Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Об оболочках абелевых под-
групп в связных группах Ли, *Матем. заметки*,
1996, том 59, выпуск 2, 200–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1707>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:15:04

ОБ ОБОЛОЧКАХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП В СВЯЗНЫХ ГРУППАХ ЛИ

В. В. Горбачевич

Пусть A – абелева подгруппа в некоторой связной группе Ли G . Подгруппа A называется правильной в G , если она содержится в некоторой связной абелевой подгруппе Ли C (называемой оболочкой для A) группы Ли G . Если подгруппа A правильна, то среди всех ее оболочек особое внимание мы будем уделять минимальным, которые будем называть точными оболочками (в силу связности оболочек очевидно, что минимальные среди них, в обычном теоретико-множественном смысле, существуют). Для точной оболочки C^* абелевой подгруппы A ее алгебра Ли $L(A^*)$ является минимальной среди всех тех абелевых подалгебр Ли в алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G , для которых их образ при экспоненциальном отображении $\exp: L(G) \rightarrow G$ содержит исходную абелеву подгруппу A . Множество всех точных оболочек абелевой подгруппы A в группе Ли G обозначим через $\mathcal{E}(A, G)$. Так как связная подгруппа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли, то это множество естественным образом отождествляется с множеством подалгебр Ли в $L(G)$, соответствующих точным оболочкам. Используя это отождествление, на $\mathcal{E}(A, G)$ может быть введена естественная топология (см. ниже). В данной статье мы дадим описание всех связных компонент топологического пространства $\mathcal{E}(A, G)$, представив их в виде орбит действия некоторой связной группы Ли, которая определяется по G и подгруппе A . Это описание содержит в качестве специальных случаев результаты А. И. Мальцева [1] (о точных оболочках центра $Z(G)$ связной группы Ли G) и Т. Ноно [2] (об однопараметрических подгруппах в связной группе Ли G , которые проходят через некоторый фиксированный элемент $g \in G$). Кроме того, мы укажем приложение к изучению вполне интегрируемых дифференциальных уравнений на торе $\mathbb{T}^n$ – возможности их приведения к уравнению с постоянными коэффициентами (более подробно о таких уравнениях см. [3], а также [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант RO-4300, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-10123.

Сначала мы рассмотрим вкратце вопрос о существовании для заданной абелевой подгруппы A в связной группе Ли G хотя бы одной оболочки. Далеко не всякая абелева подгруппа такую оболочку имеет, т.е. является правильной подгруппой. Например, пусть $G = K$ – некоторая связная простая компактная группа Ли. Тогда известно, что все конечные (и даже все компактные) абелевы подгруппы в K будут правильными тогда и только тогда, когда группа Ли K односвязна и ее целочисленная группа когомологий $H^*(K, \mathbb{Z})$ не имеет кручения (т.е. $H^*(K, \mathbb{Z})$ – свободная абелева группа) [5], [6]. Как хорошо известно, простая односвязная компактная группа Ли, не имеющая кручения в когомологиях, изоморфна $SU(n)$ или $Sp(n)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Далее, для произвольного простого числа p каждая подгруппа в односвязной компактной простой группе Ли K , изоморфная $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, будет правильной тогда и только тогда, когда $H^*(K, \mathbb{Z})$ не имеет p -кручения [5]. Аналогичные результаты имеют место и для конечных абелевых подгрупп в произвольных связных группах Ли G (ибо проблема тут сводится к рассмотрению конечных абелевых подгрупп в максимальной компактной подгруппе K группы Ли G), а также для абелевых подгрупп A в комплексных алгебраических группах Ли, все элементы $g \in A$ которых полупросты (т.е. вполне приводимы) [6]. Что же касается вопроса о правильности более общих абелевых подгрупп, то в настоящее время здесь имеются только некоторые частичные результаты (см., например, [7]).

Если A – правильная абелева подгруппа в связной группе Ли G , то $A \subseteq \exp(L(C))$, где $L(C)$ – подалгебра Ли в $L(G)$, соответствующая некоторой оболочке C подгруппы A . Отсюда следует, что произвольная правильная абелева подгруппа содержится в образе экспоненциального отображения для группы Ли G . Если группа Ли G такова, что отображение $\exp$ не является сюръективным, то в G существуют абелевы подгруппы, не являющиеся правильными. Точнее, если $g \in G \setminus \exp(L(G))$, то циклическая подгруппа $A = \{g^k\}$, порожденная элементом g , не будет, очевидно, правильной в G .

Далее, для связной группы Ли G рассмотрим ее центр $Z(G) = A$. Для такой абелевой подгруппы A вопрос о ее правильности рассматривался А. И. Мальцевым в [1]. В частности, он доказал, что если G разрешима, то $Z(G)$ – правильная абелева подгруппа (фактически в [1] приведено доказательство только для случая, когда G односвязна, но в примечании редактора к статье [1] в издании избранных трудов А. И. Мальцева показано, как провести доказательство и в неодносвязном случае). Если G – связная полупростая группа Ли, то ее центр содержится в картановской подгруппе H характеристической подгруппы группы G (см. [8], где характеристической подгруппой в полупростой группе Ли G названа максимальная компактно вложенная подгруппа Ли). Так как H связна, то получаем,

что и для полупростой группы Ли G ее центр будет правильной подгруппой. Пусть теперь G – произвольная связная группа Ли. Рассмотрим ее разложение Леви $G = S \cdot R$ (где R – радикал, а S – полупростая часть, т.е. подгруппа Леви) и естественный эпиморфизм $\pi: G \rightarrow S' = G/R$ на полупростую группу Ли S' (локально изоморфную S) с ядром R . Тогда $\pi(Z(G))$ – центральная подгруппа в S' , и потому, в силу вышесказанного, она содержится в связной абелевой подгруппе Ли H группы Ли S' . Положим $G^\# = \pi^{-1}(H)$, получим связную разрешимую подгруппу Ли в G , содержащую $Z(G)$. Ясно, что $Z(G) \subseteq Z(G^\#)$, а потому в силу правильности $Z(G^\#)$ в $G^\#$ (см. выше) и $Z(G)$ будет правильной подгруппой в $G^\#$. Но тогда $Z(G)$ будет правильной и в G , чем доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Центр $Z(G)$ произвольной связной группы Ли G является правильной подгруппой в G .*

Отметим, что в [1] было доказано более слабое утверждение: в $Z(G)$ имеется правильная подгруппа конечного индекса. Ниже будет показано, как из полученных в данной статье результатов можно получить еще один результат работы [1], касающийся таких подгрупп.

Если A – абелева подгруппа в G и A содержится в некоторой связной нильпотентной подгруппе, то отсюда, вообще говоря, не следует, что A правильна в G . Для иллюстрации рассмотрим группу Ли $F = N(3, \mathbb{R})$ – это группа унитарных вещественных матриц третьего порядка, а в ней решетку $\Gamma = N(3, \mathbb{Z})$ – дискретную подгруппу, состоящую из целочисленных унитарных матриц. Далее, рассмотрим $Z(F)$ (эта группа изоморфна $\mathbb{R}$) и ее пересечение с Γ , которое, как нетрудно проверить, изоморфно $\mathbb{Z}$. Положим теперь $G = F/Z(F) \cap \Gamma$, $A = \Gamma/Z(F) \cap \Gamma$. Легко убедиться, что группа A изоморфна $\mathbb{Z}^2$, в частности, она абелева. Группа Ли G является нильпотентной класса нильпотентности 2. При этом непосредственно проверяется, что любая максимальная связная абелева подгруппа Ли в G двумерна и изоморфна $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (где группа Ли S^1 изоморфна $SO(2)$). Но любая такая абелева подгруппа Ли не может содержать в качестве подгруппы A , так как A является дискретной подгруппой в G , изоморфной $\mathbb{Z}^2$. Итак, мы получаем в связной нильпотентной группе Ли G абелеву подгруппу, которая не содержится ни в какой связной абелевой подгруппе Ли группы G , т.е. A не является правильной подгруппой. Особенностью приведенного примера является то, что фигурирующая в нем связная нильпотентная группа Ли G не является линейной (т.е. не имеет точного конечномерного линейного представления). Следующее утверждение показывает, что эта особенность не случайна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть G – связная нильпотентная линейная группа Ли. Тогда произвольная абелева подгруппа в G является правильной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] доказано, что связная разрешимая линейная группа Ли разлагается в полупрямое произведение связной абелевой компактной подгруппы (тора) и односвязного нормального делителя. Поэтому для группы Ли G имеем разложение $G = T \cdot G_1$, где T – тор, а G_1 – односвязная нильпотентная группа Ли. Так как в нильпотентной связной группе Ли любая связная компактная подгруппа всегда центральна (а потому и нормальна) в G , то полупрямое произведение $T \cdot G_1$ в рассматриваемом случае является прямым. Итак, получаем разложение G в прямое произведение $T \times G_1$. Через $\pi: T \times G_1 \rightarrow G_1$ обозначим проекцию на прямой сомножитель. Положим $A_1 = \pi(A)$ – это абелева подгруппа в односвязной нильпотентной группе Ли G_1 . На группе Ли G_1 имеется, как известно, естественная структура вещественной алгебраической группы. Через $\langle \pi(A) \rangle$ обозначим алгебраическое замыкание подгруппы $\langle \pi(A) \rangle$ в алгебраической группе G_1 ; ясно, что $\langle \pi(A) \rangle$ является связной абелевой группой Ли. Положим $C = \pi^{-1}(\langle \pi(A) \rangle)$ – это будет связная абелева подгруппа Ли в G , содержащая исходную абелеву подгруппу A . Следовательно, подгруппа A будет правильной в G .

Совершенно аналогично предложению 2 доказывается, что если N – нильпотентная подгруппа в связной линейной нильпотентной группе Ли G , то N содержится в связной подгруппе Ли $\hat{N}$ группы Ли G , имеющей тот же класс нильпотентности, что и N .

Перейдем теперь к рассмотрению строгих оболочек для абелевых подгрупп. Если A – правильная абелева подгруппа в связной группе Ли G , то она имеет хотя бы одну строгую оболочку. Мы хотим получить описание всех таких оболочек для заданной подгруппы A . Прежде всего докажем, что все такие оболочки имеют одну и ту же размерность. Для этого мы сейчас рассмотрим строение произвольных (не обязательно связных) абелевых групп Ли.

Пусть P – некоторая абелева группа Ли, про которую мы лишь предположим, что ее группа связных компонент $\pi_0(P) = P/P_0$ является конечно порожденной. Такая группа Ли имеет разложение в прямое произведение $P = \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{Z}^t \times \Phi$, где $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}^r$ – r -мерный тор, Φ – некоторая конечная абелева группа. Обозначим через $n(\Phi)$ минимальное число образующих группы Φ (оно равно минимальному числу факторов в разложениях группы Φ в прямые суммы циклических подгрупп и может быть без труда выражено через примарные инварианты абелевой группы Φ). Положим теперь $\text{gd}(P) = r + s + t + n(\Phi)$ и назовем это число обобщенной размерностью абелевой группы Ли P . Отметим, что если P связна, то $\text{gd}(P) = \dim P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – абелева подгруппа Ли в связной группе Ли G , причем группа $\pi_0(A)$ конечно порождена. Тогда если A^* –

точная оболочка для A , то $\dim(A^*) = \text{gd}(A^*) = \text{gd}(A)$, в частности, $\dim(A^*)$ не зависит от выбора оболочки A^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Абелева связная группа Ли A^* имеет разложение в прямое произведение $A^* = T \times V$, где T – тор, а V – односвязная абелева группа Ли (она изоморфна $\mathbb{R}^k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$). Так как группа $\pi_0(A)$ конечно порождена, то имеется разложение $A = \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{Z}^t \times \Phi$, где $r, s, t \in \mathbb{N}$, а Φ – конечная абелева группа. Связная компонента единицы A_0 группы Ли A совпадает с $\mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^s$. Ясно, что тор $\mathbb{T}^r$ содержится в T . Профакторизовав по $\mathbb{T}^r$, мы можем считать, что $r = 0$. Из минимальности строгой оболочки A^* следует, что $s + t = \dim V$. Далее, группа Φ конечна, поэтому она содержится в T . Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – минимальное множество образующих группы Φ ($n = n(\Phi)$) и $T_1, T_2, \dots, T_n$ – такие одномерные подторы в T , что $\gamma_i \in T_i, i = 1, 2, \dots, n$. Из минимальности оболочки A^* следует, что T совпадает с произведением $T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n$ подторов T_i . Поэтому $n(\Phi) = n \geq \dim T$. С другой стороны, $\dim T \geq n(\Phi)$, ибо $\Phi \subset T$, поэтому получаем, что $\dim T = n(\Phi)$. В результате мы имеем равенства $\dim(A^*) = \dim T + \dim V = n(\Phi) + s + t$ (напомним, что мы свели доказательство к случаю, когда $r = 0$). В общем случае (при произвольном r) мы получаем в точности доказываемое равенство $\dim A^* = \text{gd}(A)$.

Напомним, что множество $\mathcal{E}(A, G)$ всех строгих оболочек абелевой подгруппы A в G можно отождествить с множеством соответствующих абелевых подалгебр Ли в $L(G)$. В силу предложения 3 все эти подалгебры имеют одинаковую размерность, а потому множество $\mathcal{E}(A, G)$ можно рассматривать как подмножество в многообразии Грассмана $G_{N,n}$, где $N = \dim G, n = \dim A^* = \text{gd}(A)$. Это вложение $\mathcal{E}(F, G)$ в $G_{N,n}$ индуцирует естественную топологию на множестве $\mathcal{E}(A, G)$ (мы рассматриваем на $G_{N,n}$ евклидову топологию). Подмножество $\mathcal{E}(A, G)$ не будет, вообще говоря, замкнуто в $G_{N,n}$. Например, возьмем $G = \text{SO}_2 \times \mathbb{R}$, где $\text{SO}_2 = \{\alpha \pmod{2\pi} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, и $A = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $L_k = \langle (\pi, 1/2k) \rangle$ – одномерная подалгебра в алгебре Ли $L(G)$, порожденная вектором $(\pi, 1/2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Образ вектора $2k \cdot (\pi, 1/2k)$ при экспоненциальном отображении является образующей подгруппы A (изоморфной $\mathbb{Z}$), поэтому $L_k \in \mathcal{E}(F, G)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. При $k \rightarrow \infty$ получаем в пределе одномерную подалгебру Ли вида $\text{so}_2 \times \{0\}$, которая, очевидно, не принадлежит $\mathcal{E}(F, G)$. Следовательно, в этом примере подмножество $\mathcal{E}(F, G)$ не замкнуто в $G_{2,1}$. Отметим, что $\mathcal{E}(A, G)$ локально замкнуто в $G_{N,n}$ (см. ниже).

Переходим к описанию всех связных компонент пространства $\mathcal{E}(A, G)$. Сначала мы покажем, что локально это пространство является линейно связным, т.е. две его близкие точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в малой окрестности этих точек. Нетрудно проверить, что

абелева подгруппа A будет правильной в G тогда и только тогда, когда правильной будет ее замыкание $\bar{A}$ в G . Замкнутая подгруппа в группе Ли всегда будет подгруппой Ли, поэтому при изучении правильных подгрупп часто можно ограничиться рассмотрением только подгрупп Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – связная группа Ли, а A – такая ее абелева подгруппа Ли, что $\pi_0(A)$ конечно порождена. Тогда пространство $\mathcal{E}(F, G)$ является локально линейно связным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим централизатор $Z_G(A_0)$ связной компоненты единицы A_0 подгруппы A . Если A^* – некоторая строгая оболочка подгруппы A , то $A^* \subseteq (Z_G(A_0))$, а потому для соответствующих алгебр Ли имеем включение $L(A^*) \subseteq L(Z_G(A_0))$. Так как оно имеет место для всех A^* , то можем заменить группу Ли G на ее связную подгруппу $(Z_G(A_0))_0$. Другими словами, мы можем предполагать, что A_0 содержится в $Z(G)$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – элементы из A , порождающие A вместе с A_0 . Рассмотрим следующие подмножества в многообразии Грассмана $G_{N,n}$:

$$X_i = \{L \mid L \text{ – абелева подалгебра в } L(G), \\ L \supset L(A) \text{ и } L \cap \exp^{-1}(a_i) \neq \emptyset\},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Как легко видеть, $\mathcal{E}(A, G) = \bigcap_i (X_i)$. Покажем, что подмножества X_i локально линейно связны. Для этого рассмотрим еще одно подмножество n -мерных подалгебр Ли в $G_{N,n}$:

$$\mathcal{A} = \{L \mid L \text{ – абелева подалгебра в } L(G), L \supset L(A)\}.$$

Записав условие принадлежности подалгебры L к множеству $\mathcal{A}$ в координатах, получим, что $\mathcal{A}$ является аналитическим подмножеством в $G_{N,n}$, а потому $\mathcal{A}$ локально линейно связно [9]. Так как экспоненциальное отображение непрерывно (на самом деле оно даже аналитично), то множества $\exp^{-1}(a_i)$ замкнуты в $L(G)$. Подмножество X_i содержится в $\mathcal{A}$ и выделяется в нем условиями $L \cap \exp^{-1}(a_i) \neq \emptyset$, а потому X_i – открытое подмножество в $\mathcal{A}$. Но тогда и пересечение всех подмножеств X_i тоже открыто в $\mathcal{A}$. Открытое подмножество локально линейно связного пространства $\mathcal{A}$ тоже будет локально линейно связным. Получаем, что пространство $\mathcal{E}(F, G)$, равное $\bigcap_i (X_i)$, будет локально линейно связным.

Из предложения 4 вытекает, в частности, что любая связная компонента пространства $\mathcal{E}(F, G)$ линейно связна (это будет вытекать и из доказанной ниже теоремы 1, в силу которой эти компоненты являются связными гладкими многообразиями). Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 4, можно показать, что каждая связная компонента пространства $\mathcal{E}(F, G)$ локально замкнута в $G_{N,n}$.

Введем теперь группу $\mathcal{C}(A, G) = Z_G(A)$ – централизатор подгруппы A в G . Очевидно, что $\mathcal{C}(F, G)$ совпадает с пересечением централизаторов $Z_G(a)$ всех элементов $a \in A$. Каждая подгруппа $Z_G(a)$ замкнута в G , поэтому и подгруппа $\mathcal{C}(A, G)$ тоже замкнута в G . Отметим, что $\mathcal{C}(\bar{A}, G) = \mathcal{C}(A, G)$, где $\bar{A}$ – замыкание подгруппы A в G . Группа Ли $\mathcal{C}(A, G)$ действует естественным образом на пространстве $\mathcal{E}(A, G)$ (рассматриваемом как множество подалгебр Ли L):

$$\mathcal{E}(A, G) \ni L \mapsto \text{Ad}_c(L) \in \mathcal{E}(A, G),$$

где $c \in \mathcal{C}(A, G)$, а $\text{Ad}_G: G \rightarrow \text{GL}(L(G))$ – присоединенное представление. Нетрудно убедиться, что это действие непрерывно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – такая абелева подгруппа Ли в связной группе Ли G , что группа связных компонент $\pi_0(A)$ конечно порождена (это условие автоматически выполнено, если подгруппа A замкнута в G). Тогда связные компоненты пространства $\mathcal{E}(A, G)$ строгих оболочек подгруппы A совпадают с орбитами естественного действия связной группы Ли $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(A, G)_0$ на $\mathcal{E}(A, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}_1$ – некоторая связная компонента пространства $\mathcal{E}(A, G)$. Сначала мы рассмотрим случай, когда группа Ли G нильпотентна.

Пусть A^* и A^{**} – две строгие оболочки подгруппы A , а L^* и L^{**} – соответствующие подалгебры Ли в $L(G)$, рассматриваемые как элементы пространства $\mathcal{E}(A, G)$. Ясно, что L^* и L^{**} содержатся в алгебре Ли $L(Z_G(A))$ централизатора подгруппы A в G . Мы можем заменить G на $(Z(A))_0$, тогда мы будем иметь включение $A \subseteq Z(G)$. Так как группа Ли по нашему предположению нильпотентна, то ее центр $Z(G)$ связан, а факторгруппа $G/Z(G)$ односвязна. Покажем, что A^* , A^{**} содержатся в $Z(G)$. Группа Ли $B = A^*/A^* \cap Z(G)$ является связной подгруппой в односвязной нильпотентной группе Ли $G/Z(G)$, а потому B тоже односвязна. Отсюда вытекает, что подгруппа $A^* \cap Z(G)$ связна. Однако $A^* \cap Z(G)$ содержит A (ибо $A \subseteq Z(G)$), поэтому $A^* \cap Z(G)$ является оболочкой подгруппы A , содержащейся в A^* . Так как A^* – строгая оболочка, то должно быть $A^* = A^* \cap Z(G)$, т.е. A^* содержится в $Z(G)$, аналогично и для A^{**} . Это означает, что группу Ли G можно считать совпадающей с ее центром, т.е. абелевой. Итак, мы будем считать, что G абелева. Для продолжения доказательства нам понадобится одно вспомогательное утверждение. Напомним, что топологическое пространство называется вполне несвязным, если любое его непустое связное подмножество состоит из одной точки.

ЛЕММА 1. Пусть G – связная абелева группа Ли, а A – некоторая подгруппа Ли в G . Тогда множество $\mathcal{E}(A, G)$ всех строгих оболочек

подгруппы A (рассматриваемое как подпространство в $G_{N,n}$) вполне несвязно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальное накрытие $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ для группы Ли G . Односвязная абелева группа Ли $\tilde{G}$ изоморфна $\mathbb{R}^n$ и может быть отождествлена с алгеброй Ли $L(G)$. Поэтому элементы пространства $\mathcal{E}(A, G)$ можно рассматривать как линейные подпространства в $\tilde{G}$, причем их образы при отображении π должны содержать A . Все указанные подпространства должны содержать подпространство, соответствующее подалгебре $L(A_0)$. Из минимальности строгих оболочек с учетом указанных выше ограничений на них с очевидностью вытекает, что их множество $\mathcal{E}(A, G)$ не более чем счетно. Топология на пространстве $\mathcal{E}(A, G)$ индуцирована его вложением в многообразие Грассмана, а потому она хаусдорфова. Утверждение леммы 1 является теперь следствием одного несложного результата из общей топологии.

ЛЕММА 2. *Если непустое связное и локально линейно связное хаусдорфово топологическое пространство X не более чем счетно, то оно состоит ровно из одной точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наше пространство X состоит более чем из одной точки. Тогда существует некоторая нетривиальная непрерывная кривая в X , т.е. некоторое такое непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$, что его образ $\text{Im}(f)$ состоит более, чем из одной точки. Так как X не более чем счетно, то таков и $\text{Im}(f)$. Пространство X хаусдорфово, поэтому любая его точка замкнута, а потому пространство $\text{Im}(f)$ оказывается нетривиальным объединением не более чем счетного числа замкнутых непересекающихся подмножеств. Однако $\text{Im}(f)$ является континуумом (т.е. компактным связным топологическим пространством) и для него разложение в такое объединение невозможно [10, с. 182], Полученное противоречие показывает, что X состоит из одной точки. Этим доказана лемма 2, а с нею и лемма 1.

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 любая связная компонента пространства $\mathcal{E}(A, G)$ в случае, если G абелева, будет состоять из одной точки. Так как действие группы Ли $\mathcal{G}_0$ в данном случае тривиально, то утверждение теоремы 1 доказано для случая, когда G абелева, а также, как следует из проведенных выше редукций, и когда группа G нильпотентна.

Переходим теперь к рассмотрению случая произвольной группы Ли G . Положим $G'_1 = (Z_G(A))_0$. Любая строгая оболочка A^* подгруппы A содержится в G' . Далее, положим $G_1 = G'_1/\bar{A}$, где $\bar{A}$ – замыкание подгруппы A – является центральной подгруппой в G' . Пусть $\lambda: G'_1 \rightarrow G_1$ – естественный эпиморфизм с ядром $\bar{A}$.

Рассмотрим теперь подгруппу $\bar{A} \cap A^*$ в A^* ; ясно, что она замкнута. В силу минимальности строгой оболочки эта подгруппа должна быть равномерна в A^* , т.е. факторпространство $A^*/A^* \cap A$ будет компактно. Поэтому $\lambda(A^*) = A^*/A^* \cap A$ является тором в G_1 . Любой тор в G_1 сопряжен какому-то подтору в некотором фиксированном максимальном торе $T \subseteq G_1$. Ясно, что множество всех подторов данного тора, имеющих одинаковую размерность, вполне несвязно (в топологии, введенной с помощью перехода к соответствующим подалгебрам Ли – см. выше). Поэтому любое связное множество подторов одинаковой размерности в связной группе Ли состоит из попарно сопряженных между собой подгрупп. Следовательно, существует такой элемент $g_1 \in G_1$, что $g_1^{-1} \cdot \lambda(A^*) \cdot g_1 \subseteq \lambda(A^{**})$. Отсюда вытекает, что существует такой $g'_1 \in G'_1$, что $A^* \subseteq (g'_1 \cdot A^{**} \cdot g'^{-1}_1) \cdot \bar{A}$. Подгруппа A^* содержится в $(Z_G(A))_0$. Ясно, что централизаторы A и $\bar{A}$ в G совпадают, поэтому связная группа Ли $((g'_1 \cdot A^{**} \cdot g'^{-1}_1) \cdot \bar{A})_0$ нильпотентна. Но тогда в силу рассмотренного выше специального случая (когда G нильпотентна) должно быть $g'_1 \cdot A^{**} \cdot g'^{-1}_1 = A^*$. Это означает, что строгая оболочка A^* содержится в орбите $\mathcal{C} \cdot A^{**}$ строгой оболочки A^{**} относительно естественного действия группы Ли $\mathcal{C}$. Отсюда вытекает, что связная компонента $\mathcal{E}_1$ пространства $\mathcal{E}(A, G)$ содержится в орбите $\mathcal{C}_0 \cdot A^{**}$ действия связной группы Ли $\mathcal{C}_0$. Но любая орбита группы $\mathcal{C}_0$ связна и лежит в пространстве $\mathcal{E}(A, G)$, откуда следует, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}_0 \cdot A^{**}$, чем теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь некоторые применения теоремы 1. Сначала выделим два ее частных случая.

Пусть G – некоторая связная группа Ли, рассмотрим ее центр $Z(G)$ (являющийся правильной подгруппой в силу предложения 1) и применим к нему теорему 1. Так как в этом случае группа Ли $\mathcal{C}_0$ совпадает с G , то получаем, что все строгие оболочки подгруппы $Z(G)$ сопряжены в G , т.е. пространство $\mathcal{E}(Z(G), G)$ состоит из одной точки. Это уже упоминавшийся выше результат из [1].

Далее, пусть теперь $A = \{g^k\}$ – циклическая подгруппа, порожденная некоторым элементом g из связной группы Ли G . В этом случае пространство $\mathcal{E}(A, G)$ состоит из однопараметрических подгрупп группы Ли G , проходящих через элемент g . В силу теоремы 1 любая связная компонента этого пространства состоит из всех тех однопараметрических подгрупп, которые сопряжены между собой с помощью элементов группы Ли $\mathcal{C}_0 = (Z_G(g))_0$ – связной компоненты единицы централизатора элемента g в G . Это утверждение впервые было доказано в [2].

Если T – некоторый фиксированный тор, то множество всех его подторов счетно (точнее, оно счетно, если $\dim T > 1$ и состоит из одного элемента в случае одномерного тора). Отсюда и из доказательства теоремы 1 легко получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A, G – как в теореме 1. Тогда множество орбит естественного действия группы Ли $\mathcal{C}(A, G)$ на пространстве $\mathcal{E}(A, G)$ не более чем счетно.

Теперь мы рассмотрим применения полученных выше результатов к изучению вполне интегрируемых дифференциальных уравнений на торах $\mathbb{T}^n$.

Рассмотрим на торе $\mathbb{T}^n$ дифференциальное уравнение вида $Df = \alpha$, где $f: \mathbb{T}^n \rightarrow G$ – неизвестная гладкая функция, G – некоторая группа Ли, α – это 1-форма на $\mathbb{T}^n$ со значениями в алгебре Ли $L(G)$ группы Ли G , а дифференциальный оператор D имеет вид (см. [3]):

$$Df(u) = dR_{f(x)}^{-1}(df)_x(u), \quad \text{где } u \in T_x(\mathbb{T}^n), \text{ а } R - \text{правый сдвиг на } G.$$

Условие полной интегрируемости для уравнения $Df = \alpha$ имеет вид $d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$. Если группа Ли G линейна, то в координатах рассматриваемое уравнение записывается в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, а указанное условие полной интегрируемости превращается в классическое условие Фробениуса. При изучении уравнения $Df = \alpha$ важную роль играет гомоморфизм монодромии $\mu: \pi_1(\mathbb{T}^n) \rightarrow G$ (см. [3]). Здесь $\pi_1(\mathbb{T}^n)$ – фундаментальная группа тора $\mathbb{T}^n$, она изоморфна $\mathbb{Z}^n$.

Особый интерес среди уравнений на торе $\mathbb{T}^n$ представляют уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. такие, для которых 1-форма имеет постоянные ($\equiv$ инвариантные относительно действия $\mathbb{T}^n$ на себе сдвигами) коэффициенты. В [3] доказано, что уравнение $Df = \alpha$ на торе $\mathbb{T}^n$ может быть с помощью замены неизвестной функции вида $f_1 = a \cdot f$ (где $a: \mathbb{T}^n \rightarrow G$ – некоторое гладкое отображение) приведено к уравнению с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда гомоморфизм монодромии μ может быть распространен до гомоморфизма $\tilde{\mu}: \mathbb{R}^n \rightarrow G$, здесь группа $\pi_1(\mathbb{T}^n)$ отождествляется с решеткой $\mathbb{Z}^n$, стандартным образом вложенной в $\mathbb{R}^n$. Наличие такого распространения для μ эквивалентно существованию в G связной абелевой подгруппы, содержащей абелеву подгруппу $A = \mu(\mathbb{Z}^n)$. Другими словами, приведение уравнения $Df = \alpha$ на торе $\mathbb{T}^n$ к уравнению с постоянными коэффициентами возможно тогда и только тогда, когда абелева подгруппа $\mu(\mathbb{Z}^n)$ является правильной подгруппой группы Ли G . Мы не будем здесь останавливаться на применении известных достаточных условий правильности абелевых подгрупп (см. [5], [6], [7]) к изучению уравнений на торе и рассмотрим только вопрос об описании всевозможных распространений $\tilde{\mu}$ (при условии, что хотя бы одно такое распространение существует).

Для заданного гомоморфизма $\mu: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ рассмотрим множество $\mathcal{E}_\mu$ всех его распространений $\tilde{\mu}: \mathbb{R}^n \rightarrow G$. Для двух гомоморфизмов Φ_1 и Φ_2 группы Ли $\mathbb{R}^n$ в G будем говорить, что Φ_1 меньше, чем Φ_2 (и обозначать это $\Phi_1 \leq \Phi_2$), если связная абелева подгруппа Ли $\text{Im}(\Phi_1)$ содержится в $\text{Im}(\Phi_2)$. Тем самым на $\mathcal{E}_\mu$ получаем отношение частичного порядка. Гомоморфизмы Φ , минимальные относительно этого отношения $\leq$, будем называть минимальными распространениями. Каждое распространение Φ гомоморфизма монодромии μ задает приведение исходного вполне интегрируемого уравнения на торе к уравнению с постоянными коэффициентами, а те из них, которые соответствуют минимальным Φ , будем называть минимальными приведениями. Если два гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 сопряжены относительно присоединенного действия группы Ли G (которую мы будем предполагать связной), то они будут гомотопны в $\mathcal{E}_\mu$. Из теоремы 1 и следствия 1 с помощью изложенных выше соображений получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $Df = \alpha$ – вполне интегрируемое дифференциальное уравнение на торе $\mathbb{T}^n$ со значениями в связной группе Ли G . Тогда множество всех минимальных приведений его к уравнению с постоянными коэффициентами, рассматриваемых с точностью до гомотопии, не более чем счетно.*

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Поступило
26.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. К теории групп Ли в целом // Матем. сб. 1945. Т. 16. № 2. С. 163–189.
- [2] Nono T. Sur l'application exponentielle dans les groupes de Lie // J. Sci. Hiroshima Univ. 1960. V. 23. № 3. P. 311–324.
- [3] Онищик А. Л. О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах // Матем. заметки. 1970. Т. 9. № 4. С. 365–373.
- [4] Горбацевич В. В. Обобщенная теорема Ляпунова на многообразиях Мальцева // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 2. С. 163–177.
- [5] Borel A. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes // Tohoku Math. J. 1961. V. 13. № 2. P. 216–240.
- [6] Steinberg R. Torsion in reductive groups // Adv. Math. 1975. V. 15. № 1. P. 63–92.
- [7] Спрингер Т., Стейнберг Р. Классы сопряженных элементов // Сб. статей “Семинар по алгебраическим группам”. М.: Мир, 1973. С. 162–262.
- [8] Сирота А. И., Солодовников А. С. Некомпактные полупростые группы Ли // УМН. 1963. Т. 18. № 3. С. 87–144.
- [9] Koopman B., Broun A. On the covering of analytic loci by complexes // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. V. 34. № 2. P. 231–251.
- [10] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1966.