Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Палинчук, О s -жестких квадраках, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 224–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:09:25

О c -ЖЕСТКИХ КВАДРИКАХ

Н. Ф. Палинчук

Данная статья является продолжением работы [1]. Рассматриваются невырожденные (k, n) -квадрики, т.е. поверхности в $\mathbb{C}^{n+k}$, задаваемые векторным уравнением $v = \langle z, z \rangle$, где $z = (z^1, \dots, z^n)$, $w = (w^1, \dots, w^k)$, $w = u + iv$, $\langle z, z \rangle = (\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k)$, $\langle z, z \rangle^j = \bar{z}^T H^j z$, H^j – эрмитова матрица $n \times n$ и форма $\langle z, z \rangle$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $\langle z, z \rangle^1, \dots, \langle z, z \rangle^k$ – линейно независимы;
- 2) если для любого z из $\mathbb{C}^n$ $\langle z, e \rangle = 0$, то $e = 0$.

В.К. Белошапкой была получена формула (см. [2]) для алгебры $g(Q)$ инфинитезимальных автоморфизмов невырожденной (k, n) -квадрики Q ($g(Q)$ соответствует группе Ли $G(Q)$ голоморфных автоморфизмов Q , сохраняющих фиксированную точку):

$$g(Q) = \left\{ (Cz + aw + A(z, z) + B(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} + (sw + 2i \langle z, a\bar{w} \rangle + r(w, w)) \frac{\partial}{\partial w} \right\}.$$

Здесь все выражения линейны, параметры C, s, A, a, B, r удовлетворяют следующим соотношениям:

$$2 \operatorname{Re} \langle Cz, z \rangle = s \langle z, z \rangle, \quad (1)$$

$$\langle A(z, z), z \rangle = 2i \langle z, a \langle z, z \rangle \rangle, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \langle B(z, u), z \rangle = r(\langle z, z \rangle, u), \quad (3)$$

$$\operatorname{Im} \langle B(z, \langle z, z \rangle), z \rangle = 0. \quad (4)$$

Введем естественную градуировку на $g(Q)$, приписывая переменным z вес 1, $\partial/\partial z$ – вес (-1) , w – вес 2, $\partial/\partial w$ – вес (-2) . Получим разложение $g(Q)$ в сумму градуированных компонент: $g(Q) = s(Q) + c(Q) + a(Q) + b(Q)$, где

$$s(Q) = \left\{ \mu z \frac{\partial}{\partial z} + (2 \operatorname{Re} \mu) w \frac{\partial}{\partial w}, \mu \in \mathbb{C} \right\},$$

$$a(Q) = \left\{ (aw + A(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + 2i \langle z, a\bar{w} \rangle \frac{\partial}{\partial w}, A \text{ и } a \text{ удовлетворяют (2)} \right\},$$

$$b(Q) = \left\{ B(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + r(w, w) \frac{\partial}{\partial w}, B \text{ и } r \text{ удовлетворяют (3) и (4)} \right\},$$

$$c(Q) = \left\{ Cz \frac{\partial}{\partial z} + sw \frac{\partial}{\partial w}, C \in L(n, \mathbb{C}), s \in L(k, \mathbb{R}), \right. \\ \left. \text{выполнено (1) и } \operatorname{tr} C = 0 \right\},$$

причем $s(Q)$ и $c(Q)$ имеют вес 0, $a(Q)$ – вес 1, $b(Q)$ – вес 2 (здесь $s(Q) + c(Q)$ отвечает за наличие линейных автоморфизмов, а $a(Q) + b(Q)$ – за наличие нелинейных). Из такого разложения естественно вытекают следующие определения жесткостей.

Квадрика Q называется

с-жесткой, если из (1) и условия $\operatorname{tr} C = 0$ следует, что $C = 0, s = 0$;

а-жесткой, если из (2) следует, что $A = 0, a = 0$;

b-жесткой, если из (3) и (4) следует, что $B = 0, r = 0$;

просто *жесткой*, если она является *с-, а-, b-жесткой* одновременно (т.е. все автоморфизмы жесткой квадрики имеют вид $z \rightarrow \mu z, w \rightarrow |\mu|^2 w, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, см. [2]).

Непосредственным анализом соотношений (1), (3) и (4) В. К. Белошапка показал, что если квадрика *с-жесткая*, то она является *b-жесткой* (см. [2]). В [1] было доказано, что из *а-жесткости* невырожденной (k, n) -квадрики следует ее *b-жесткость*.

Рассмотрим все голоморфные векторные поля на Q , сужение которых на Q является касательным к Q (Q – невырожденная (k, n) -квадрика). В [3] В. К. Белошапка доказал, что такие поля имеют специальный вид:

$$X = (p + Cz + aw + A(z, z) + B(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} \\ + (q + 2i\langle z, p \rangle + sw + 2i\langle z, a\bar{w} \rangle + r(w, w)) \frac{\partial}{\partial w},$$

где C, s, a, A, B, r удовлетворяют (1)–(4), $p \in \mathbb{C}^n, q \in \mathbb{R}^k$. Они образуют алгебру Ли, которую мы будем обозначать через $\ell(Q)$. Введем на $\ell(Q)$ естественную градуировку. Тогда

$$\ell(Q) = \ell_{-2} + \ell_{-1} + \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 \text{ (компонента } \ell_j \text{ имеет вес } j), \\ \ell_{-2} + \ell_{-1} = \left\{ p \frac{\partial}{\partial z} + (q + 2i\langle z, p \rangle) \frac{\partial}{\partial w}, p \in \mathbb{C}^n, q \in \mathbb{R}^k \right\}, \\ \ell_0 = s(Q) + c(Q), \quad \ell_1 = a(Q), \quad \ell_2 = b(Q),$$

причем $\ell_{-2} + \ell_{-1}$ является алгеброй Ли, соответствующей группе “параллельных переносов” – преобразований вида $z \rightarrow z + p, w \rightarrow w + q + 2i\langle z, p \rangle$

$+i\langle p, p \rangle$, а $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2$ соответствует локальной группе $G(Q)$ автоморфизмов Q , сохраняющих начало координат. В $\ell(Q)$ определена операция коммутирования и коммутатор двух элементов из $\ell(Q)$ является элементом из $\ell(Q)$. Любое векторное поле из $\ell(Q)$ порождает в окрестности единицы однопараметрическую подгруппу автоморфизмов, что позволяет по $\ell(Q)$ восстановить локальную группу, соответствующую $\ell(Q)$. Эта локальная группа состоит из голоморфных автоморфизмов Q (начало координат уже не будет неподвижной точкой).

ТЕОРЕМА. Пусть Q – невырожденная s -жесткая квадратика и пусть существует $\alpha_i \in \mathbb{C}^1$ ($i = 1, \dots, k$) такие, что матрица $(\alpha_1 H^1 + \dots + \alpha_k H^k)$ невырождена. Тогда Q – a -жесткая.

ЗАМЕЧАНИЕ. Квадрики из условия теоремы называются сильно невырожденными. Если в определении невырожденности условие 2) (если для любого z из $\mathbb{C}^n$ $\langle z, e \rangle = 0$, то $e = 0$) заменить на более сильное условие 2*) (существует невырожденная линейная комбинация эрмитовых форм H^p , $p = 1, \dots, k$), то получим определение сильно невырожденной квадратки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было доказано в [2] непосредственным анализом соотношений (1), (3), и (4), s -жесткость влечет за собой b -жесткость. Поэтому любой элемент $\ell(Q)$ имеет вид:

$$Y = \left((p + \mu z + aw + A(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + (q + 2iF(z, p) + (2 \operatorname{Re} \mu)w + 2iF(z, a\bar{w})) \frac{\partial}{\partial w} \right),$$

где $\mu \in \mathbb{C}^1$, $p \in \mathbb{C}^n$, $q \in \mathbb{R}^k$, A и a удовлетворяют (2), $F(x, y) = \langle x, y \rangle$.

Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов $Y, \hat{Y}$ из $\ell(Q)$ и в нем градуированную компоненту веса 0: $[Y, \hat{Y}] = X \in \ell(Q)$, $X_0 = \eta z \partial / \partial z + (2 \operatorname{Re} \eta) w \partial / \partial w$, где $\eta \in \mathbb{C}^1$. Но, с другой стороны, $X_0 = [Y_{-1}, \hat{Y}_1] + [Y_1, \hat{Y}_{-1}] + [Y_0, \hat{Y}_0]$. Подставим вместо Y_j и $\hat{Y}_j$ ($j = -1, 0, 1$) соответствующие выражения (у векторного поля $\hat{Y}$ вместо p, μ, a, A, q стоят $\hat{p}, \hat{\mu}, \hat{a}, \hat{A}, \hat{q}$) и вычислим отдельно каждый коммутатор. Выпишем коэффициент при $w^j \partial / \partial w^r$ в X_0 :

$$\begin{aligned} (2 \operatorname{Re} \eta) \delta_r^j &= 2i \{ p^1 (h_{11}^r \hat{a}_{1j} + \dots + h_{n1}^r \hat{a}_{nj}) + \dots \\ &\quad + p^n (h_{1n}^r \hat{a}_{1j} + \dots + h_{nn}^r \hat{a}_{nj}) \\ &\quad - \hat{p}^1 (h_{11}^r a_{1j} + \dots + h_{n1}^r a_{nj}) - \dots \\ &\quad - \hat{p}^n (h_{1n}^r a_{1j} + \dots + h_{nn}^r a_{nj}) \\ &\quad - \hat{a}_{1j} (h_{11}^r \bar{p}^1 + \dots + h_{n1}^r \bar{p}^n) - \dots \\ &\quad - \hat{a}_{nj} (h_{1n}^r \bar{p}^1 + \dots + h_{nn}^r \bar{p}^n) \\ &\quad + a_{1j} (h_{11}^r \bar{\hat{p}}^1 + \dots + h_{n1}^r \bar{\hat{p}}^n) + \dots \end{aligned}$$

$$+ a_{nj}(h_{1n}^r \bar{p}^1 + \dots + h_{nn}^r \bar{p}^n)\},$$

где $h_{st}^r, a_{st}, \hat{a}_{st}$ – элементы матриц $H^r, a, \hat{a}$ соответственно, $j = 1, \dots, k$, δ_r^j – символ Кронекера. В последнем равенстве перегруппируем члены

$$\sum_{s,t=1}^n \{h_{st}^r(p^t \hat{a}_{sj} - \hat{p}^t a_{sj} - \bar{p}^s \hat{a}_{tj} + \bar{p}^s a_{tj})\} = \frac{\operatorname{Re} \nu}{i} \delta_r^j. \quad (6)$$

Вспомним, что p и $\hat{p}$ – произвольные векторы из $\mathbb{C}^n$, и, придавая им различные значения, получим нужные нам выражения. Пусть p – нулевой вектор, а $\hat{p}$ – вектор, у которого на d -м месте стоит 1, все остальные элементы – нули. Тогда (6) примет вид:

$$\sum_{t=1}^n \{h_{dt}^r a_{tj}\} - \sum_{s=1}^n \{h_{sd}^r a_{sj}\} = \frac{\operatorname{Re} \nu_d^1}{i} \delta_r^j. \quad (7)$$

Пусть теперь p – по-прежнему нулевой вектор, а у $\hat{p}$ на d -м месте стоит i , все остальные элементы – нули. Тогда, подставив такие p и $\hat{p}$ в (6), получаем:

$$\sum_{t=1}^n \{(-i)h_{dt}^r a_{tj}\} - \sum_{s=1}^n \{ih_{sd}^r a_{sj}\} = \frac{\operatorname{Re} \nu_d^2}{i} \delta_r^j. \quad (8)$$

Равенство (8) умножим на i и сложим с (7):

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \{2h_{dt}^r a_{tj}\} &= \delta_r^j \frac{1}{i} (\operatorname{Re} \nu_d^1 + i \operatorname{Re} \nu_d^2), \\ \sum_{t=1}^n \{h_{dt}^r a_{tj}\} &= \delta_r^j \tau_d, \quad \text{где } \tau_d = \frac{1}{2i} (\operatorname{Re} \nu_d^1 + i \operatorname{Re} \nu_d^2). \end{aligned}$$

В матричном виде последнее соотношение запишется так:

$$H^r a_j = \delta_r^j \tau, \quad (9)$$

где τ – столбец из τ_d , a_j – j -ый столбец матрицы a , $j, p = 1, \dots, k$.

Если среди матриц H^r существует невырожденная (без ограничения общности можно считать, что это H^1), то из того, что $H^1 a_j = 0$ ($j \neq 1$) и $\det H^1 \neq 0$ следует, что $a_j = 0$ ($j \neq 1$). Так как с одной стороны $H^2 a_2 = \tau$, а с другой стороны $H^2 a_2 = 0$ (ведь $a_2 = 0$), то $\tau = 0$, и из того, что $H^1 a_1 = 0$ следует, что и $a_1 = 0$. Таким образом, если среди эрмитовых матриц H^r существует невырожденная, то матрица a – нулевая.

Пусть теперь все H^r вырождены, но существует невырожденная линейная комбинация $\Lambda = \alpha_1 H^1 + \dots + \alpha_k H^k$, $\det \Lambda \neq 0$. $\Lambda a_j = \alpha_j \tau$, откуда $a_j = \alpha_j \Lambda^{-1} \tau$. Обозначим $\Lambda^{-1} \tau$ через β . Тогда матрица a будет иметь вид $(\alpha_1 \beta, \dots, \alpha_k \beta)$. Заметим, что если существует j такое, что $\alpha_j = 0$, то

$a_j = 0$, $H^j a_j = \tau = 0$, откуда $\tau = 0$ и $\Lambda a_r = 0$ для всех $r = 1, \dots, k$. Следовательно, если существует невырожденная линейная комбинация H^r , в которую не входит хотя бы одна эрмитова матрица H^j , $j \in \{1, \dots, k\}$, то матрица a – нулевая.

Осталось рассмотреть случай, когда существует невырожденная линейная комбинация H^r , в которую входят все k эрмитовых матриц H^r с ненулевыми коэффициентами. Для этого выпишем коэффициент при $z^s \partial / \partial z^t$ в X_0 :

$$\begin{aligned} & p^1 2\hat{A}_{1s}^t + \dots + p^n 2\hat{A}_{ns}^t - \hat{p}^1 2A_{1s}^t - \dots - \hat{p}^n 2A_{ns}^t \\ & + 2i \{ (h_{1s}^1 \bar{p}^1 + \dots + h_{ns}^1 \bar{p}^n) \hat{a}_{t1} + \dots + (h_{1s}^k \bar{p}^1 + \dots + h_{ns}^k \bar{p}^n) \hat{a}_{tn} \} \\ & - 2i \{ (h_{1s}^1 \bar{p}^1 + \dots + h_{ns}^1 \bar{p}^n) a_{t1} + \dots + (h_{1s}^k \bar{p}^1 + \dots + h_{ns}^k \bar{p}^n) a_{tn} \} \\ & = \eta \delta_s^t, \end{aligned}$$

где A_{js}^t – коэффициент при $z^j z^s$ в билинейной форме $A^t(z, z)$, причем $A_{js}^t = A_{sj}^t$, $t = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n$. Рассмотрим, как и выше, во что превратится последнее соотношение при различных p и $\hat{p}$. Сначала пусть p – нулевой вектор, $\hat{p}$ – вектор, у которого на d -м месте единица, а остальные – нули.

$$-A_{ds}^t - 2i(h_{ds}^1 a_{t1} + \dots + h_{ds}^k a_{tn}) = \eta_d^1 \delta_s^t. \quad (10)$$

Пусть теперь p – как выше, а у $\hat{p}$ на d -м месте стоит i , остальные – нули. Тогда

$$-iA_{ds}^t - 2i(-i)(h_{ds}^1 a_{t1} + \dots + h_{ds}^k a_{tn}) = \eta_d^2 \delta_s^t. \quad (11)$$

Умножим (11) на i и прибавим к (10):

$$\sum_{r=1}^k \{ h_{ds}^r a_{tr} \} = \delta_s^t \theta_d, \quad (12)$$

где $\theta_d = -\frac{1}{4i}(\eta_d^1 + i\eta_d^2)$, $d, s, t = 1, \dots, n$. В нашем случае $\exists \Lambda = \alpha_1 H^1 + \dots + \alpha_k H^k$, $\det \Lambda \neq 0$, и для любого r $\alpha_r \neq 0$. Тогда, как было показано выше, $a_{tr} = \alpha_r \beta_r$, β_t – t -ый элемент $\Lambda^{-1} \tau$. Подставим в (12) вместо a_{tr} соответствующее выражение:

$$\beta_t \sum_{r=1}^k \{ h_{ds}^r \alpha_r \} = \delta_s^t \theta_d.$$

Предположим, что $\exists t : \beta_t \neq 0$. Тогда $\sum_{r=1}^k \{ h_{ds}^r \alpha_r \} = \delta_s^t (\theta_d / \beta_t)$, где $d, s = 1, \dots, n$. В матричном виде это запишется следующим образом: $\alpha_1 H^1 + \dots + \alpha_k H^k = \Theta$, где Θ – матрица, у которой t -ый столбец имеет вид $\frac{\theta_d}{\beta_t} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, а все остальные столбцы – нулевые. Но с другой стороны,

$\alpha_1 H^1 + \dots + \alpha_k H^k = \Lambda$, а $\det \Lambda \neq 0$. Это противоречие показывает, что для любого t $\beta_t = 0$, следовательно, $a = 0$.

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то матрица a из условия (2) – нулевая. Это влечет a -жесткость квадрики. Теорема полностью доказана.

Используя эту теорему, а также результаты статей [1], [2], можно составить следующую таблицу (“–” означает соответствующую жесткость, “+” – отсутствие жесткости, “ $\perp$ ” означает жесткость для сильно невырожденных квадрик, для остальных, возможно, $\dim a(Q) \neq 0$):

N	c -	a -	b -
1	+	+	+
2	+	+	–
3	+	–	–
4	–	$\perp$	–

Другие сочетания “+” и “–” невозможны.

Приведем примеры ко всем четырем случаям из таблицы.

1) Рассмотрим (3, 3)-квадрику

$$v^1 = 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^3), \quad v^2 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}^3), \quad v^3 = |z^3|^2.$$

Прямыми вычислениями по формулам (1)–(4) получаем, что $\dim g(Q) = 19 = 10 + 6 + 3$, где 10, 6, 3, означают размерности $s(Q) + c(Q)$, $a(Q)$, $b(Q)$ соответственно. Данная квадрика не обладает никакой жесткостью.

2) Рассмотрим (2, 3)-квадрику

$$v^1 = 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^3), \quad v^2 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}^3).$$

$\dim g(Q) = 10 = 8 + 2 + 0$. Это b -жесткая квадрика.

3) Квадрика

$$v^1 = 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^3) + |z^2|^2, \quad v^2 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}^3)$$

является a -жесткой, следовательно, и b -жесткой (непосредственными вычислениями по формулам (1)–(4) получим, что $\dim g(Q) = 6 + 0 + 0$).

4) Квадрика

$$v^1 = 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^2) + |z^3|^2, \quad v^2 = |z^1|^2 + |z^3|^2, \quad v^3 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}^3) - 2 \operatorname{Re}(z^1 \bar{z}^3)$$

является жесткой, у нее $\dim g(Q) = 2 + 0 + 0$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Палинчук Н. Ф. О квадриках высокой коразмерности // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 110–115.
- [2] Белошапка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [3] Белошапка В. К. Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 17–22.