Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 211–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 05:20:38

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТАХ ТРУБЧАТЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^2$

А. В. Лобода

Введение. Данная статья посвящена изучению младших инвариантов трубчатых вещественно-аналитических гиперповерхностей двумерного комплексного пространства. Вопрос об инвариантах естественно связывается с задачей описания вещественных гиперповерхностей $\mathbb{C}^2$, однородных относительно голоморфных преобразований.

Поверхность M в пространстве $\mathbb{C}^n$ мы называем однородной, если для любых двух ее точек существует биголоморфное отображение, определенное в некоторой окрестности первой точки, переводящее поверхность M в себя, а выбранные точки — одну в другую.

Помимо очевидных примеров вещественных гиперповерхностей и сфер имеется достаточно большой класс невырожденных в смысле Леви несферических однородных гиперповерхностей. Например, всякая трубчатая поверхность, или, короче, трубка

$$M = \gamma + i\mathbb{R}_{(y,v)}^2 \quad (1)$$

над аффинно-однородной плоской кривой $\gamma \subset \mathbb{R}_{(x,u)}^2$ является, как легко понять, однородной относительно голоморфных преобразований пространства $\mathbb{C}_{(z,w)}^2$ с координатами $z = x + iy$, $w = u + iv$. (Точно так же трубки над аффинно-однородными гиперповерхностями $\mathbb{R}^n$ однородны относительно голоморфных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$.)

В рамках аффинной дифференциальной геометрии (см. [1], [2]) полностью описаны однородные аналитические кривые. Локально каждая из них является аффинным образом одной из следующих кривых:

- 1) график степенной функции $u = x^s$ ($-1 \leq s < 1$);
  - 2) график функции $u = \ln x$;
  - 3) график функции $u = x \ln x$;
  - 4) логарифмическая спираль $r = e^{a\varphi}$ ($0 \leq a < \infty$).
- (2)

Несложно проверить, что для трубчатой поверхности (1) над аналитической кривой γ , заданной уравнением $u = \alpha(x)$, вырождение по Леви равносильно равенству $\alpha''(x) = 0$. Это означает, что все перечисленные в (2)

кривые, кроме прямой из 1), порождают невырожденные трубки. Везде ниже без дополнительных оговорок считаем, что $\alpha''(x) \neq 0$.

Учитывая работу [3], интересно сравнить перечень (2) со списком сферических трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$. Основание каждой такой трубки есть аффинный образ одной из кривых:

- a) $u = x^2$;   b) $u = e^x$;
c) $u = \ln(\sin x)$ d) $u = \ln(\operatorname{sh} x)$.

Ясно тогда, что все кривые (2), кроме $u = \ln x$, $u = x^0$, $u = x^{1/2}$ являются основаниями однородных невырожденных несферических трубок. В то же время естественно поставить следующие вопросы:

1. Существуют ли однородные гиперповерхности, голоморфно не эквивалентные трубкам?
2. Существуют ли несферические однородные трубки над аффинно неоднородными кривыми?
3. Все ли несферические трубки, порождаемые кривыми из списка (2), являются разными (т.е. попарно голоморфно неэквивалентными) гиперповерхностями?

Отметим еще в связи со вторым вопросом, что однородная несферическая гиперповерхность

$$M = \{ \operatorname{Im} z_3 = (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + |z_1|^4 \} \subset \mathbb{C}^3,$$

построенная Винкельманном, голоморфно эквивалентна трубке. Основание этой трубки, двумерная гиперповерхность

$$\Gamma = \{ x_3 = (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 + x_2)^4 \}$$

в $\mathbb{R}^3$, не является аффинно-однородной поверхностью.

В статье вычисляются три инварианта трубчатой неомбилической невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$. Как представляется, эти инварианты должны помочь в решении двух первых сформулированных выше вопросов. Третий из этих вопросов обсуждается в последнем пункте статьи, где на него дается положительный ответ.

1. Мозеровская нормальная форма уравнения трубчатой гиперповерхности. Основой при построении обсуждаемых инвариантов является нормальная форма Мозера [4] для уравнения трубчатой поверхности (1) над плоской аналитической кривой γ . Переход от произвольного уравнения такой кривой к нормальному мы осуществим в несколько шагов.

Пусть вблизи одной из своих точек кривая γ задана уравнением

$$u = \alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (3)$$

Ясно, что уравнение (3) является одновременно и уравнением обсуждаемой трубчатой поверхности $M \subset \mathbb{C}_{(z,w)}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Аффинным преобразованием плоскости $\mathbb{R}_{(x,u)}^2$ можно привести уравнение (3) к виду*

$$u = 2x^2 + \lambda_4 x^4 + \lambda_5 x^5 + \lambda_6 x^6 + \dots \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заменой $x^* = x - x_0$, $u^* = u - u_0 - \alpha'(x_0)(x - x_0)$ приводим исходное уравнение к виду

$$u = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

Далее, растяжением $u^* = \frac{2}{\alpha_2} u$ коэффициент α_2 последнего уравнения можно сделать равным двум. Наконец, уравнение

$$u = 2x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots$$

приводится к требуемому виду заменой

$$x^* = x + \frac{\beta_3}{8} u, \quad u^* = u.$$

Теперь от вещественной формы (4) уравнения поверхности M мы перейдем к комплексной. Замена координат

$$z^* = z, \quad w^* = i(w + z^2)$$

переводит уравнение (4) в

$$v = |z|^2 + \sum_{k=4}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^k. \quad (5)$$

Традиционными для мозеровской нормализации преобразованиями можно избавиться в последнем уравнении от слагаемых типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ по переменным $z, \bar{z}$. Для этого сначала, не изменяя z , положим

$$w^* = w - i \sum_{k=4}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{z}{2} \right)^k.$$

Вместо (5) тогда получим

$$v = |z|^2 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2^k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l z^k z^{k-l} \bar{z}^l \right).$$

А затем, не изменяя w , полагаем

$$z^* = z + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k+1)}{2^{k+1}} \lambda_{k+1} z^k.$$

В ходе описанных преобразований уравнение поверхности примет вид

$$v = |z|^2 + \sum_{k,l \geq 2} a_{kl} z^k \bar{z}^l. \quad (6)$$

Несложно видеть, что коэффициенты a_{kl} этого уравнения полиномиально зависят от $\lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_{k+l}$. Аналогично, коэффициенты λ_k являются полиномами относительно младших производных функции $\alpha(x)$, определяющей кривую γ . Далее нам потребуется более точная информация об этих полиномах. Для удобства формулировок введем функцию $\mu(t) = \alpha'''(t)/\alpha''(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для коэффициентов уравнения (6) справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } a_{22} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu^2 \right); \\
 a_{32} &= \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{30} \left(\mu''' - 2\mu''\mu + \frac{4}{9} \mu^3 \right); \\
 a_{42} &= \frac{15}{64} \cdot \frac{4}{6!} \{ \mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2 \}; \\
 \text{b) } a_{52} &= \frac{21}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ \mu^{(4)} - \frac{13}{3} \mu''' \mu \right\} + \tilde{a}_{52}(\mu, \mu', \mu''); \\
 a_{43} &= \frac{35}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ \mu^{(4)} - \frac{13}{3} \mu''' \mu \right\} + \tilde{a}_{43}(\mu, \mu', \mu''); \\
 a_{62} &= \frac{28}{256} \cdot \frac{4}{8!} \left\{ \mu^{(5)} - 6\mu^{(4)}\mu - 11\mu''' \mu' + \frac{43}{3} \mu''' \mu^2 \right\} + \tilde{a}_{62}(\mu, \mu', \mu'').
 \end{aligned}$$

В формулах для коэффициентов группы b) выделяются “главные” части и слагаемые, зависящие от младших производных функции.

Уравнение (6) является основой для окончательной нормализации. Согласно [4] существуют голоморфные отображения, приводящие уравнение произвольной Леви-невыврожденной гиперповерхности к виду

$$v = |z|^2 + \sum_{k,l,m} h_{klm} z^k \bar{z}^l u^m, \quad (7)$$

где степени k, l по переменным $z, \bar{z}$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\min(k, l) \geq 2; \quad k + l \geq 6; \quad (k, l) \neq (3, 3).$$

Из 5-параметрического семейства отображений Мозера $\varphi_{(C,a,r)}$ выберем нормализацию с тривиальным набором параметров $C = 1, a = 0, r = 0$. Это означает, что весовое разложение нашего отображения имеет вид

$$\begin{cases} z^* = z + f(z, w) = z + f_3 + f_4 + \dots, \\ w^* = w + g(z, w) = w + g_4 + g_5 + \dots, \end{cases} \quad (8)$$

где $r = \operatorname{Re}(\partial^2 g_4 / \partial w^2) = 0$.

Здесь, как и обычно в подобных обсуждениях, весом отдельного монома $z^k w^l$ называется сумма $(k + 2l)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При нормализации уравнения (6) отображением (8) выполняется равенство $h_{420} = a_{42}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определения коэффициентов h_{klm} нормального уравнения (7) мы рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\{i(g_4 + g_5 + g_6 + \cdots) + 2(f_3 + f_4 + \cdots)\bar{z} \\ & \quad + (f_3 + f_4 + \cdots)\overline{(f_3 + f_4 + \cdots)}\}\Big|_{v=|z|^2+F(z,\bar{z})} \\ & = (F_4 + F_5 + \cdots)(z, \bar{z}) - (F_6^* + F_7^* + \cdots)(z + f, \overline{z + f}, u + \operatorname{Re} g). \end{aligned} \quad (9)$$

Оно означает, что исходное уравнение

$$v = |z|^2 + F(z, \bar{z})$$

поверхности, т.е. (6) преобразуется отображением (8) в новое уравнение

$$v = |z|^2 + F^*(z, \bar{z}, u)$$

вида (7).

Компонента веса 4 основного тождества (9) имеет вид

$$\operatorname{Re}\{ig_4 + 2f_3\bar{z}\}\Big|_{v=|z|^2} = a_{22}|z|^4.$$

Легко видеть, что это равенство выполняется при

$$f_3 = -\frac{i}{2}a_{22}zw; \quad g_4 = 0. \quad (10)$$

Аналогично, из рассмотрения компоненты веса 5 основного тождества получаем

$$f_4 = -ia_{32}z^2w - \frac{1}{4}a_{32}w^2; \quad g_5 = -\frac{i}{2}a_{32}zw^2. \quad (11)$$

С учетом сказанного имеем в весе 6

$$\operatorname{Re}\{ig_6 + 2f_5\bar{z}\}\Big|_{v=|z|^2} = F_6(z, \bar{z}) - F_6^*(z, \bar{z}, u) - \{f_3\bar{f}_3\}\Big|_{v=|z|^2}.$$

Заметим, что в правой части последнего равенства нет мономов $z^6, z^4u, z^5\bar{z}, z^2u^2, z^3\bar{z}u$. Это означает, что $(4, 2, 0)$ – составляющая тождества (9) имеет вид

$$0 = a_{42} - h_{420}.$$

А для компонент f_5 и g_6 получаем представления

$$f_5 = \left(a_{22}^2 - \frac{3}{4}a_{33}\right)zw^2; \quad g_6 = \left(\frac{3}{4}a_{22}^2 - \frac{1}{2}a_{33}\right)w^3. \quad (12)$$

Предложение 3 доказано.

Для нас очень важным является следующее свойство h_{420} .

ЛЕММА. Если для любой точки кривой γ коэффициент h_{420} нормального уравнения трубки M над γ равен нулю, то поверхность M сферична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 имеем

$$h_{420} = \frac{15}{64} \cdot \frac{4}{6!} \{ \mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2 \}.$$

Равенство нулю этого выражения в каждой точке кривой $u = \alpha(x)$ означает, что функция $\mu(t) = \alpha'''(t)/\alpha''(t)$ является решением ОДУ

$$\mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2 = 0. \quad (13)$$

Ясно, что для всех сферических трубок а)–д) из введения, равенство (13) выполняется. Ссылаясь на теорему единственности, несложно проверить, что других решений это уравнение не допускает.

Уравнение (13) является, таким образом, критерием сферичности трубчатой поверхности. Однако, оно играет важную роль и в несферическом случае. Для иллюстрации этого рассмотрим оператор

$$Q(\mu) = \mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2$$

из левой части (13). Через $Q_k(\mu)$ обозначим $(d^k/dt^k)(Q(\mu))$, полагая для удобства $Q_0 = Q$.

ТЕОРЕМА 1. Для коэффициентов нормального уравнения (7) трубчатой поверхности на аналитической кривой (3) имеют место формулы:

$$\begin{aligned} h_{520} &= \frac{21}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ Q_1(\mu) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) \right\}; \\ h_{430} &= \frac{35}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ Q_1(\mu) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) \right\}; \\ h_{620} &= \frac{28}{256} \cdot \frac{4}{8!} \left\{ Q_2(\mu) - 3\mu Q_1(\mu) - 3\mu'Q(\mu) + \frac{10}{3}\mu^2 Q(\mu) \right\}; \\ h_{421} &= -\frac{15i}{128 \cdot 6!} \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu^2 \right) Q(\mu). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы получим формулы для “главных” частей интересующих нас коэффициентов. Рассмотрим для этого компоненту веса 7 тождества (9). Напомним, что разложение (6), т.е. $v = |z|^2 + F_4 + F_5 + \dots$ имеет скачок в 2 единицы веса. В силу этого в формировании указанной компоненты участвуют из младших составляющих отображения (8) лишь f_4 и g_5 . Тогда, ссылаясь на (11), несложно проверить, что

$$\begin{aligned} h_{520} &= a_{52} + \eta_1 a_{22} a_{32}, \\ h_{430} &= a_{43} + \eta_2 a_{22} a_{32}, \end{aligned}$$

где η_1, η_2 – некоторые абсолютные константы.

Рассмотрим теперь компоненту веса 8 тождества (9). В ее формировании помимо $\text{Re}\{ig_8 + 2f_7\bar{z}\}$ и $(F_8 - F_8^*)$ участвуют восемь других слагаемых:

$$\begin{aligned} &\text{Re}(ig_5), \quad \text{Re}(ig_6), \quad \text{Re}(f_3\bar{z}), \quad \text{Re}(f_4\bar{z}), \\ &\text{Re}(f_5\bar{z}), \quad \text{Re}(f_5f_3), \quad (f_4\bar{f}_4), \quad F_6^*. \end{aligned}$$

Из (10), (11), (12) следует, что эти выражения не могут быть в восьмом весе слагаемых $z^k\bar{z}^l u^m$ с большой разностью $(k - l)$ и малой степенью m . Это означает, в частности, что $h_{620} - a_{62} = 0$, а разложения f_7 и g_8 являются неполными:

$$f_7 = Cz^3w^2 + Dzw^3; \quad g_8 = Sz^2w^3 + Tw^4.$$

Для определения коэффициента h_{421} рассмотрим $(2, 0, 3)$ -, $(3, 1, 2)$ - и $(4, 2, 1)$ -составляющие тождества (11). Из восьми выделенных ранее слагаемых в этих составляющих задействованы лишь $\text{Re}(ig_5)$, $\text{Re}(f_4\bar{z})$, $(f_4\bar{f}_4)$, F_6^* . При этом первые три выражения зависят лишь от a_{32} , и только F_6^* содержит интересующие нас слагаемые. Конкретно,

$$F_6^*(z + f, \overline{z + f}) = a_{42}\{(z + f)^4\overline{(z + f)^2} + \overline{(z + f)^4}(z + f)^2\}$$

содержит

$$\begin{aligned} &a_{42}2\text{Re}\{4z^3\bar{z}^2f_3 + 2z^4\bar{z}\bar{f}_3\} \\ &= 2a_{42}a_{22}\text{Re}\left\{4z^3\bar{z}^2\left(-\frac{i}{2}\right)z(u + i|z|^2) + 2z^4\overline{(-i/2)z(u + i|z|^2)}\right\} \\ &= 2a_{42}a_{22}\text{Re}\{-iz^4\bar{z}^2 + 3z^5\bar{z}^3\}. \end{aligned}$$

Тогда система $(2, 0, 3)$ -, $(3, 1, 2)$ - и $(4, 2, 1)$ -соотношений примет вид

$$\begin{cases} is = b_1, \\ -3S + 2C = b_2, \\ -3iS + 4iC + h_{421} = -2ia_{42}a_{22} + b_3, \end{cases}$$

где через b_1, b_2, b_3 обозначены выражения, зависящие от a_{32} . Отсюда мы получаем последнюю интересующую нас формулу

$$h_{421} = -2ia_{42}a_{22} + \tilde{h}_{421}(\mu, \mu', \mu'').$$

Теперь, опираясь на “главные” части наших коэффициентов, мы получим для них точные формулы. Согласно предварительной формуле и лемме 1, разность

$$h_{520} = -\frac{21}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ \mu^{(4)} - \frac{13}{3} \mu''' \mu \right\} = \Phi(\mu, \mu', \mu'')$$

является многочленом относительно функции $\mu(t)$ и двух ее младших производных. Кроме того,

$$Q_1(\mu) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) = (\mu^{(4)} - 3\mu'''\mu) - \frac{4}{3}\mu\mu'' + \Phi_1(\mu, \mu', \mu''),$$

так что разность

$$h_{520} - \frac{21}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ Q_1(\mu) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) \right\} = \Phi_2(\mu, \mu', \mu'') \quad (14)$$

также является многочленом аналогичного вида.

Заметим, что равенство (14) справедливо для произвольной трубчатой поверхности M и, значит, для произвольной функции $\mu(t)$. В частности, оно верно для функций $\mu(t)$, соответствующих сферическим трубкам.

Но для сферических поверхностей все коэффициенты h_{klm} , начиная с h_{420} , тождественно равны нулю. Следовательно, для всех решений уравнения (13) левая часть равенства (14) тождественно равна нулю. Но тогда и правая часть (14), т.е. многочлен Φ_2 тождественно равен нулю на всех решениях уравнения третьего порядка $Q(\mu) = 0$.

В силу различия порядков обсуждаемых дифференциальных уравнений это может быть верным только для тождественно нулевого многочлена Φ_2 . Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Аналогично,

$$h_{430} - \frac{35}{128} \cdot \frac{4}{7!} \left\{ Q_1(\mu) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) \right\}$$

является многочленом лишь относительно μ, μ', μ'' и, следовательно, равняется нулю.

Точно так же

$$h_{421} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} i \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu^2 \right) h_{420} + \Phi_3(\mu, \mu', \mu''),$$

что в силу тех же причин означает справедливость равенства

$$h_{421} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{64} \cdot \frac{4}{6!} i \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu^2 \right) Q(\mu).$$

Наконец, подбирая коэффициенты, несложно проверить, что сумма

$$\frac{28}{256} \cdot \frac{4}{8!} \left\{ Q_2(\mu) - 3\mu Q_1(\mu) - 3\mu' Q(\mu) + \frac{10}{3}\mu^2 Q(\mu) \right\}$$

своей главной частью совпадает с выражением для a_{62} , т.е. для h_{620} . Теорема 1 доказана.

Преобразования, проведенные выше, позволяют получить

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты нормального уравнения (7) связаны с уравнением (4) формулами:

$$\begin{aligned} h_{420} &= \frac{15}{64} \left(\lambda_6 - \frac{4}{5} \lambda_4^2 \right), \\ h_{520} &= \frac{21}{128} \left(\lambda_7 - \frac{15}{7} \lambda_4 \lambda_5 \right), \\ h_{430} &= \frac{35}{128} \left(\lambda_7 - \frac{15}{7} \lambda_4 \lambda_5 \right), \\ h_{620} &= \frac{28}{256} \left(\lambda_8 - \frac{39}{14} \lambda_6 \lambda_4 - \frac{75}{56} \lambda_5^2 + \frac{3}{2} \lambda_4^3 \right), \\ h_{421} &= -\frac{45}{256} i \lambda_4 \left(\lambda_6 - \frac{4}{5} \lambda_4^2 \right). \end{aligned}$$

2. Инварианты неомбилических трубок. В силу неоднозначности приведения уравнения к нормальной форме вычисленные нами коэффициенты h_{klm} могут изменяться при переходе к другим нормальным уравнениям. Например, для неомбилической поверхности M коэффициент $h_{420} \neq 0$ можно сделать равным единице за счет замены координат

$$z = \varepsilon z^*, \quad w = |\varepsilon|^2 w^*. \quad (15)$$

Если h_{420} – вещественное число, как в нашем случае трубчатых поверхностей, то в качестве ε достаточно взять $|h_{420}|^{-1/4}$ при $h_{420} > 0$ или $(-i)|h_{420}|^{-1/4}$ при $h_{420} < 0$.

Произвольный коэффициент h_{klm} при такой замене перейдет в

$$h_{klm}^{(1)} = h_{klm} \varepsilon^{k-1} \bar{\varepsilon}^{l-1} |\varepsilon|^{2m}. \quad (16)$$

Будем теперь рассматривать вместо исходного нормального уравнения (7) трубчатой поверхности новое уравнение с коэффициентами (16). Применим к такой поверхности отображение $\varphi_{(1,a,r)}$, сохраняющее нормальный вид ее уравнения и имеющее нетривиальные параметры a, r . Полагая, например,

$$a = -\frac{1}{2i} h_{430}^{(1)}$$

в новом уравнении, согласно [4], мы уничтожим коэффициент $h_{430}^{(2)}$. Коэффициент $h_{520}^{(2)}$ при этом оказывается равным

$$h_{520}^{(1)} + 2\bar{h}_{430}^{(1)},$$

а его квадрат является инвариантом поверхности. Будем называть этот инвариант первой голоморфной кривизной трубчатой поверхности M (или ее основания γ).

Еще два инварианта, вторая голоморфная кривизна и голоморфная дуга такой кривой, строятся ниже в теореме 2. Здесь же мы обсудим свойства первой кривизны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Первая голоморфная кривизна неомбилической трубчатой поверхности (4) выражается через коэффициенты ее нормализованного уравнения по формуле*

$$\kappa_1 = \frac{(h_{520})^2}{|h_{420}|^{5/2}} \operatorname{sgn}(h_{420}).$$

Действительно, в уравнении (8), полученном нормализацией исходного уравнения (4), коэффициенты h_{420} , h_{520} , h_{430} вещественны. Тогда в зависимости от знака h_{420} коэффициент $h_{520}^{(2)}$ равен $(h_{520} + 2h_{430})/|h_{420}|^{5/4}$ либо $i(h_{520} + 2h_{430})/|h_{420}|^{5/4}$. В силу пропорциональности h_{520} и h_{430} с коэффициентом $21/35$ числитель $h_{520}^{(2)}$ можно упростить. Возведение в квадрат в случае отрицательного h_{420} дает дополнительный множитель $(i)^2 = -1 = \operatorname{sgn}(h_{420})$.

СЛЕДСТВИЕ. *В случае ненулевой кривизны κ_1 инвариантом неомбилической трубчатой поверхности является знак коэффициента h_{420} . Процедура нормализации, описанная в п. 1, сохраняет его вне зависимости от исходного уравнения (3) основания трубки.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим $\operatorname{sgn}(h_{420})$ через τ . Тогда для любой комплекснозначной функции $\eta(\tau)$ и любой неомбилической трубчатой поверхности M ее инвариантом является $\eta(\tau)\kappa_1(M)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для трубчатой неомбилической гиперповерхности M над аналитической кривой (4) выражения*

$$\kappa_2 = \frac{h_{620}}{|h_{420}|^{3/2}} \quad \text{и} \quad \kappa_0 = \frac{\lambda_4}{|h_{420}|^{1/2}}$$

являются ее инвариантами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\varphi_{(1,a,r)}$, уничтожающее коэффициент h_{430} в нормальном уравнении M , действует и на другие составляющие этого уравнения. Помимо [4] возможные изменения коэффициентов нормального уравнения достаточно подробно рассмотрены в [5] и [6]. Мы воспользуемся некоторыми фактами из этих работ.

Пусть, например,

$$v = |z|^2 + F_6 + F_7 + \dots \quad (17)$$

– исходное нормальное уравнение поверхности M , а $\varphi_{(1,a,r)}$ – отображение, сохраняющее нормальный вид M . Тогда разность $(F_8 - F_8^*)$ новых и старых составляющих веса 8 является суммой слагаемых трех типов.

Первая группа слагаемых квадратично зависит от параметра a и линейно от коэффициентов F_6 . Вторая группа линейна относительно a и коэффициентов F_7 . Наконец, третья группа слагаемых линейно зависит от параметра r и от коэффициентов F_6 .

В случае трубчатой поверхности, подвергнутой нормировке (15), эта общая картина существенно упрощается. Коэффициентом F_6 здесь является $h_{420}^{(1)} = 1$, а коэффициенты веса 7 уравнения (17) связаны пропорциональностью

$$h_{430}^{(1)} = \frac{35}{21} \operatorname{sgn}(h_{420}) h_{520}^{(1)}.$$

Кроме того,

$$a = -\frac{1}{2i} h_{430}^{(1)} = \left(\frac{5}{6i} \right) \operatorname{sgn}(h_{420}) h_{520}^{(1)}.$$

Поэтому получаем для трубчатой поверхности

$$F_8^* = F_8 + (h_{520}^{(1)})^2 G_1 + r G_2, \quad (18)$$

где G_1 и G_2 – некоторые многочлены веса 8 от переменных $z, \bar{z}, u$. При этом многочлен G_1 зависит, вообще говоря, от $\tau = \operatorname{sgn}(h_{420})$, а коэффициенты G_2 – абсолютные константы.

Согласно [4] для любой неомбилической поверхности параметр r можно выбрать так, чтобы вещественная часть $(4, 2, 1)$ -компоненты многочлена F_8^* стала равна нулю. Это означает, что $(4, 2, 1)$ -коэффициент многочлена G_2 из (18) имеет ненулевую вещественную часть. А так как $\operatorname{Re}(h_{421}^{(1)}) = 0$, это означает, что выбираемый параметр r пропорционален $(h_{520}^{(1)})^2 = \varkappa_1$.

Остальные коэффициенты F_8^* теперь являются инвариантами поверхности. В частности, это относится к $h_{620}^{(2)}$ и к мнимой части $h_{421}^{(2)}$. Например, $h_{620}^{(2)}$ в силу того же равенства (18) получается из $h_{620}^{(1)} = h_{620}/|h_{420}|^{3/2}$ добавлением к нему выражения вида $\eta(\tau)\varkappa_1(M)$. Выше отмечалась инвариантность последнего. Следовательно, инвариантом поверхности M является и $\varkappa_2 = h_{620}/|h_{420}|^{3/2}$. Точно так же в силу (18) инвариантом M является

$$\operatorname{Im} h_{421}^{(2)} = \operatorname{Im} \{ h_{421}^{(1)} + \eta(\tau)\varkappa_1(M) \},$$

а значит, и $\operatorname{Im}(h_{421}^{(1)})$, равная с точностью до абсолютной константы

$$\frac{\lambda_4 h_{420}}{|h_{420}|^{3/2}} \operatorname{sgn}(h_{420}) = \frac{\lambda_4}{|h_{420}|^{1/2}}.$$

Теорема 2 доказана.

Построенные инварианты можно выразить через коэффициенты уравнения кривой (4) без привлечения уравнения трубки (8) над этой кривой.

СЛЕДСТВИЕ. Голоморфными инвариантами неомбилической трубчатой гиперповерхности над аналитической кривой (4) являются

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= \frac{\lambda_4}{|\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2|^{1/2}}; \\ \kappa_1 &= \frac{(\lambda_7 - \frac{15}{7}\lambda_4\lambda_5)^2}{|\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2|^{5/2}} \operatorname{sgn}\left(\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2\right); \\ \kappa_2 &= \frac{\lambda_8 - \frac{39}{16}\lambda_6\lambda_4 - \frac{75}{56}\lambda_5^2 + \frac{3}{2}\lambda_4^3}{|\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2|^{3/2}}.\end{aligned}$$

Построение остальных инвариантов веса 8 связано с дополнительными вычислительными трудностями. Вместе с тем уже пары инвариантов (κ_0, κ_1) хватает для ответа на третий из вопросов, сформулированных во введении.

ТЕОРЕМА 3. Все несферические невырожденные гиперповерхности над однородными кривыми (2) голоморфно не эквивалентны друг другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала семейство кривых вида $u = x^s$ с показателем s : $-1 \leq s < 1$. Для перехода к трубчатым поверхностям над этими кривыми вычислим функцию $\mu(t) = \alpha'''(t)/\alpha''(t)$.

При $s \neq 0$ имеем $\mu(t) = (s-2)/t$. Заметим еще, что для кривой $u = \ln x$ соответствующая функция $\mu(t)$ равна $(-2/t)$, а для $u = x \ln x$ имеем $\mu(t)$ равной $(-1/t)$.

Таким образом, совокупность функций $\mu(t) = (s-2)/t$ при $-1 \leq s < 1$ описывает все однородные кривые (2) из 1)–3), кроме не интересующей нас прямой $u = x^0$. Напомним, что значения $s = 0$ и $s = 1/2$ дают нам трубчатые сферы, и потому мы их здесь не рассматриваем.

Для вычисления голоморфных инвариантов остальных кривых из этой совокупности воспользуемся теоремой 1. Например, коэффициент h_{420} пропорционален

$$Q(\mu) = \left(-\frac{1}{t^4}\right)s(s-2)(2s-1).$$

Тогда h_{520} с точностью до положительной константы есть

$$\frac{d}{dt}(Q(\mu)) - \frac{4}{3}\mu Q(\mu) = \frac{4}{3t^5}s(s-2)(2s-1)(s-1).$$

Коэффициент λ_4 имеет наиболее простое выражение

$$\lambda_4 = \frac{1}{6}\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu^2\right) = \left(-\frac{1}{18t^2}\right)(s-2)(2s-1).$$

Следовательно, пара (κ_0, κ_1) с точностью до несущественных постоянных множителей примет вид

$$\left(\frac{-(s-2)(2s-1)}{|-s(s-2)(2s-1)|^{1/2}}, \frac{[s(s-2)(2s-1)(s-1)]^2}{|-s(s-2)(2s-1)|^{5/2}} \operatorname{sgn}[(-s)(s-2)(2s-1)]\right).$$

Весь отрезок $[-1, 1]$ изменения параметра s точками $s = 0$ и $s = 1/2$ разбивается на 3 интервала. В каждом из них пара $(\varkappa_0, \varkappa_1)$ имеет следующие знаки

$$\begin{aligned} (-1, 0) : \quad & \varkappa_0 < 0, \quad \varkappa_1 > 0; \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad & \varkappa_0 < 0, \quad \varkappa_1 < 0; \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) : \quad \varkappa_0 > 0, \quad \varkappa_1 > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнение знаков показывает, что значениям s из разных интервалов соответствуют разные пары $(\varkappa_0, \varkappa_1)$. Монотонность же $\varkappa_0$ на каждом из выделенных интервалов завершает доказательство неэквивалентности трубок, соответствующих разным функциям $\mu(t) = (s - 2)/t$.

Для логарифмических спиралей $r = e^{a\varphi}$ также можно вычислить коэффициенты $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \dots$ разложения (4). Сошлемся здесь лишь на результаты таких вычислений, не приводя их полностью.

Полагая $\omega = a^2 \geq 0$, получим, например, λ_4 в виде линейной функции $\lambda_4 = A\omega + B$ с положительными A и B . Преобразовывая, как и выше, тейлоровское разложение любой из спиралей в точке $(1, 0)$ плоскости $\mathbb{R}_{(x,u)}^2$, будем иметь $A = 1/2$, $B = 1/18$.

Тогда λ_6 оказывается многочленом второй степени относительно ω : $\lambda_6 = \frac{4}{9 \cdot 6!}(9\omega + 1)(45\omega + 13)$.

Это означает, что для кривых $r = e^{a\varphi}$ (в том числе, при $a = 0$) значение инварианта

$$\varkappa_0 = \frac{\lambda_4}{(\lambda_6^2 - \frac{4}{5}\lambda_4^2)^{1/2}} \quad \text{равно} \quad \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 9}{a^2 + 1}}.$$

Ясно, что $\varkappa_0(a)$ монотонно убывает при $0 \leq a < \infty$, приближаясь к значению $\sqrt{5}/3$ сверху. Для остальных же однородных кривых, как несложно проверить, $\varkappa_0 \leq \sqrt{5}/3$. Следовательно, трубки над спиралями голоморфно неэквивалентны друг другу и отличаются от трубок над другими однородными кривыми. Теорема 3 доказана.

Воронежская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступило
25.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blaschke W. Affine Differentialgeometrie. Berlin, 1923.
- [2] Широков А. П., Широков П. А. Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматлит, 1959.
- [3] Dadok J., Yang P. Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces // Amer. J. Math. 1985. V. 107. № 4. P. 999–1013.
- [4] Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. № 3. P. 219–271.
- [5] Белашапка В. К. О размерности групп автоморфизмов аналитической гиперповерхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 243–266.
- [6] Лобода А. В. Линеаризуемость автоморфизмов несферических поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 4. С. 864–880.