow L(M)$ являются взаимно обратными решеточными анти-изоморфизмами;
- 3) M решеточно антиизоморфен некоторому модулю над подходящим кольцом.

Условимся через L^* обозначать решетку, дуальную к решетке L . Класс решеток называется *абстрактным*, если он замкнут относительно изоморфных образов. Из леммы 1 непосредственно вытекает следующий принцип двойственности для AB5^* -модулей.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если Φ – абстрактный класс решеток, то равносильны условия:*

- 1) $L(M) \in \Phi$ для любых кольца R и AB5^* -модуля M_R ;
- 2) $L(M)^* \in \Phi$ для любых кольца R и AB5^* -модуля M_R .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Флери [5] и Варадараян [6] предложили подходы к дуализации понятия конечномерного по Голди модуля, отличные от подхода Такеучи. Поскольку все три свойства коконечномерности выражаются в терминах решетки подмодулей модуля, для AB5^* -модуля они оказываются равносильными ввиду следствия 1. В отсутствии условия AB5^* эти понятия не равносильны [7]. Подмодули AB5^* -модуля наследуют условие AB5^* . Поэтому при замене в определении SCD -модуля коконечномерности (в смысле Такеучи) его подмодулей на коконечномерность в смысле Флери или Варадараяна приходим к свойствам модуля, которые для AB5^* -модуля равносильны условию SCD .

ЛЕММА 2. Для любых $AB5^*$ -модуля M_R и подмодуля $A \subseteq M$ фактормодуль $A/J(A)$ вполне приводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все подмодули $AB5^*$ -модуля M_R также являются $AB5^*$ -модулями, достаточно установить полную приводимость модуля $M/J(M)$. Обратим внимание на очевидное свойство решетки $L(M)$: всякий подмодуль модуля $\text{Soc}(M)$ выделяется прямым слагаемым в $\text{Soc}(M)$. Дуализируя это условие и применяя следствие 1, заключаем, что $M/J(M)$ вполне приводим.

Для произвольных модуля M_R и подмодуля V модуля $H(M)$ определим отображения $\beta(V): V \rightarrow H(M/\text{Ann}_M(V))$ и $\gamma(V): H(M)/V \rightarrow H(\text{Ann}_M(V))$, положив $(f)\beta(V)(x + \text{Ann}_M(V)) = f(x)$ и $(g + V)\gamma(V)(y) = g(y)$, где $f \in V$, $x \in M$, $g \in H(M)$ и $y \in \text{Ann}_M(V)$.

ЛЕММА 3. Если M_R является $AB5^*$ -модулем и QFD-модулем, то

- 1) отображения $\text{Ann}_{H(M)}: L(M) \rightarrow L(H(M))$ и $\text{Ann}_M: L(H(M)) \rightarrow L(M)$ являются взаимно обратными решеточными анти-изоморфизмами;
- 2) для всякого подмодуля $V \subseteq H(M)$ отображения $\beta(V): V \rightarrow H(M/\text{Ann}_M(V))$ и $\gamma(V): H(M)/V \rightarrow H(\text{Ann}_M(V))$ являются изоморфизмами S -модулей;
- 3) модуль $H(M)$ линейно компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу теоремы 2.19* из [8] требуется лишь убедиться в M -конечной копорожденности наименьшего инъективного кообразующего U_R , т.е. в конечной копорожденности модуля $\text{Im } f$ для любого $f \in H(M)$. Действительно, $\text{Soc}(\text{Im } f)$ является существенным подмодулем в $\text{Im } f$, потому что $\text{Soc}(U_R)$ существен в U_R . Кроме того, $\text{Soc}(\text{Im } f)$ конечно порожден, так как $\text{Im } f$ конечномерен в смысле Голди. Остается учесть предложение 21.3(1) из [2].

2) Легко проверяется с помощью 1).

3) Проведем рассуждение, предложенное для доказательства предложений 47.10(2)(ii) и 47.10(3)(ii) в [2]. Пусть $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ – направленное вниз семейство подмодулей модуля $H(M)$. Согласно 2), имеют место изоморфизмы S -модулей $\beta(V_\lambda): V_\lambda \rightarrow H(M/\text{Ann}_M(V_\lambda))$ и $\gamma(V_\lambda): H(M)/V_\lambda \rightarrow H(\text{Ann}_M(V_\lambda))$. Поскольку $(\text{Ann}_M(V_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ – направленное вверх семейство подмодулей модуля M , можем написать точную последовательность

$$0 \rightarrow \varinjlim \text{Ann}_M(V_\lambda) \rightarrow M \rightarrow \varinjlim M/\text{Ann}_M(V_\lambda) \rightarrow 0.$$

Функтор $H = \text{Hom}_R(-, U)$ из категории правых R -модулей в категорию левых S -модулей точен. Это позволяет использовать его для построения коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \varprojlim V_\lambda & \rightarrow & H(M) \rightarrow & \varprojlim H(M)/V_\lambda & \rightarrow 0 & \\
 & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \varprojlim H(M/\text{Ann}_M(V_\lambda)) & \rightarrow & H(M) \rightarrow & \varprojlim H(\text{Ann}_M(V_\lambda)) & \rightarrow 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array},$$

нижняя строка и столбцы которой точны. Но тогда точна и верхняя строка, и доказательство завершается применением теоремы 29.7 из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. $1) \Leftrightarrow 2)$ Вытекает из следствия 1 и того факта, что условия QFD и SCD, выраженные как свойства решетки $L(M)$, оказываются дуальными.

$1) \Leftrightarrow 3)$ Как известно (см. [9, лемма]), модуль M является QFD-модулем тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему легко переводимому на язык свойств решетки $L(M)$ условию: поколь каждого фактормодуля модуля M конечно порожден. Дуализируя это условие и привлекая следствие 1, выводим, что АВ5*-модуль M является QFD-модулем тогда и только тогда, когда для всякого подмодуля $A \subseteq M$ фактормодуль $A/J(A)$ конечно копорожден. Остается заметить, что конечная копорожденность модуля $A/J(A)$ равносильна его конечной порожденности в силу предложения 20.8 из [2] и леммы 2.

$1) \Leftrightarrow 4)$ Для того, чтобы M являлся QFD-модулем, необходимо и достаточно, чтобы для каждого подмодуля $A \subseteq M$ существовал такой конечно порожденный подмодуль $B \subseteq A$, что $J(A/B) = A/B$ (см. [9, теорема]). Дальнейшее очевидно ввиду следствия 1.

$1) \Rightarrow 5)$ Содержится в лемме 3.

$5) \Rightarrow 6)$ Очевидно.

$6) \Rightarrow 2)$ Если модуль M решеточно антиизоморфен некоторому линейно компактному модулю N над подходящим кольцом, то, во-первых, M является АВ5*-модулем по лемме 1. Во-вторых, M является SCD-модулем, так как ввиду теоремы 29.8 из [2], N является QFD-модулем.

$1) \Rightarrow 7)$ Пусть, как и выше, U_R – наименьший инъективный кообразующий категории правых R -модулей, $S = \text{End}(U_R)$ и $H^{(R)}(M) = H(M) = \text{Hom}_R(M, U)$ – левый S -модуль. Пусть, далее, ${}_S V$ – наименьший инъективный кообразующий категории левых S -модулей,

$T = \text{End}({}_S V)$ и $H^{(S)}(H^{(R)}(M)) = \text{Hom}_S(H^{(R)}(M), V)$ – правый T -модуль. По теореме 29.8 из [2] модуль $H^{(R)}(M)$ является AB5^* -модулем и QFD -модулем. Положим ${}_S N = H^{(R)}(M)$ и $Q_T = H^{(S)}(N)$. Применяя лемму 3 к каждому из модулей M и N , получаем взаимно обратные решеточные изоморфизмы $\text{Ann}_Q \text{Ann}_N: L(M) \rightarrow L(Q)$ и $\text{Ann}_M \text{Ann}_N: L(Q) \rightarrow L(M)$ (допуская вольность обозначений, в первом случае через Ann_N обозначаем аннуляторное отображение $\text{Ann}_N: L(M) \rightarrow L(N)$, а во втором $\text{Ann}_N: L(Q) \rightarrow L(N)$).

7) $\Rightarrow$ 1) Ясно ввиду того, что всякий линейно компактный модуль является AB5^* -модулем и QFD -модулем (см. [2, теорема 29.8]). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как легко видеть, лемма 3 и теорема остаются справедливыми при замене в их формулировках модуля $H(M) = \text{Hom}_R(M, U)$ на левый C -модуль $\text{Hom}_R(M, X)$, где X_R – произвольный инъективный кообразующий с существенным поколем и $C = \text{End}(X_R)$.

Из теоремы немедленно извлекается следующий аналог следствия 1, представляющий из себя двойной принцип двойственности: а) для линейно компактных модулей; б) для модулей, удовлетворяющих условиям AB5^* и QFD .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если Φ – абстрактный класс решеток, то равносильны условия:

- 1) $L(M) \in \Phi$ для любых кольца R и линейно компактного модуля M_R ;
- 2) $L(M) \in \Phi$ для любых кольца R и модуля M_R , являющегося AB5^* -модулем и QFD -модулем;
- 3) $L(M)^* \in \Phi$ для любых кольца R и линейно компактного модуля M_R ;
- 4) $L(M)^* \in \Phi$ для любых кольца R и модуля M_R , являющегося AB5^* -модулем и QFD -модулем.

В [10] автором анонсировано

СЛЕДСТВИЕ 3. Для кольца R равносильны условия:

- 1) кольцо R имеет конечное число неизоморфных простых правых R -модулей;
- 2) всякий AB5^* -модуль M_R конечномерен в смысле Голди;
- 3) всякий AB5^* -модуль M_R является QFD -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 3$) В силу теоремы 47.9 из [2] и леммы 2 для всякого подмодуля $A \subseteq M$ фактормодуль $A/J(A)$ оказывается вполне приводимым модулем, все однородные компоненты которого конечно порождены. Отсюда с помощью 1) заключаем, что $A/J(A)$ конечно порожден, после чего остается применить теорему.

3) $\Rightarrow$ 2) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $(P_i)_{i \in I}$ – семейство всех представителей классов изоморфных простых правых R -модулей и $W = \bigoplus_{i \in I} P_i$. Ясно, что W имеет автомодульную решетку подмодулей, и следовательно, является $AB5^*$ -модулем. Но тогда W конечномерен в смысле Голди, так что множество I конечно.

Модуль называется *цепным*, если решетка его подмодулей является цепью. Кольцо R называется *цепным справа*, если модуль R_R является цепным. Аналогично определяются $AB5^*$ -*кольца справа*, QFD-*кольца справа* и *линейно компактные справа кольца*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку правое $AB5^*$ -кольцо полусовершенно (см. [2, теорема 47.9]), из следствия 3 вытекает следующий известный результат (см. [11, предложение 4]): правое $AB5^*$ -кольцо является правым QFD-кольцом. Поэтому, согласно теореме, равносильны условия: 1) R является $AB5^*$ -кольцом справа; 2) модуль R_R решеточно изоморфен некоторому линейно компактному модулю над подходящим кольцом. Вообще говоря, $AB5^*$ -модуль не обязан быть конечномерным в смысле Голди. Подтверждающим это примером может служить построенный в доказательстве следствия 3 модуль W_R в случае, когда кольцо R имеет бесконечное число неизоморфных простых правых R -модулей. Существуют и QFD-модули, не являющиеся $AB5^*$ -модулями, например, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Наконец, чтобы ответить на вопрос о возможности определения линейно компактного модуля в терминах решетки его подмодулей, приведем пример модуля, решеточно изоморфного некоторому линейно компактному модулю над проходящим кольцом, но не являющегося линейно компактным. Так как всякий цепной модуль является $AB5^*$ -модулем и QFD-модулем, требуемым примером является модуль R_R , где R – цепное справа кольцо, не являющееся линейно компактным справа. Примеры таких колец можно найти, например, в [12].

Автор благодарен А. В. Михалеву и А. А. Туганбаеву за ценные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vámos P. Classical rings // J. Algebra. 1975. V. 34. № 1. P. 114–129.
- [2] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1991.
- [3] Takeuchi T. On cofinite-dimensional modules // Hokkaido Math. J. 1976. V. 5. № 1. P. 1–43.
- [4] Бродский Г. М. О дуализмах в модулях и условии $AB5^*$ // УМН. 1983. Т. 38. № 2. С. 201–202.
- [5] Fleury P. A note on dualizing Goldie dimension // Canad. Math. Bull. 1974. V. 17. № 6. P. 511–517.
- [6] Varadarajan K. Dual Goldie dimension // Commun. Algebra. 1979. V. 7. № 6. P. 565–610.
- [7] Varadarajan K. Modules with supplements // Pacif. J. Math. 1979. V. 82. P. 559–564.
- [8] Бродский Г. М. Функторы Ном и структуры подмодулей // Тр. ММО. 1983. Т. 46. С. 164–186.
- [9] Camillo V. P. Modules whose quotients have finite Goldie dimension // Pacif. J. Math. 1977. V. 69. № 2. P. 337–338.
- [10] Бродский Г. М. О модулях с условием $AB5^*$ // XVI Всесоюз. алгебр. конф. Тезисы. Ч. 2. Л., 1981. С. 18–19.
- [11] Lemonnier B. $AB5^*$ et la dualité de Morita // C. R. Acad. Sci. Ser. A–B. 1979. V. 289. № 2. P. A47–A50.
- [12] Brandal W. Commutative rings whose finitely generated modules decompose // Lect. Notes Math. 1979. V. 723. P. 1–116.