Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вит. В. Волчков, Приближение аналитических функций многочленами с целыми коэффициентами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 182–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:19:13

ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. В. Волчков

1. Введение. Пусть $A(\mathcal{M})$ – множество функций, непрерывных на замкнутом множестве $\mathcal{M}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и аналитических во внутренних точках $\mathcal{M}$. Классическая теорема С. Н. Мергеляна [1] утверждает, что для того, чтобы любую функцию $f \in A(\mathcal{M})$ можно было с любой точностью приблизить многочленами равномерно на $\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathcal{M}$ было компактом с односвязным дополнением. Если потребовать, чтобы коэффициенты приближающих полиномов принадлежали некоторому подмножеству $\mathbb{C}$, например, кольцу целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\}$, то возможность приближения будет зависеть также от некоторых арифметических свойств $\mathcal{M}$ и аппроксимируемой функции. Необходимые и достаточные условия возможности равномерного приближения с любой точностью функции $f \in A(\mathcal{M})$ многочленами, коэффициенты которых – целые алгебраические числа из мнимого квадратичного поля, получены С. Я. Альпером [2].

Для широкого класса областей теорема С. Н. Мергеляна получила дальнейшее развитие и уточнение во многих работах (см. [3], [4] с обширной библиографией). Отметим один из известных результатов.

Пусть r – неотрицательное целое число, $A^r(\mathcal{M})$ – множество функций, которые принадлежат $A(\mathcal{M})$ вместе со своими производными до порядка r включительно. Для ограниченного континуума $\mathcal{M}$ с односвязным дополнением обозначим $\Gamma_{1+1/n}$ его линию уровня (см. [4, с. 75]).

ТЕОРЕМА А (см. [5]). Пусть G – конечная область комплексной плоскости, ограниченная квазиконформной кривой Γ . Если $f \in A^r(\overline{G})$, то при каждом натуральном n существует алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени не выше n , для которого при $z \in \Gamma$ и всех $\nu = 0, 1, \dots, r$ имеют место неравенства

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leq M \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)), \quad (1)$$

где M – константа, не зависящая от z и n , $\rho_{1+1/n}(z)$ – расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$, $\omega(f^{(\nu)}; t)$ – модуль непрерывности $f^{(\nu)}(z)$ на $\bar{G}$.

В связи с результатом С. Я. Альпера большой интерес представляет получение оценок вида (1) для целочисленных приближений. В настоящей заметке получен первый результат в этом направлении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = [0, 1] \times [0, 1]$, Γ – граница G , $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1$. Если $f \in A^r(G)$ и интерполяционный многочлен $q(z)$, удовлетворяющий условиям $q^{(s)}(z_j) = f^{(s)}(z_j)$ ($s = 0, 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, 4$), имеет целые гауссовы коэффициенты, то при любом натуральном n существует алгебраический многочлен $Q_n(z)$ степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{Z}[i]$, для которого при $z \in \Gamma$ и всех $\nu = 0, 1, \dots, r$ имеют место неравенства

$$|f^{(\nu)}(z) - Q_n^{(\nu)}(z)| \leq M \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)),$$

где M – константа, не зависящая от z и n , $\rho_{1+1/n}(z)$ – расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$, $\omega(f^{(\nu)}; t)$ – модуль непрерывности $f^{(\nu)}(z)$ на G .

Отметим, что общие прямые теоремы приближения функций многочленами с целыми коэффициентами на отрезке вещественной прямой получены Р. М. Тригубом ([6], см. также [7, с. 125]).

2. Вспомогательные утверждения. Далее пусть $w = w(z) = \prod_{j=1}^4 (z - z_j)$, $[a]$ – целая часть действительного числа a .

ЛЕММА 1. Для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и любого натурального $m \leq [n/2]$ имеет место неравенство

$$\max_{z \in G} \sum_{k=m}^{n-m} |w|^k |1 - w|^{n-k} \leq \frac{A}{n^{(m-1)/2}},$$

где постоянная A не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in G$. Тогда $|w - 1/2| \leq 1/2$, поскольку $|w| < 1/\sqrt{2}$ и $|\arg w| \leq \pi/4$ при $z \in \Gamma$. Отсюда, полагая $x = \sqrt{\operatorname{Re} w}$, $y = \sqrt{1 - \operatorname{Re} w}$, из очевидных неравенств $|w| \leq x$, $|1 - w| \leq y$ и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-m} |w|^k |1 - w|^{n-k} &\leq \sum_{k=m}^{n-m} x^k y^{n-k} \leq \left(n \sum_{k=m}^{n-m} x^{2k} y^{2(n-k)} \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{C_n^m}} \left(\sum_{k=m}^{n-m} C_n^k x^{2k} y^{2(n-k)} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{n}{C_n^m}} \leq \frac{A}{n^{(m-1)/2}} \end{aligned}$$

с некоторой константой A , не зависящей от n .

Всюду в дальнейшем $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, не зависящие от z и n .

ЛЕММА 2. Если $f \in A^r(G)$ и $f^{(s)}(z_j) = 0$ ($s = 0, 1, \dots, r; j = 1, \dots, 4$), то при любом достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ существует алгебраический многочлен $S_n(z)$ степени не выше n со следующими свойствами:

- а) $S_n(z)$ делится на $w^{r+1}(z)$;
- б) при $z \in \Gamma$ и $\nu = 0, 1, \dots, r$ имеют место неравенства

$$|f^{(\nu)}(z) - S_n^{(\nu)}(z)| \leq c \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \Gamma$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq j \leq 4$. В силу теоремы А существует многочлен $P_n(z)$ степени не выше n , для которого имеют место неравенства (1). Поскольку $\rho_{1+1/n}(z_j) \leq c_1 \rho_{1+1/n}(z)$ (см. [3, с. 390]), из (1) получаем

$$|P_n^{(\nu)}(z_j)| \leq c_2 \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)). \quad (2)$$

Представим $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{[n/4]} a_k w^k(z), \quad (3)$$

где $a_k = a_k(z)$ – некоторые многочлены степени не выше 3. Опеним $a_k(z)$ при $k \leq r$ индукцией по k . Из очевидных равенств $a_0(z_j) = P_n(z_j)$,

$$a_l(z) = \sum_{j=0}^3 \frac{a_l(z_j) w(z)}{w'(z_j)(z - z_j)}, \quad 0 \leq l \leq r, \quad (4)$$

из оценки (2) следует, что $|a_0^{(\nu)}(z)| \leq c_3 \rho_{1+1/n}^r(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z))$. Предположим, что при $0 \leq m \leq k \leq r-1$

$$|a_m^{(\nu)}(z)| \leq c_4 \rho_{1+1/n}^{r-m}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)). \quad (5)$$

Дифференцируя равенство (3) $k+1$ раз и, полагая $z = z_j$, из оценок (2) и (5) получаем

$$\begin{aligned} & |(k+1)! a_{k+1}(z_j) (w'(z_j))^{k+1}| \\ & \leq |P_n^{(k+1)}(z_j)| + c_5 \rho_{1+1/n}^{r-k}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)) \\ & \leq c_6 \rho_{1+1/n}^{r-k-1}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (4) имеем

$$|a_{k+1}^{(\nu)}(z)| \leq c_7 \rho_{1+1/n}^{r-k-1}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)).$$

Таким образом, при $k \leq r$

$$|a_k(z)| \leq c_8 \rho_{1+1/n}^{r-k}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)).$$

Из этого неравенства и леммы И. Е. Гопенгауза [8] следует, что для любого $0 \leq k \leq r$ найдется многочлен $R_{n-4r-7,k}(z)$ степени не выше $n - 4r - 7$ такой, что

$$|a_k(w^k - w^{r+1} R_{n-4r-7,k}(z))| \leq c_9 \rho_{1+1/n}^r(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)). \quad (6)$$

Положим

$$S_n(z) = \sum_{k=r+1}^{[n/4]} a_k w^k(z) + \sum_{k=0}^r a_k w^{r+1}(z) R_{n-4r-7,k}(z).$$

Поскольку

$$P_n(z) - S_n(z) = \sum_{k=0}^r a_k (w^k - w^{r+1} R_{n-4r-7,k}(z)),$$

из оценки (6) имеем

$$|P_n(z) - S_n(z)| \leq c_{10} \rho_{1+1/n}^r(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)).$$

Применяя неравенство В. К. Дзядыка (см. [3, с. 420]), получаем

$$|P_n^{(\nu)}(z) - S_n^{(\nu)}(z)| \leq c_{11} \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z)).$$

Отсюда и из оценки (1) следует утверждение леммы 2.

3. Доказательство основного результата. Нам потребуются следующие обозначения. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $[\alpha] = [\operatorname{Re} \alpha] + i[\operatorname{Im} \alpha]$. Для всякого многочлена

$$h(z) = \sum_{l=0}^3 \alpha_l z^l$$

положим $[h] = \sum_{l=0}^3 [\alpha_l] z^l$. Пусть также $\{h\} = h - [h]$. Очевидно, что при $z \in \Gamma$ $|\{h\}(z)| < 6(1 + \sqrt{2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $f^{(s)}(z_j) = 0$ ($s = 0, 1, \dots, r; j = 1, \dots, 4$). Представим многочлен $S_n(z)$ (см. лемму 2) в виде

$$S_n(z) = \sum_{k=r+1}^{[n/4]} b_k w^k(z),$$

где $b_k = b_k(z)$ – некоторые многочлены степени не выше 3. Из леммы И. Е. Гопенгауза [8] следует, что для любого $k = r + 1, \dots, 4r + 4$ найдется многочлен $R_{n-16r-23,k}(z)$ степени не выше $n - 16r - 23$ такой, что

$$\begin{aligned} |\{b_k\}w^k(z) - \{b_k\}w^{4r+5}(z)R_{n-16r-23,k}(z)| &\leq c_{12}\rho_{1+1/n}^{r+1}(z), \\ r+1 &\leq k \leq 4r+4, \quad z \in \Gamma. \end{aligned}$$

Поэтому многочлен $S_n(z)$ имеет вид

$$S_n(z) = \sum_{k=r+1}^{4r+4} [b_k]w^k(z) + \sum_{k=4r+5}^{[n/4]} r_k w^k(z) + \theta_1(n; z; r),$$

где $r_k = r_k(z)$ – некоторые многочлены степени не выше 3, $|\theta_1(n; z; r)| \leq c_{13}\rho_{1+1/n}^{r+1}(z)$ при $z \in \Gamma$.

Обозначим

$$\lambda(n; z; r) = \sum_{k=4r+5}^{[n/4]} r_k w^k(z), \quad p = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - k.$$

Используя равенство $\sum_{l=0}^p C_p^l w^l (1-w)^{p-l} = 1$, получаем

$$\lambda(n; z; r) = \sum_{k=4r+5}^{[n/4]} r_k \sum_{i=k}^{[n/4]} C_p^{i-k} w^i (1-w)^{[n/4]-i}.$$

Меняя порядок суммирования, отсюда имеем

$$\begin{aligned} \lambda(n; z; r) &= \sum_{i=4r+5}^{[n/4]} w^i (1-w)^{[n/4]-i} \sum_{k=4r+5}^i C_p^{i-k} r_k \\ &= \sum_{i=4r+5}^{[n/4]} d_i w^i (1-w)^{[n/4]-i}, \end{aligned}$$

где $d_i = d_i(z) = \sum_{k=4r+5}^i C_p^{i-k} r_k$ – многочлены степени не выше 3. Поскольку $c_{14}/n^2 \leq \rho_{1+1/n}(z)$, $z \in \Gamma$ (см. [3, с. 390]), из неравенства $|w(z)| < 1/\sqrt{2}$ ($z \in G$) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=4r+5}^{[n/4]} \{d_i\} w^i (1-w)^{[n/4]-i} \right| \\ & \leq 15 \left(\sum_{i=4r+5}^{[n/4]-4r-5} |w|^i |1-w|^{[n/4]-i} + \sum_{i=[n/4]-4r-4}^{[n/4]} |w|^i |1-w|^{[n/4]-i} \right) \\ & \leq c_{15} \left(\frac{1}{n^{2(r+1)}} + \left(\frac{1}{2} \right)^{n/8} \right) \leq c_{16} \rho_{1+1/n}^r(z), \quad z \in \Gamma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_n(z) = \sum_{k=r+1}^{4r+4} [b_k] w^k + \sum_{i=4r+5}^{[n/4]} [d_i] w^i (1-w)^{[n/4]-i} + \theta_2(n; z; r),$$

где

$$|\theta_2(n; z; r)| \leq c_{17} \rho_{1+1/n}^{r+1}(z), \quad z \in \Gamma.$$

Полагая $Q_n(z) = S_n(z) - \theta_2(n; z; r)$, из неравенства В. К. Дзядыка (см [3, с. 420]) получаем

$$|S_n^{(\nu)}(z) - Q_n^{(\nu)}(z)| \leq c_{18} \rho_{1+1/n}^{r-\nu}(z) \omega(f^{(\nu)}; \rho_{1+1/n}(z))$$

при $z \in \Gamma$ и $\nu = 0, 1, \dots, r$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мергелян С. Н. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78. № 3. С. 405–408.
- [2] Альпер С. Я. О приближении функций многочленами с целыми коэффициентами на замкнутых множествах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 5. С. 1173–1186.
- [3] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [4] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
- [5] Белый В. И. Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей // Матем. сб. 1977. Т. 102. № 3. С. 331–361.
- [6] Тригуб Р. М. Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 2. С. 261–280.
- [7] Ferguson O. Approximation by polynomials with integral coefficients. Providence, R.I: Amer. Math. Soc., 1980.
- [8] Гопенгауз И. Е. К вопросу о приближении функций на отрезке и в области с углами // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 4. Харьков, 1967. С. 204–210.