Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. М. Галеев, Линейные поперечники классов Гёльдера–Никольского периодических функций многих переменных, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 189–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:58:18

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ГЁЛЬДЕРА–НИКОЛЬСКОГО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Э. М. Галеев

В работе рассматриваются линейные поперечники $\lambda_N(W_p^r(T^n), L_q)$ и $\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q)$ классов периодических функций одной и нескольких переменных $W_p^r(T^n)$ и $H_p^r(T^n)$ в пространстве L_q . Для классов функций одной и нескольких переменных Соболева $W_p^r(T^n)$ формулируются без доказательства известные результаты, для классов Гёльдера–Никольского $H_p^r(T^n)$ формулируются без доказательства известные результаты и приводятся с доказательством новые результаты и ранее неопубликованные доказательства.

Линейный поперечник был введен В. М. Тихомировым в работе [1]. Напомним, что *линейным N -поперечником* множества W в банаховом пространстве X называется величина

$$\lambda_N(W, X) = \inf_P \sup_{x \in W} \|x - Px\|_X,$$

где инфимум берется по всем действующим в X линейным непрерывным операторам ранга N .

Пусть $T^n = (-\pi, \pi]^n$ – n -мерный тор, реализованный в виде произведения n полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Как обычно, $L_p = L_p(T^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$ – периодических по каждой переменной с периодом 2π таких, что норма $\|x(\cdot)\|_{L_p}$ конечна.

Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, т.е. функции, коэффициенты Фурье которых, имеющие хотя бы один нулевой индекс, равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k, t)},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00237, и Международного научного фонда, грант МР1000.

где $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n := \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_j \neq 0, j = 1, \dots, n\}$, $\mathbb{Z}^n$ – n -мерная целочисленная решетка, $(k, t) := \sum_{j=1}^n k_j t_j$.

Для таких функций $x(\cdot)$ и вектора $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n} x_k (ik)^r e^{i(k, t)},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \dots (ik_n)^{r_n}$, $(ik_j)^{r_j} = |k_j|^{r_j} e^{(i/2)\pi r_j \operatorname{sign} k_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ сопоставим множество $\pi_s \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n$ по следующему правилу:

$$\pi_s = \{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n \mid 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k, t)} = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) = \sum_{k \in \pi_s} x_k e^{i(k, t)}$.

Для вектора $r \in \mathbb{R}^n$ и числа $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, введем следующие классы функций:

$$\begin{aligned} W_p^r &= \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot)\|_{W_p^r} := \|x^{(r)}(\cdot)\|_p \leq 1\} \\ &\quad (\text{классы Соболева}), \\ H_p^r &= \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot)\|_{H_p^r} := \sup_s \|\delta_s x^{(r)}(\cdot)\|_p \leq 1\} \\ &\quad (\text{классы Гёльдера–Никольского}). \end{aligned}$$

Сформулируем некоторые известные результаты, которые нам понадобятся при выводе порядков линейных поперечников функциональных классов.

Для линейных поперечников Р. С. Исмагиловым доказана следующая теорема двойственности.

ТЕОРЕМА 1 (Исмагилов [2]). *Пусть BX , BY – единичные шары в банаховых пространствах X и Y соответственно, $(BX)^\circ$, $(BY)^\circ$ – полярные множества. Пространство Y^* вложено в пространство X . Тогда*

$$\lambda_N((BY)^\circ, X) = \lambda_N((BX)^\circ, Y).$$

Напомним, что *полярной* множества $A \subset X$ в нормированном пространстве X называется следующее множество в сопряженном пространстве X^* : $A^\circ = \{x^* \in X^* \mid (x^*, x) \leq 1 \forall x \in A\}$.

Нам понадобятся также оценки Е. Д. Глускина линейных поперечников конечномерных множеств.

ТЕОРЕМА 2 (Глускин [3]). Пусть $n < m$, $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$, $1/p + 1/q \geq 1$. Тогда

$$\lambda_N(B_p^m, \ell_q^m) \asymp \max\{m^{1/q-1/p}, \min\{1, m^{1/q}N^{-1/2}\}\sqrt{1-N/m}\}.$$

Случай $p = 1$, $q > 2$ теоремы 2 следует из работы Б. С. Кашина [4], в которой вычисляется колмогоровский поперечник октаэдра B_1^m в пространстве B_q^m , поскольку для октаэдра, как нетрудно заметить, линейный поперечник совпадает с колмогоровским.

ТЕОРЕМА 3. Между пространством тригонометрических полиномов вида $x(t) = \sum_{k \in \pi_s} x_k e^{i(k,t)}$ и пространством $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции $x(\cdot)$ вектора $x = \{x_m(\tau^j)\} \in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$, $x_m(t) = \sum_{l=1, \dots, n}^{\text{sign } k_l = m_l} x_k e^{i(k,t)}$, $m = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$, $\tau^j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_n} j_n)$, $j_i = 1, \dots, 2^{s_i-1}$, $i = 1, \dots, n$, при этом для функции $x(\cdot) \in \text{lin}\{e^{i(k,t)}, k \in \pi_s\}$ и числа $p \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_{L_p} &\asymp 2^{-(s,1/p)} \|x\|_{\ell_p^{2(s,1)}}, & 1 < p < \infty, \\ 2^{-(s,1/p)} \|x\|_{\ell_p^{2(s,1)}} &\ll \|x(\cdot)\|_{L_p}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказывается аналогично теореме Марцинкевича–Зигмунда для функций одной переменной. Эта теорема для функций многих переменных использовалась автором в работе [5] при переходе от оценок колмогоровских поперечников функциональных классов к оценкам колмогоровских поперечников дискретных множеств. Для функций одной переменной теорема доказывается в монографии А. Зигмунда [6, Т. 2, с. 46].

Для множества $K \subset \mathbb{Z}^n$ обозначим $\mathcal{T}(K) := \text{lin}\{e^{i(k,t)}, k \in K\}$.

Из определения линейного поперечника, теоремы Литтлвуда–Пэли и теоремы 3 о дискретизации легко выводится следующая лемма (см. [7]).

ЛЕММА 1. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $x(\cdot) \in \mathcal{T}(\pi_s)$, $N_s \in \mathbb{Z}_+$, $N_s \leq 2^{(s,1)}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p, q < \infty$. Тогда существует линейный оператор $\Lambda_{N_s} : \mathcal{T}(\pi_s) \rightarrow \mathcal{T}(\pi_s)$ ранга N_s такой, что

$$\|x(\cdot) - \Lambda_{N_s} x(\cdot)\|_q \asymp \lambda_{n_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_q^{2^{(s,1)}}) 2^{(s, -r+1/p-1/q)} \|x^{(r)}(\cdot)\|_p.$$

При вычислении поперечников функциональных классов оценки сверху и снизу часто сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. Так, например, в работе [8] оценка снизу поперечника по Колмогорову $d_N(H_p^r(T^n), L_q)$ класса периодических функций многих переменных с доминирующей смешанной производной $H_p^r(T^n)$ в пространстве L_q при $1 < p \leq q \leq 2$ сводится к оценке снизу поперечника $d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,q}^{n,m})$

конечномерного множества $B_{1,\infty}^{n,m}$ в смешанной норме $\ell_{2,q}^{n,m}$ с помощью теоремы Литтлвуда–Пэли, неравенства В. Н. Темлякова и теоремы Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации. И далее вычисляется порядок этого поперечника, т.е. доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 [8]. Пусть $1 < q < \infty$, $N \leq nm/2$. Тогда

$$d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,q}^{n,m}) \asymp m^{1/q}.$$

Изложенное в работе [8] доказательство оценки снизу (оценки сверху здесь при всех значениях величины q тривиальны) без изменений проходит и для случая $q = \infty$. При выступлении на семинаре Б. С. Кашина мною была предложена задача для случая $q = 1$, доказательство которого требовало новых идей и который может быть использован при нахождении порядков линейных поперечников классов Гёльдера–Никольского и классов Бесова. Ученику Б. С. Кашина А. Д. Изааку, используя вероятностные методы, удалось получить следующую нетривиальную оценку.

ТЕОРЕМА 5 (Изаак [9]). Пусть $N \leq nm/2$, $m > 1$. Тогда

$$m \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \ll d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,1}^{n,m}) \ll m.$$

Полученный результат может быть также использован при оценке снизу поперечников пересечения классов Гёльдера–Никольского периодических функций многих переменных $H_p^r(T^n)$.

Здесь через $B_{p,q}^{n,m}$ обозначен единичный шар нормированного пространства $\ell_{p,q}^{n,m}$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_{p,q}^{n,m}} = \left(\sum_{s=1}^m \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty, \quad x \in \mathbb{R}^{nm},$$

где $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} \mid (s-1)n < k \leq sn\}$, $s = 1, \dots, m$.

Перейдем к линейным поперечникам классов функций. Вначале сформулируем теорему о линейных поперечниках $\lambda_N(W_p^r, L_q)$ классов периодических функций одной переменной.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < p, q < \infty$, $r > (1/p - 1/q)_+$. Тогда

$$\lambda_N(W_p^r(T^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-r+(1/p-1/q)_+}, & q \leq 2 \text{ или } 2 \leq p, \\ N^{-r+1/p-1/2}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, \quad q > 2, \quad r > \frac{1}{p}, \\ N^{-r+1/2-1/q}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad p < 2, \quad r > 1 - \frac{1}{q}. \end{cases}$$

Здесь для $a \in \mathbb{R}$ обозначено $a_+ = \max\{0, a\}$.

Эта теорема была доказана Р. С. Исмаиловым [2] при $q \leq 2$ или $p \geq 2$; В. Е. Майоровым [10] при $1 < p \leq 2 \leq q$ и чуть позже К. Хеллигом [11].

Сформулируем известные результаты о линейных поперечниках классов $W_p^r(T^n)$ в пространстве L_q .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $r \in \mathbb{R}^n$, $(1/p - 1/q)_+ < r_1 = \dots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \dots \leq r_n$, $1 < p, q < \infty$. Тогда

$$\lambda_N(W_p^r(T^n), L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, & q \leq 2 \text{ или } 2 \leq p, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, q > 2, r_1 > \frac{1}{p}, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, p < 2, r_1 > 1 - \frac{1}{q}. \end{cases}$$

Схема доказательства теоремы 7 была опубликована в работе автора [7] в 1987 году.

Сформулируем далее и докажем теорему о линейных поперечниках классов $H_p^r(T^n)$ в пространстве L_q .

ТЕОРЕМА. Пусть $r \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 = \dots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \dots \leq r_n$, $1 < p, q < \infty$. Тогда

1) при $p \geq \max\{q, 2\}$

$$\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{l/2} N,$$

2) при $q \leq p \leq 2$

$$\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{l/2} N \ll \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{l/p} N,$$

3) при $p \leq q \leq 2$, $r_1 > 1/p - 1/q$

$$\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/p + 1/q} \log^{l/q} N,$$

4) при $1/p + 1/q \geq 1$, $q \geq 2$, $r_1 > 1/p$

$$\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/p + 1/2} \log^{l/2} N,$$

5) при $1/p + 1/q < 1$, $p \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\log \log \log N}}{\log \log N} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/2 + 1/q} \log^{l/q} N \\ & \ll \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/2 + 1/q} \log^{l/q} N, \end{aligned}$$

6) *при* $2 \leq p < q$, $r_1 > 1/p - 1/q$

$$\frac{\sqrt{\log \log \log N}}{\log \log N} \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - 1/p + 1/q} \log^{l/q} N \\ \ll \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - 1/p + 1/q} \log^{l/q} N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $p \geq \max\{q, 2\}$. Оценка сверху следует из приближения класса H_p^r в пространстве L_q суммами Фурье (см. [5]). Снизу линейный поперечник оценивается колмогоровским поперечником $\lambda_N \geq d_N$. Доказательство оценки снизу колмогоровского поперечника в этом случае опубликовано в работе автора [5] в 1985 году.

2) Пусть $q \leq p \leq 2$. Оценка сверху вытекает из приближения суммами Фурье. Оценка снизу в силу вложения $H_p^r(T^n) \supset H_2^r(T^n)$ при $p \leq 2$ сводится к случаю 1, когда $p = 2$: $\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \geq \lambda_N(H_2^r(T^n), L_q)$.

3) Пусть $p \leq q \leq 2$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Оценка сверху вытекает из приближения класса H_p^r в пространстве L_q суммами Фурье (см. работу В. Н. Темлякова [12]). Оценка снизу сводится к колмогоровскому поперечнику $\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \geq d_N(H_p^r(T^n), L_q)$. А оценка снизу колмогоровского поперечника $d_N(H_p^r(T^n), L_q)$ (см. [8]) сводится к нахождению колмогоровского поперечника $d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,q}^{n,m})$ конечномерного множества $B_{1,\infty}^{n,m}$ в векторной норме $\ell_{2,q}^{n,m}$, которая и была найдена в работе автора [8].

4) Пусть $1/p + 1/q \geq 1$, $q \geq 2$, $r_1 > 1/p$. Оценка сверху. Докажем для простоты оценку сверху для вектора $r = (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^n$ с равными координатами. Общий случай рассматривается аналогично, но с чуть более громоздкими выкладками.

Положим $N_s = 2^{(s,1)}$ при $(s, 1) \leq \mu$, $N_s = [2^{\mu + \theta(\mu - (s,1))}]$ при $(s, 1) > \mu$, для $s \in \mathbb{N}^n$, где μ отыскивается из уравнения $\mu^{n-1} 2^\mu = N$, $[\cdot]$ – целая часть числа, $\theta > 0$ – произвольное достаточно малое число, удовлетворяющее неравенству $\theta/2 < r - 1/p$. Тогда нетрудно доказать, что $\sum_{s \in \mathbb{N}^n} N_s \asymp N$.

Возьмем линейный непрерывный оператор Λ_N ранга N , действующий на функцию $x(\cdot) = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(\cdot) \in H_p^r$ по формуле

$$\Lambda_N x(\cdot) = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \Lambda_{N_s} \delta_s x(\cdot),$$

где Λ_{N_s} – операторы из леммы 1. Тогда в силу неравенства (см., например, [7])

$$\left\| \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(\cdot) \right\|_q \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^n} \|\delta_s x(\cdot)\|_q^2 \right)^{1/2}$$

имеем

$$\|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} \|\delta_s x(\cdot) - \Lambda_{N_s} x(\cdot)\|_q^2 \right)^{1/2}.$$

Поэтому для функции $x \in H_p^r$ по лемме 1

$$\begin{aligned} & \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q \\ & \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s, -r+1/p-1/q)} \lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_q^{2^{(s,1)}}) \|\delta_s x^{(r)}(\cdot)\|_p \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s, -r+1/p-1/q)} \lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_q^{2^{(s,1)}}) \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

По теореме 2 (Глускина) $\lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_q^{2^{(s,1)}}) \ll 2^{(s, 1/q)} N_s^{-1/2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} & \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q \\ & \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s, -r+1/p-1/q)} 2^{(s, 1/q)} N_s^{-1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \asymp \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s, -r+1/p+\theta/2)-\mu/2-\mu\theta/2} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Суммируя, получим нужную оценку сверху

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q & \ll (\mu^{n-1} 2^{2\mu(-r+1/p+\theta/2)-\mu-\mu\theta})^{1/2} \\ & = \mu^{(n-1)/2} 2^{\mu(-r+1/p-1/2)} \\ & \asymp \left(\frac{\log^{n-1} N}{N} \right)^{r-1/p+1/2} \log^{\frac{n-1}{2}} N. \end{aligned}$$

Оценка снизу в силу неравенства $\|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_2$ при $q \geq 2$ сводится к уже доказанному в п. 3) случаю, когда $q = 2$:

$$\lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \geq \lambda_N(H_p^r(T^n), L_2).$$

5) Пусть $1/p + 1/q < 1$, $p \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$. *Оценка сверху.* Докажем как и в п. 4) для простоты оценку сверху для вектора $r = (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^n$ с равными координатами. Общий случай рассматривается аналогично.

Положим $N_s = 2^{(s,1)}$ при $(s, 1) \leq \mu$, $N_s = [2^{\mu+\theta(\mu-(s,1))}]$ при $(s, 1) > \mu$, для $s \in \mathbb{N}^n$, где μ отыскивается из уравнения $\mu^{n-1}2^\mu = N$, $\theta > 0$ – произвольное достаточно малое число, удовлетворяющее неравенству $\theta/2 < r - 1 + 1/q$. Тогда нетрудно доказать, что $\sum_{s \in \mathbb{N}^n} N_s \asymp N$.

Возьмем линейный непрерывный оператор Λ_N ранга N , действующий на функцию $x(\cdot) = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(\cdot) \in H_p^r$ по формуле

$$\Lambda_N x(\cdot) = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \Lambda_{N_s} \delta_s x(\cdot),$$

где Λ_{N_s} – операторы из леммы 1. Тогда в силу неравенства для разных метрик Темлякова [12]

$$\left\| \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(\cdot) \right\|_q \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^n} (2^{(s,1/z-1/q)} \|\delta_s x(\cdot)\|_z)^q \right)^{1/q}, \quad 1 < z < q < \infty,$$

имеем

$$\|x - \Lambda_N x\|_q \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} (2^{(s,1/p'-1/q)} \|\delta_s x - \Lambda_{N_s} x\|_{p'})^q \right)^{1/q},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Отметим, что в нашем случае из неравенства $1/p + 1/q < 1$ следует, что $1/q < 1/p'$ и $p' < q$. Поэтому для функции $x(\cdot) \in H_p^r$

$$\begin{aligned} & \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q \\ & \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s,-r+1/p'-1/q)} 2^{(s,1/p-1/p')} \right. \right. \\ & \quad \times \lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_{p'}^{2^{(s,1)}}) \|\delta_s x^{(r)}\|_p \Big)^q \Big)^{1/q} \\ & = \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s,-r+1/p-1/q)} \lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_{p'}^{2^{(s,1)}}) \|\delta_s x^{(r)}\|_p \right)^q \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\sum_{(s,1) > \mu} \left(2^{(s,-r+1/p-1/q)} \lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_{p'}^{2^{(s,1)}}) \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

По теореме 2 (Глускина) $\lambda_{N_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, \ell_{p'}^{2^{(s,1)}}) \ll 2^{(s,1/p')} N_s^{-1/2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q & \ll \left(\sum_{(s,1) > \mu} (2^{(s,-r+1/p-1/q)} 2^{(s,1/p')} N_s^{-1/2})^q \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\sum_{(s,1) > \mu} (2^{(s,-r+1-1/q+\theta/2)-\mu/2-\mu\theta/2})^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Суммируя, получим нужную оценку сверху

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \Lambda_N x(\cdot)\|_q &\ll (\mu^{n-1} 2^{\mu(-r+1/2-1/q)q})^{1/q} \\ &= \mu^{(n-1)/q} 2^{\mu(-r+1/2-1/q)} \\ &\asymp (N^{-1} \log^{n-1} N)^{r-1/2+1/q} \log^{(n-1)/q} N. \end{aligned}$$

Оценка снизу. Обозначим $S = \{s = (s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n \mid (s, 1) = m = [\mu]\}$, $K = \bigcup_{s \in S} \pi_s$, где величина μ отыскивается из соотношения $\mu^l 2^\mu \asymp N$, чтобы размерность подпространства $\mathcal{T} := \mathcal{T}(K) = \text{lin}\{e^{i(k,t)}, k \in K\}$ была не менее $2N$, т.е. $|K| := \sum_{s \in S} |\pi_s| = \sum_{s \in S} 2^{(s,1)} = |S| 2^m \geq C_1 m^l 2^m \geq C_2 \mu^l 2^\mu = 2N$. Здесь и далее для множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ через $|A|$ обозначается число элементов во множестве A . Тогда по теореме Литтлвуда–Пэли

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \geq \lambda_N(H_p^r \cap \mathcal{T}, L_q) \gg \lambda_N(H_p^r \cap \mathcal{T}, L_q \cap \mathcal{T}). \quad (1)$$

Если $s \in S$, то по теореме 3 (Марцинкевича–Зигмунда)

$$\|\delta_s x(\cdot)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s x^j|^p\right)^{1/p} = 2^{-m/p} \left(\sum_{j=1}^{2^m} |\delta_s x^j|^p\right)^{1/p}, \quad (2)$$

следовательно,

$$x(\cdot) = \sum_{s \in S} \delta_s x(\cdot) \in H_p^r$$

при $(\sum_{j=1}^{2^m} |\delta_s x^j|^p)^{1/p} \ll 2^{-mr_1+m/p} \forall s \in S$, а с другой стороны, в силу неравенства при $q \geq 2$ (см., например, [7])

$$\left\| \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(\cdot) \right\|_q \gg \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^n} \|\delta_s x(\cdot)\|_q^q \right)^{1/q},$$

имеем для $y(\cdot) \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \|y(\cdot)\|_q &= \left\| \sum_{s \in S} \delta_s y(\cdot) \right\|_q \gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s y(\cdot)\|_q^q \right)^{1/q} \\ &\asymp 2^{-m/q} \left(\sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{2^m} |\delta_s y^j|^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сводя оценку снизу поперечника функционального класса к оценке снизу поперечника конечномерного множества с помощью изоморфизма между

подпространством тригонометрических функций $x(\cdot) \in \mathcal{T}$ и конечномерным пространством $\mathbb{R}^{|K|}$, согласно теореме 3 (Марцинкевича–Зигмунда), а также пользуясь неравенствами (2) и (3), получим из (1):

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \gg 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} \lambda_N(B_{p,\infty}^{2^m,|S|}, \ell_q^{|K|}). \quad (4)$$

Поскольку по неравенству для средних $\|\cdot\|_{\ell_p^{2^m}} \leq \|\cdot\|_{\ell_2^{2^m}} 2^{m(1/p-1/2)}$ при $p \leq 2$, а $\|\cdot\|_{\ell_q^{|S|}} \geq \|\cdot\|_{\ell_1^{|S|}} |S|^{1/q-1}$ при $q \geq 1$ и $\|\cdot\|_{\ell_q^{2^m}} \geq \|\cdot\|_{\ell_\infty^{2^m}}$ при $q \leq \infty$, то $B_p^{2^m} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_2^{2^m}$ и, значит, $B_{p,\infty}^{2^m,|S|} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_{2,\infty}^{2^m,|S|}$, $\|\cdot\|_{\ell_q^{2^m,|S|}} \geq \|\cdot\|_{\ell_{\infty,1}^{2^m,|S|}} |S|^{1/q-1}$. Поэтому из (4) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_N(H_p^r, L_q) &\gg 2^{m(-r_1+1/2-1/q)} \lambda_N(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \ell_q^{|K|}) \\ &\geq |S|^{1/q-1} 2^{m(-r_1+1/2-1/q)} \lambda_N(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \ell_{\infty,1}^{2^m,|S|}). \end{aligned}$$

Используя теорему двойственности Исмагилова, получим далее

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \gg |S|^{1/q-1} 2^{m(-r_1+1/2-1/q)} \lambda_N(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, \ell_{2,1}^{2^m,|S|}).$$

Подставляя оценку линейного поперечника конечномерного множества по теореме 5 (Изаака), приходим к искомой оценке снизу линейного поперечника функционального класса:

$$\begin{aligned} \lambda_N(H_p^r, L_q) &\gg |S|^{1/q-1} 2^{m(-r_1+1/2-1/q)} \frac{|S| \sqrt{\log \log |S|}}{\log |S|} \\ &= \frac{\sqrt{\log \log |S|}}{\log |S|} |S|^{1/q} 2^{m(-r_1+1/2-1/q)} \\ &\asymp \frac{\sqrt{\log \log \log N}}{\log \log N} \log^{l/q} N \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/2+1/q}. \end{aligned}$$

6) Пусть $2 \leq p < q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Оценка сверху вытекает из приближения класса H_p^r в пространстве L_q суммами Фурье (см. [12]).

Оценка снизу следует из вложения $H_2^{r-1/p+1/2} \subset C H_p^r$ с некоторой константой $C > 0$ при $p \geq 2$ (вложение выполняется в силу неравенства разных метрик С.М. Никольского для тригонометрических полиномов) и уже найденной в п. 5) оценки снизу для $\lambda_N(H_2^{r-1/p+1/2}(T^n), L_q(T^n))$ ($p = 2, 1/q + 1/p < 1 \Leftrightarrow q > 2$) (отметим, что оценка снизу там доказывалась без ограничений на гладкость функционального класса):

$$\begin{aligned} \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) &\gg \lambda_N(H_2^{r-1/p+1/2}(T^n), L_q) \\ &\gg \frac{\sqrt{\log \log \log N}}{\log \log N} \log^{l/q} N \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/p+1/q}. \end{aligned}$$

Отметим, что если $n = 1$, то $l = 0$ и при оценке снизу в 5) $|S| = 1$, следовательно,

$$\lambda_N(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, \ell_{2,1}^{2^m,|S|}) = \lambda_N(B_1^{2^m}, l_2^{2^m}) \asymp 1.$$

Поэтому в 5), а, значит, и в 6), мы имеем точные оценки:

$$\lambda_N(H_p^r(T^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{r-1/2+1/q}, & 1/p + 1/q < 1, p \leq 2, r > 1 - 1/q; \\ N^{r-1/p+1/q}, & 2 \leq p < q, r > 1/p - 1/q. \end{cases}$$

Отметим также, что в п. 2) последней теоремы оценки снизу и сверху отличаются по порядку на степень $\log N$, в то время как в случаях 5) и 6) зазор между оценкой сверху и снизу имеет порядок повторного логарифма.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.
- [2] Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // УМН. 1974. Т. 29. № 3. С. 161–178.
- [3] Глускин Е. Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Матем. сб. 1983. Т. 120. С. 120–189.
- [4] Кашин Б. С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства ℓ_2^n в ℓ_2^m // Изв. АН АрмССР. Матем. 1980. Т. XV. № 5. С. 379–394.
- [5] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\tilde{r}}$ и $\widetilde{H}_p^{\tilde{r}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 916–934.
- [6] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I, II. М.: Мир, 1965.
- [7] Галеев Э. М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 4. С. 13–16.
- [8] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 418–430.
- [9] Изаак А. Д. Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 43–52.
- [10] Майоров В. Е. О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1127–1130.
- [11] Höllig K. Approximationszahlen von Sobolev. Einbettungen. Dissertation. Bonn, 1979.
- [12] Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 986–1030.