Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Лытова, И. Ю. Чудинович, Граничные уравнения в задачах дифракции электромагнитных волн с импедансным краевым условием, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 77–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:03:45

УДК 517.945+517.968

ГРАНИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ИМПЕДАНСНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

А. Ю. Лытова, И. Ю. Чудинович

Рассмотрена задача нестационарной дифракции электромагнитных волн с импедансным краевым условием. Решение задачи представлено поверхностными запаздывающими потенциалами первого и второго рода. Эти представления приводят к двум системам нестационарных граничных уравнений. Доказана однозначная разрешимость этих систем в однопараметрических шкалах пространств соболевского типа.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Хорошо известно, что теория потенциалов является одним из самых мощных методов как теоретического исследования, так и численного решения задач дифракции электромагнитных волн в случае, когда поля зависят от времени гармонически. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в [1], [2]. В последние годы резко возрос интерес к задачам дифракции, в которых зависимость полей от времени, вообще говоря, произвольна. Представления решений таких задач поверхностными запаздывающими потенциалами приводят к системам нестационарных граничных уравнений, которые рядом свойств принципиально отличаются от аналогичных систем в квазистационарном случае. В частности, соответствующие граничные операторы перестают быть нормально разрешимыми в некоторых естественных функциональных пространствах. Это обстоятельство не позволяет использовать при доказательстве разрешимости систем граничных уравнений альтернативу Фредгольма, что существенно усложняет исследование этих систем.

Первые строгие результаты, касающиеся разрешимости граничных уравнений в задачах существенно нестационарной дифракции акустических волн, были получены в [3], [4]. Эти исследования были продолжены в [5], [6], а также в цикле работ одного из авторов, посвященных граничным уравнениям в задачах динамики упругих сред [7]–[10]. Разрешимость граничных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах была доказана в [11], [12].

Целью данной работы является доказательство теорем существования решений нестационарных граничных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах, не являющихся идеальными проводниками.

2. Обозначения и постановка задачи. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется “падающее” электромагнитное поле $\{E^{(i)}, H^{(i)}\}(X)$, $X = (x, t)$, равное нулю при $t \leq 0$.

Здесь и далее, E и H – трехкомпонентные векторные поля, являющиеся соответственно электрической и магнитной компонентами электромагнитного поля. Внесем в пространство тело, не являющееся идеальным проводником, занимающее область $\Omega^+ \in \mathbb{R}^3$ с граничной поверхностью Γ класса C^2 . Изменившееся в области $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}^+$ электромагнитное поле запишем в виде $\{E^{(i)} + E, H^{(i)} + H\}(X)$. Задача дифракции [2] сводится к нахождению в области $G^- = \Omega^- \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, “рассеянного” поля $\{E, H\}(X)$, удовлетворяющего системе уравнений Максвелла

$$\varepsilon \partial_t E(X) - \operatorname{rot} H(X) = 0, \quad \operatorname{rot} E(X) + \mu \partial_t H(X) = 0, \quad X \in G^-, \quad (1)$$

в которой ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно, $\partial_t = \partial/\partial t$, операции rot и далее div действуют на пространственные координаты соответствующих вектор-функций. Без ограничения общности начальные условия считаем однородными:

$$E(x, +0) = H(x, +0) = 0, \quad x \in \Omega^-. \quad (2)$$

На гиперповерхности $\Sigma^+ = \Gamma \times \mathbb{R}_+$ должно быть выполнено краевое условие импедансного типа

$$E_\tau^-(X) - \chi \nu(x) \wedge H^-(X) = G_\tau(X), \quad X \in \Sigma^+, \quad (3)$$

где верхние индексы “ $\pm$ ” обозначают предельные значения соответствующих вектор-функций, когда $X \rightarrow \Sigma^+$ из G^+ или G^- соответственно, $\wedge$ – знак векторного произведения в $\mathbb{R}^3$, нижние индексы τ и далее ν обозначают соответственно касательную и нормальную к Γ компоненты векторного поля, $\nu(x)$ – орт нормали к Γ , внешней относительно Ω^+ , $G_\tau(X)$ – заданное на Σ^+ касательное к Γ векторное поле и, наконец, χ – положительная постоянная (поверхностный импеданс). Заметим, что из (1) и (2) следуют два остальных уравнения Максвелла: $\operatorname{div} E(X) = \operatorname{div} H(X) = 0$, $X \in G^-$. Одновременно с поставленной задачей D^- мы будем рассматривать аналогичную задачу D^+ в области $G^+ = \Omega^+ \times \mathbb{R}_+$, отличающуюся от D^- лишь видом краевого условия:

$$E_\tau^+(X) + \chi \nu(x) \wedge H^+(X) = G_\tau(X), \quad X \in \Sigma^+. \quad (4)$$

Отметим, что задачи $D^\pm$ поставлены формально; их корректные постановки будут приведены после введения необходимых функциональных пространств.

3. Электромагнитные поверхностные потенциалы и нестационарные граничные уравнения. Пусть $\Phi(X)$ и $\Psi(X)$ – матрицы размера 3×6 , образованные соответственно первыми и последними тремя строками матрицы фундаментального решения системы (1), равного нулю при $t < 0$. Из-за недостатка места мы не приводим здесь явный вид этих матриц. Вместо этого будет приведен явный вид построенных с их помощью запаздывающих потенциалов. Пусть $\alpha_\tau(X)$, $\beta_\tau(X)$ – заданные на $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}$ касательные к Γ векторные поля. Введем электромагнитные поверхностные потенциалы первого и второго рода с плотностями α_τ , β_τ соответственно формулами

$$(V\alpha_\tau)(X) = \int_\Sigma \Phi^T(X - Y) \alpha_\tau(Y) ds_Y, \quad (W\beta_\tau)(X) = \int_\Sigma \Psi^T(X - Y) \beta_\tau(Y) ds_Y,$$

в которых $Y = (y, \eta)$, T – знак транспонирования матрицы. Первые три компоненты обоих потенциалов $(V\alpha_\tau)_E(X)$, $(W\beta_\tau)_E(X)$ представляют электрические, а остальные три, которые мы обозначим через $(V\alpha_\tau)_H(X)$, $(W\beta_\tau)_H(X)$, – магнитные компоненты соответствующих полей. Очевидно, для, по крайней мере, гладких финитных

на Σ плотностей оба потенциала в G^+ и G^- удовлетворяют (1). Если же плотности равны нулю при $t < 0$, то выполнены также условия (2). Приведем явный вид обоих потенциалов:

$$\begin{aligned} (V\alpha_\tau)(X) &= \{(V\alpha_\tau)_E, (V\alpha_\tau)_H\}(X) \\ &= \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \left(\int_\Gamma \frac{(\partial_t \alpha_\tau)(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a^2 \nabla_x \int_0^t \int_\Gamma \frac{(\text{Div } \alpha_\tau)(y, \eta - |x - y|/a)}{|x - y|} d\eta ds_y \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\pi} \text{rot}_x \int_\Gamma \frac{\alpha_\tau(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (W\beta_\tau)(X) &= \{(W\beta_\tau)_E, (W\beta_\tau)_H\}(X) \\ &= \left\{ \frac{1}{4\pi} \text{rot}_x \int_\Gamma \frac{\beta_\tau(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y, \right. \\ &\quad \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\int_\Gamma \frac{(\partial_t \beta_\tau)(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right. \\ &\quad \left. \left. - a^2 \nabla_x \int_0^t \int_\Gamma \frac{(\text{Div } \beta_\tau)(y, \eta - |x - y|/a)}{|x - y|} d\eta ds_y \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где Div – операция поверхностной дивергенции [2], $a^2 = (\varepsilon\mu)^{-1}$. С помощью представлений (5), (6), а также известных свойств гармонических потенциалов [2] убеждаемся в справедливости следующих формул скачков:

$$(V\alpha_\tau)^\pm(X) = \mp \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^{-1} \nu(x) \int_0^t (\text{Div } \alpha_\tau)(x, \eta) d\eta, \nu(x) \wedge \alpha_\tau(X) \right\} + (V\alpha_\tau)^0(X), \quad (7)$$

$$X \in \Sigma^+,$$

$$(W\beta_\tau)^\pm(X) = \mp \frac{1}{2} \left\{ \beta_\tau(X) \wedge \nu(x), \mu^{-1} \nu(x) \int_0^t (\text{Div } \beta_\tau)(x, \eta) d\eta \right\} + (W\beta_\tau)^0(X), \quad (8)$$

$$X \in \Sigma^+,$$

в которых верхний индекс 0 обозначает прямые значения соответствующих интегралов.

Представив решения задач $D^\pm$ введенными выше потенциалами, после предельного перехода точки на граничную поверхность придем с учетом краевых условий (3), (4) к системам граничных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \chi \nu(x) \wedge \alpha_\tau(X) + \frac{\nu(x)}{4\pi} \wedge \left\{ \mu \int_\Gamma \frac{(\partial_t \alpha_\tau)(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^{-1} \nabla_x \int_0^t \int_\Gamma \frac{(\text{Div } \alpha_\tau)(y, \eta - |x - y|/a)}{|x - y|} d\eta ds_y \right. \\ &\quad \left. \mp \chi \nu(x) \wedge \text{rot}_x \int_\Gamma \frac{\alpha_\tau(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right\} \\ &= \nu(x) \wedge G_\tau(X), \quad X \in \Sigma^+, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& \mp \frac{1}{2} \beta_\tau(X) + \frac{\nu(x)}{4\pi} \wedge \left\{ \operatorname{rot}_x \int_\Gamma \frac{\beta_\tau(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right. \\
& \quad \pm \chi^\nu(x) \wedge \left[\varepsilon \int_\Gamma \frac{(\partial_t \beta_\tau)(y, t - |x - y|/a)}{|x - y|} ds_y \right. \\
& \quad \left. \left. - \mu^{-1} \nabla_x \int_0^t \int_\Gamma \frac{(\operatorname{Div} \beta_\tau)(y, \eta - |x - y|/a)}{|x - y|} d\eta ds_y \right] \right\} \\
& = \nu(x) \wedge G_\tau(X), \quad X \in \Sigma^+.
\end{aligned} \tag{10}$$

Целью работы является доказательство разрешимости систем (9), (10) в шкалах пространств соболевского типа.

4. Свойства основных граничных операторов в пространствах с параметром. Далее мы обозначаем преобразования Лапласа равных нулю при $t < 0$ вектор-функций $U(x, t)$ через $U(x, p)$, где p – параметр преобразования Лапласа. Очевидно, преобразование Лапласа $\{E, H\}(x, p)$ электромагнитного поля, являющегося решением задачи D^+ или D^- , является решением соответствующей задачи D_p^+ или D_p^- :

$$\begin{aligned}
\varepsilon p E(x, p) - \operatorname{rot} H(x, p) &= 0, \quad \operatorname{rot} E(x, p) + \mu p H(x, p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\
E_\tau^\pm(x, p) \pm \chi^\nu(x) \wedge H^\pm(x, p) &= G_\tau(x, p), \quad x \in \Gamma,
\end{aligned} \tag{11}$$

где верхние индексы “ $\pm$ ” после перехода к преобразованиям Лапласа обозначают предельные значения соответствующих вектор-функций при $x \rightarrow \Gamma$ из $\Omega^\pm$. Исследование разрешимости задач $D_p^\pm$, а также зависимости их решений от параметра p , меняющегося в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma > 0$ начнем с введения функциональных пространств. Для любого $p \in \mathbb{C}$ обозначим через $H_{1,p}(\mathbb{R}^3)$ пространство, состоящее из трехкомпонентных обобщенных функций, обладающих конечной нормой

$$\|U\|_{1,p}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |p| + |\xi|)^2 |\tilde{U}(\xi, p)|^2 d\xi,$$

в которой $\tilde{U}(\xi, p)$ – преобразование Фурье $U(x, p)$ по переменной x . Пространства $H_{1,p}(\Omega^\pm)$ образованы сужениями на $\Omega^\pm$ элементов пространства $H_{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Нормы элементов U этих пространств вводятся формулами $\|U\|_{1,p;\Omega^\pm} = \inf \|V\|_{1,p}$, где инфимум берется по всем продолжениям $V \in H_{1,p}(\mathbb{R}^3)$ элемента U . Следы на Γ элементов пространства $H_{1,p}(\Omega^\pm)$ образуют пространство $H_{1/2,p}(\Gamma)$ с нормой его элементов $\|F\|_{1/2,p;\Gamma} = \inf \|U\|_{1,p;\Omega^+}$, где инфимум берется по всем элементам $U \in H_{1,p}(\Omega^+)$, обладающим следом на Γ , равным F . Далее операторы следов, непрерывно (равномерно по $p \in \mathbb{C}$ [13]) отображающие $H_{1,p}(\Omega^\pm)$ на $H_{1/2,p}(\Gamma)$ обозначены через $\gamma_p^\pm$. Пусть $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$ – скалярное произведение, а $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ – норма пространства $[L^2(\Gamma)]^3$, $H_{-1/2,p}(\Gamma)$ – пространство, двойственное к $H_{1/2,p}(\Gamma)$ относительно формы $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma}$. Норму элементов $G \in H_{-1/2,p}(\Gamma)$ обозначим через $\|G\|_{-1/2,p;\Gamma}$. По аналогичной схеме введем пространства, состоящие из скалярных заданных на Γ функций, сохранив для них обозначения $H_{m,p}(\Gamma)$, $m = \pm 1/2$, – это не приведет к недоразумениям.

Обозначив через $H_{m,p}^\tau(\Gamma)$, $m = \pm 1/2$, подпространства в $H_{m,p}(\Gamma)$, состоящие из касательных к Γ векторных полей, введем при $m = \pm 1/2$ пространства $H_{-1/2,m,p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$

элементов $G_\tau \in H_{-1/2,p}^\tau(\Gamma)$ таких, что $\text{Div } G_\tau \in H_{m,p}(\Gamma)$, с нормами, заданными формулами

$$\begin{aligned}\|G_\tau\|_{-1/2,1/2,p;\Gamma}^2 &= \|G_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma}^2 + (1 + |p|)^{-4} \|\text{Div } G_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}^2, \\ \|G_\tau\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}^2 &= \|G_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma}^2 + (1 + |p|)^{-2} \|\text{Div } G_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma}^2.\end{aligned}$$

Наконец, обозначим через $H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$ пространства заданных в $\Omega^\pm$ трехкомпонентных вектор-функций $U(x, p)$ с конечной нормой

$$\|U\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm} = \{(1 + |p|)^2 \|U\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \|\text{rot } U\|_{0,\Omega^\pm}^2\}^{1/2},$$

где $\|\cdot\|_{0,\Omega^\pm}$ – норма пространства $[L^2(\Omega^\pm)]^3$. Очевидно, норма пространства $H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$ слабее нормы пространства $H_{1,p}(\Omega^\pm)$. Однако для полей с равной нулю дивергенцией, а с такими полями мы преимущественно и будем иметь дело, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть поле $E(x, p)$ определено при $x \in \Omega^+ \cup \Omega^-$, $E \in H_{1,p}(\Omega^\pm)$, $\text{div } E(x, p) = 0$, $x \in \Omega^\pm$. Справедливы неравенства

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm} \leq c(\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm} + \|E_\tau^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}), \quad (12)$$

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm} \leq c(\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm} + \|E_\nu^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\|E\|_{1,p;\Omega^+} + \|E\|_{1,p;\Omega^-} &\leq c(\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^+} + \|E\|_{p,\text{rot};\Omega^-} \\ &\quad + \|E_\tau^+ - E_\tau^-\|_{1/2,p;\Gamma} + \|E_\nu^+ - E_\nu^-\|_{1/2,p;\Gamma}),\end{aligned} \quad (14)$$

в которых $E_\tau^\pm = (\gamma_p^\pm E)_\tau$, $E_\nu^\pm = (\gamma_p^\pm E)_\nu$, а с здесь и далее обозначает положительные, не зависящие от p постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получим

$$\sum_{i=1}^3 \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^\pm}^2 - \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^\pm}^2 = \pm \{(E^\pm, (\partial_\nu E)^\pm)_{0,\Gamma} - (E^\pm, (\text{rot } E)^\pm \wedge \nu)_{0,\Gamma}\},$$

где $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$. Используя разложение единицы и соответствующие локальные координаты, получаем оценки

$$\sum_{i=1}^3 \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^\pm}^2 \leq \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + c(\|E^\pm\|_{0,\Gamma}^2 + \|E_\nu^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}^2 \|E_\tau^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}^2), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^3 (\|\nabla E_i\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^-}^2) \\ &\leq \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^-}^2 + c(\|E_\nu^+ - E_\nu^-\|_{0,\Gamma}^2 + \|E_\tau^+ - E_\tau^-\|_{0,\Gamma}^2 \\ &\quad + \Re(E_\nu^+ - E_\nu^+, \text{Div } E_\tau^+)_{0,\Gamma} + \Re(E_\nu^-, \text{Div}(E_\tau^- - E_\tau^+))_{0,\Gamma}).\end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и неравенства [14]

$$c\|E^\pm\|_{0,\Gamma}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^\pm}^2 + c\|E\|_{0,\Omega^\pm}^2 \quad (17)$$

следует, что

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 \leq c(\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm}^2 + \|E_\nu^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}\|E_\tau^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}). \quad (18)$$

Неравенства (12), (13) следуют из (18) и теоремы о следах. Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (\|\nabla E_i\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^-}^2) \\ & \leq \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\text{rot } E\|_{0,\Omega^-}^2 + c(\|E_\nu^+ - E_\nu^-\|_{0,\Gamma}^2 + \|E_\tau^+ - E_\tau^-\|_{0,\Gamma}^2 \\ & \quad + \|E_\nu^- - E_\nu^+\|_{1/2,p;\Gamma}\|E_\tau^+\|_{1/2,p;\Gamma} + \|E_\nu^- - E_\nu^+\|_{1/2,p;\Gamma}\|E_\tau^- - E_\tau^+\|_{1/2,p;\Gamma}). \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы о следах получаем (14). Лемма доказана.

Пусть $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$, $\mathbb{C}_\kappa = \{p = \sigma + i\zeta : \sigma > \kappa\}$, $\kappa > 0$. Рассмотрим задачу нахождения поля $\{E, H\}(x, p)$, $E \in H_{1,p}(\Omega^\pm)$, $H \in H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$, являющегося решением системы

$$\varepsilon p E(x, p) - \text{rot } H(x, p) = 0, \quad \text{rot } E(x, p) + \mu p H(x, p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm, \quad (19)$$

с краевым условием

$$E_\tau^\pm(x, p) = F_\tau(x, p), \quad x \in \Gamma. \quad (20)$$

Разрешимость такой задачи при каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$ следует из общих теорем о разрешимости эллиптических краевых задач [15] (см. также [11]).

Известно [14], [11], что на элементах $U(x, p)$ пространства $H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$ определены операторы следов $\lambda_p^\pm$, действующие по формулам $\lambda_p^\pm U = \nu(x) \wedge U^\pm(x, p)$, $x \in \Gamma$, непрерывно (равномерно по p) отображающие пространство $H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$ в $H_{-1/2,p}^\tau(\Gamma)$. Введем при каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$ два граничных оператора $T_p^\pm$, сопоставляющие элементу $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$ поле $\lambda_p^\pm H$, где $\{E, H\}$ – решение задачи (19), (20).

ТЕОРЕМА 1. *При каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$ операторы $T_p^\pm$ осуществляют биективные отображения*

$$T_p^\pm : H_{1/2,p}^\tau(\Gamma) \rightarrow H_{-1/2,1/2,p}^\tau(\text{Div}, \Gamma).$$

Для любого элемента $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$ справедливы неравенства

$$\|T_p^\pm F_\tau\|_{-1/2,1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-1}\|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}, \quad (21)$$

$$\|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-1}|p|^2\|T_p^\pm F_\tau\|_{-1/2,1/2,p;\Gamma}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для решений задачи (19), (20) легко проверяются равенства

$$\varepsilon\|E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \mu\|H\|_{0,\Omega^\pm}^2 = \pm\sigma^{-1}\Re(\lambda_p^\pm H, F_\tau)_{0,\Gamma}, \quad (23)$$

из которых следует, что

$$\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm}^2 \leq c\sigma^{-1}|p|^2\|\lambda_p^\pm H\|_{-1/2,p;\Gamma}\|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}. \quad (24)$$

Кроме того, используя переход к локальным координатам в окрестности Γ , для решения $E(x, p)$ уравнения

$$p^2 E(x, p) - a^2 \Delta E(x, p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm,$$

получим

$$\operatorname{Div}\{(\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu\} = (\partial_\nu \operatorname{div} E)^\pm - a^{-2} p^2 E_\nu^\pm \quad (25)$$

и при $\operatorname{div} E = 0$

$$E_\nu^\pm = -(\varepsilon p)^{-1} \operatorname{Div}(\lambda_p^\pm H), \quad (26)$$

откуда следует, что $\operatorname{Div} T_p^\pm F_\tau \in H_{1/2, p}(\Gamma)$.

Возьмем произвольный элемент $F'_\tau \in H_{1/2, p}^\tau(\Gamma)$. Пусть $E' \in H_{1, p}(\Omega^\pm)$ – его непрерывное продолжение в $\Omega^\pm$, т.е. $E'^\pm = F'_\tau$ и $\|E'\|_{1, p; \Omega^\pm} \leq c \|F'_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}$. Из равенств

$$\pm(\lambda_p^\pm H, F'_\tau)_{0, \Gamma} = \varepsilon p(E, E')_{0, \Omega^\pm} - (H, \operatorname{rot} E')_{0, \Omega^\pm},$$

где $(\cdot, \cdot)_{0, \Omega^\pm}$ – скалярное произведение в $[L^2(\Omega^\pm)]^3$, и (23) следует, что

$$\begin{aligned} |(\lambda_p^\pm H, F'_\tau)_{0, \Gamma}|^2 &\leq c(\|E\|_{0, \Omega^\pm}^2 + \|H\|_{0, \Omega^\pm}^2) \|E'\|_{1, p; \Omega^\pm}^2 \\ &\leq c\sigma^{-1} \|\lambda_p^\pm H\|_{-1/2, p; \Gamma} \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma} \|F'_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}^2 \end{aligned}$$

и, значит,

$$\|\lambda_p^\pm H\|_{-1/2, p; \Gamma} \leq c\sigma^{-1} \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}. \quad (27)$$

Используя последовательно (26), теорему о следах, (12), (24) и (27), придем к неравенствам

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Div} \lambda_p^\pm H\|_{1/2, p; \Gamma} &= \varepsilon |p| \cdot \|E_\nu^\pm\|_{1/2, p; \Gamma} \leq c |p| \cdot \|E\|_{1, p; \Omega^\pm} \\ &\leq c |p| (\|E\|_{p, \operatorname{rot}; \Omega^\pm} + \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}) \leq c\sigma^{-1} |p|^2 \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}. \end{aligned} \quad (28)$$

Неравенство (21) следует из оценок (27), (28) и определения нормы пространства $H_{-1/2, 1/2, p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$.

С помощью теоремы о следах, (13), (24) и (26) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}^2 &\leq c(\|E\|_{p, \operatorname{rot}; \Omega^\pm}^2 + \|E_\nu^\pm\|_{1/2, p; \Gamma}^2) \\ &\leq c(\sigma^{-1} |p|^2 \|\lambda_p^\pm H\|_{-1/2, p; \Gamma} \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma} + |p|^{-2} \|\operatorname{Div} \lambda_p^\pm H\|_{1/2, p; \Gamma}^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \|F_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}^2 + c\sigma^{-2} |p|^4 \|T_p^\pm F_\tau\|_{-1/2, 1/2, p; \Gamma}^2, \end{aligned}$$

из которых следует (22).

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в сюръективности операторов $T_p^\pm$. Возьмем произвольный элемент $G_\tau \in H_{-1/2, 1/2, p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$ и рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} p^2 E(x, p) - a^2 \Delta E(x, p) &= 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\ (\operatorname{rot} E)^\pm(x, p) \wedge \nu(x) &= \mu p G_\tau(x, p), \\ E_\nu^\pm(x, p) &= -(\varepsilon p)^{-1} \operatorname{Div} G_\tau(x, p), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Известно [11], что эта задача имеет решение $E \in H_{1,p}(\Omega^\pm)$. С помощью (25) убеждаемся в том, что $\operatorname{div} E$ является решением задачи

$$\begin{aligned} p^2 \operatorname{div} E(x, p) - a^2 \Delta \operatorname{div} E(x, p) &= 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\ (\partial_\nu \operatorname{div} E)^\pm(x, p) &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Отсюда следует [15], что $\operatorname{div} E(x, p) = 0$, $x \in \Omega^\pm$. Значит, поле $\{E, H = -(\mu p)^{-1} \operatorname{rot} E\}$ – решение системы (19), причем $T_p^\pm E_\tau^\pm = \lambda_\tau^\pm H = (\mu p)^{-1} (\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu = G_\tau$. Теорема доказана.

ЛЕММА 2. *При каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$, $\kappa > 0$, операторы $T_p^+ - T_p^-$ осуществляют непрерывные инъективные отображения*

$$T_p^+ - T_p^- : H_{1/2,p}^\tau(\Gamma) \rightarrow H_{-1/2,1/2,p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность отображения (29) следует из теоремы 1. Пусть элемент $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$ такой, что $(T_p^+ - T_p^-)F_\tau = 0$. Построим решения $\{E, H\}(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$, внутренней и внешней задач для системы (19) с краевым условием $E_\tau^+(x, p) = E_\tau^-(x, p) = F_\tau(x, p)$, $x \in \Gamma$. Из (23) следует равенство

$$\varepsilon \|E\|_{0,\Omega^+}^2 + \mu \|H\|_{0,\Omega^+}^2 + \varepsilon \|E\|_{0,\Omega^-}^2 + \mu \|H\|_{0,\Omega^-}^2 = \sigma^{-1} \Re((T_p^+ - T_p^-)F_\tau, F_\tau)_{0,\Gamma}.$$

Отсюда следует равенство нулю поля $E(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$, а, значит, и элемента F_τ . Лемма доказана.

Введем два вспомогательных оператора $J_{\chi,p}^\pm$ и исследуем их свойства. Пусть $F(x, p) \in H_{1/2,p}(\Gamma)$, $E(x, p) \in H_{1,p}(\Omega^\pm)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} p^2 E(x, p) - a^2 \Delta E(x, p) &= 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\ E^\pm(x, p) &= F(x, p), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что в [11] доказано, что два оператора, первый из которых сопоставляет полю F поле $(\partial_\nu E)^\pm(x, p)$, $x \in \Gamma$, авторой – поле $(\operatorname{rot} E)^\pm(x, p) \wedge \nu(x) + (\operatorname{div} E)^\pm(x, p) \nu(x)$, $x \in \Gamma$, непрерывно отображают $H_{1/2,p}(\Gamma)$ в $H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Определим операторы $J_{\chi,p}^\pm$ формулами

$$J_{\chi,p}^\pm F = E_\tau^\pm \pm \chi(\mu p)^{-1} (\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu + \{p(\operatorname{div} E)^\pm - 2\sigma[(\partial_\nu E_\nu)^\pm \pm \varepsilon \chi p E_\nu^\pm]\} \nu, \quad (31)$$

где E – решение задачи (30), $p = \sigma + i\zeta$.

ЛЕММА 3. *Существует $\kappa_0 > 0$ такое, что при всех $\kappa \geq \kappa_0$, $p \in \mathbb{C}_\kappa$ операторы $J_{\chi,p}^\pm$ осуществляют биективные отображения*

$$J_{\chi,p}^\pm : H_{1/2,p}(\Gamma) \rightarrow H_{-1/2,p}(\Gamma). \quad (32)$$

Для любого $F \in H_{1/2,p}(\Gamma)$ справедливо неравенство

$$\|F\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c \sigma^{-1} |p|^2 (\|(J_{\chi,p}^\pm F)_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma} + |p|^{-2} \|(J_{\chi,p}^\pm F)_\nu\|_{-1/2,p;\Gamma}). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность отображений (32) следует из сделанного ранее замечания. Интегрируя по частям и переходя к локальным координатам при преобразовании поверхностных интегралов, получим

$$\sum_{i=1}^3 \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^\pm}^2 = \|\operatorname{div} E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \|\operatorname{rot} E\|_{0,\Omega^\pm}^2 \mp 2\Re(\nu \operatorname{Div} E_\tau^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma} + A(E^\pm),$$

где для нормы пространства $L^2(\Omega^\pm)$ использовано то же обозначение, что и для нормы в $[L^2(\Omega^\pm)]^3$, а $A(E^\pm)$ допускает оценку

$$A(E^\pm) \leq c\|E^\pm\|_{0,\Gamma}. \quad (34)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (1 + |p|^2)\|E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + a^2 \sum_{i=1}^3 \|\nabla E_i\|_{0,\Omega^\pm}^2 \\ = (1 + |p|^2)\|E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + a^2 (\|\operatorname{div} E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \|\operatorname{rot} E\|_{0,\Omega^\pm}^2) \\ \mp 2a^2 \Re(\nu \operatorname{Div} E_\tau^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma} + A(E^\pm). \end{aligned} \quad (35)$$

В [11] доказано равенство

$$\begin{aligned} |p|^2\|E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + a^2 (\|\operatorname{div} E\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \|\operatorname{rot} E\|_{0,\Omega^\pm}^2) \\ = \pm a^2 \sigma^{-1} \Re\{\bar{p}((\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu, E_\tau^\pm)_{0,\Gamma} + \bar{p}(\nu(\operatorname{div} E)^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma}\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (34)–(36) и (17) следует существование $\kappa_0 > 0$ такого, что при $\sigma > \kappa_0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|E\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 \leq \pm c\sigma^{-1} \Re\{\bar{p}((\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu, E_\tau^\pm)_{0,\Gamma} + \bar{p}(\nu(\operatorname{div} E)^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma} \\ - 2\sigma(\nu \operatorname{Div} E_\tau^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma}\} \\ = \pm c\sigma^{-1} \Re\{\bar{p}((\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu, E_\tau^\pm)_{0,\Gamma} - p(\nu(\operatorname{div} E)^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma} \\ + 2\sigma(\nu(\partial_\nu E_\nu)^\pm, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma}\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя определение операторов $J_{\chi,p}^\pm$, перепишем (37) в виде

$$\begin{aligned} \|E\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 \leq c\sigma^{-1} \Re\{\chi^{-1}\mu|p|^2(J_{\chi,p}^\pm F, E_\tau^\pm)_{0,\Gamma} \mp (J_{\chi,p}^\pm F, E_\nu^\pm)_{0,\Gamma}\} \\ - c\sigma^{-1} \Re\{\chi^{-1}\mu|p|^2\|E_\tau^\pm\|_{0,\Gamma}^2 + 2\varepsilon\sigma\chi p\|E_\nu^\pm\|_{0,\Gamma}^2\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая положительность χ , с помощью теоремы о следах приходим к неравенству

$$\|E^\pm\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c|p|^2\sigma^{-1} (\|(J_{\chi,p}^\pm F)_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma} + |p|^{-2}\|(J_{\chi,p}^\pm F)_\nu\|_{-1/2,p;\Gamma}),$$

доказывающему (33). Для завершения доказательства леммы проверим плотность областей значений операторов $J_{\chi,p}^\pm$ в пространстве $H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Предположив противное, найдем нетривиальный элемент $\Phi \in H_{1/2,p}(\Gamma)$ такой, что

$$((J_{\chi,p}^\pm F)_\tau, \Phi_\tau)_{0,\Gamma} + ((J_{\chi,p}^\pm F)_\nu, \Phi_\nu)_{0,\Gamma} = 0 \quad (39)$$

для всех $F \in H_{1/2,p}(\Gamma)$. Положим $\Phi_\tau = \chi^{-1}\mu|p|^2\Psi_\tau$, $\Phi_\nu = \mp\Psi_\nu$. Взяв в (39) $F = \Psi$, учитывая (38), придем к противоречию, завершающему доказательство леммы.

Введем при каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$, $\kappa \geq \kappa_0$, два оператора $T_{\chi,p}^\pm$, действующие на элементы $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$ по формуле $T_{\chi,p}^\pm F_\tau = F_\tau \pm (\mu p)^{-1}\chi(\operatorname{rot} E)^\pm \wedge \nu$, где E – решение задачи (19), (20).

ТЕОРЕМА 2. При всех $p \in \mathbb{C}_\kappa$, $\kappa \geq \kappa_0$, операторы $T_{\chi,p}^\pm$ осуществляют биективные отображения

$$T_{\chi,p}^\pm: H_{1/2,p}^\tau(\Gamma) \rightarrow H_{-1/2,-1/2,p}^\tau(\text{Div}, \Gamma).$$

Для любого элемента $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$ справедливы неравенства

$$\|T_{\chi,p}^\pm F_\tau\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-1} \|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}, \quad (40)$$

$$\|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-1} |p|^2 \|T_{\chi,p}^\pm F_\tau\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (19), (21) и определения норм в пространствах $H_{m,p}(\Gamma)$, $m = \pm 1/2$, следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|T_{\chi,p}^\pm F_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma} &\leq \|F_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma} + c\|\lambda_p^\pm H\|_{-1/2,p;\Gamma} \\ &\leq c\sigma^{-1} \|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \|\text{Div } T_{\chi,p}^\pm F_\tau\|_{-1/2,p;\Gamma} &\leq c(\|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma} + (1 + |p|)^{-1} \|\text{Div } T_p^\pm F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}) \\ &\leq c\sigma^{-1} (1 + |p|) \|F_\tau\|_{1/2,p;\Gamma}. \end{aligned} \quad (43)$$

Неравенство (40) является следствием (42) и (43). Напомним, что в силу леммы 3 уравнение $J_{\chi,p}^\pm F = G$ однозначно разрешимо для любого элемента $G \in H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Возьмем произвольный элемент $G_\tau \in H_{-1/2,-1/2,p}^\tau(\text{Div}, \Gamma)$ и положим $G_\nu = \nu 2\sigma \text{Div } G_\tau \in H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Построим последовательно элемент $F = (J_{\chi,p}^\pm)^{-1} G_\tau \in H_{1/2,p}(\Gamma)$ и поле $E(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$, являющееся решением задачи (30). Проверим, что $\text{div } E(x, p) = 0$, $x \in \Omega^\pm$. В самом деле, $\text{div } E(x, p)$ удовлетворяет уравнению

$$p^2 \text{div } E(x, p) - a^2 \Delta \text{div } E(x, p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm. \quad (44)$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$\text{Div } G_\tau = \text{Div } E_\tau^\pm \pm \chi(\mu p)^{-1} (\partial_\nu \text{div } E)^\pm \mp \chi \varepsilon p E_\nu^\pm.$$

С учетом специального выбора G_ν получаем

$$\mu |p|^2 (2\sigma \chi)^{-1} (\text{div } E)^\pm \pm (\partial_\nu \text{div } E)^\pm = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует, что $\text{div } E(x, p) = 0$, $x \in \Omega^\pm$. Но это значит, что поле $\{E, H\}(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$, где $H(x, p) = -(\mu p)^{-1} \text{rot } E(x, p)$, является решением системы (19) и $T_{\chi,p}^\pm F_\tau = (J_{\chi,p}^\pm F)_\tau$. Отсюда следует сюръективность операторов $T_{\chi,p}^\pm$. Неравенство (41) следует из (33). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При всех $p \in \mathbb{C}_{\kappa_0}$ задача (11) однозначно разрешима для любого $F_\tau \in H_{1/2,p}^\tau(\Gamma)$. Решение $E \in H_{1,p}(\Omega^\pm)$, $H \in H_p(\text{rot}, \Omega^\pm)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения следует из теоремы 2 и разрешимости задачи (19), (20).

Перейдем к изучению свойств операторов, порожденных поверхностными потенциалами первого и второго рода, определенными на плотностях класса $[C^2(\Sigma)]^3$ формулами (5), (6) соответственно. Считая плотности α и β равными нулю, когда $t < 0$, обозначим преобразования Лапласа этих потенциалов через $(V_p \alpha_\tau)(x, p) = \{(V_p \alpha_\tau)_E, (V_p \alpha_\tau)_H\}(x, p)$ и $(W_p \beta_\tau)(x, p) = \{(W_p \beta_\tau)_E, (W_p \beta_\tau)_H\}(x, p)$. Заметим, что формулы скачков (7), (8) после перехода к преобразованиям Лапласа принимают вид

$$\begin{aligned} (V_p \alpha_\tau)^\pm(x, p) \\ = \mp \frac{1}{2} \{ (\varepsilon p)^{-1} \nu(x) \operatorname{Div} \alpha_\tau(x, p), \nu(x) \wedge \alpha_\tau(x, p) \} + (V_p \alpha_\tau)^0(x, p), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} (W_p \beta_\tau)^\pm(x, p) \\ = \mp \frac{1}{2} \{ \beta_\tau(x, p) \wedge \nu(x), (\mu p)^{-1} \nu(x) \operatorname{Div} \beta_\tau(x, p) \} + (W_p \beta_\tau)^0(x, p), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (47)$$

ТЕОРЕМА 3. Для любой плотности $\alpha_\tau \in H_{-1/2, 1/2, p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$, $p \in \mathbb{C}_\kappa$, $\kappa > 0$, поле $E(x, p) = (V_p \alpha_\tau)_E(x, p)$ принадлежит пространствам $H_{1, p}(\Omega^\pm)$, причем $E_\tau^+ = E_\tau^- = E_\tau \in H_{1/2, p}^\tau(\Gamma)$. Справедливо неравенство

$$\|E\|_{1, p; \Omega^+} + \|E\|_{1, p; \Omega^-} \leq c \sigma^{-1} |p|^2 \|\alpha_\tau\|_{-1/2, 1/2, p; \Gamma}. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_\tau \in [C^2(\Gamma)]^3$, $\{E, H\}(x, p) = (V_p \alpha_\tau)(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$. Из (23) и (46) следует равенство

$$\varepsilon (\|E\|_{0, \Omega^+}^2 + \|E\|_{0, \Omega^-}^2) + \mu (\|H\|_{0, \Omega^+}^2 + \|H\|_{0, \Omega^-}^2) = \sigma^{-1} \Re(\lambda_p^+ H - \lambda_p^- H, E_\tau)_{0, \Gamma}.$$

Отсюда и из (46) следует неравенство

$$\|E\|_{p, \operatorname{rot}; \Omega^+}^2 + \|E\|_{p, \operatorname{rot}; \Omega^-}^2 \leq c \sigma^{-1} |p|^2 \|\alpha_\tau\|_{-1/2, p; \Gamma} \|E_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}.$$

Поскольку

$$\|E_\nu^+ - E_\nu^-\|_{1/2, p; \Gamma} \leq c |p|^{-1} \|\operatorname{Div} \alpha_\tau\|_{1/2, p; \Gamma},$$

из (13) следует, что

$$\|E\|_{1, p; \Omega^+}^2 + \|E\|_{1, p; \Omega^-}^2 \leq c (\sigma^{-1} |p|^2 \|\alpha_\tau\|_{-1/2, p; \Gamma} \|E_\tau\|_{1/2, p; \Gamma} + |p|^{-2} \|\operatorname{Div} \alpha_\tau\|_{1/2, p; \Gamma}^2).$$

Отсюда и из теоремы о следах следует (48). Плотность гладких вектор-функций в пространстве $H_{-1/2, 1/2, p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$ завершает доказательство теоремы.

Введем операторы $K_{\chi, p}^\pm$, сопоставляющие плотности $\alpha_\tau \in H_{-1/2, 1/2, p}^\tau(\operatorname{Div}, \Gamma)$ поля $T_{\chi, p}^\pm(\gamma_p^\pm(V_p \alpha_\tau)_E)_\tau$.

ТЕОРЕМА 4. Операторы $K_{\chi,p}^{\pm}$ при всех $p \in \mathbb{C}_{\kappa_0}$ осуществляют биективные отображения

$$K_{\chi,p}^{\pm} : H_{-1/2,1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma) \rightarrow H_{-1/2,-1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma).$$

Для всех $G_{\tau} \in H_{-1/2,-1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma)$ справедливо неравенство

$$\|(K_{\chi,p}^{\pm})^{-1}G_{\tau}\|_{-1/2,1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-2}|p|^2\|G_{\tau}\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность операторов $K_{\chi,p}^{\pm}$ следует из теорем 2 и 3 и теоремы о следах. Заметим, что для гладких плотностей α_{τ} из формул скачков (46) следует равенство $(T_p^{+} - T_p^{-})(T_{\chi,p}^{\pm})^{-1}K_{\chi,p}^{\pm}\alpha_{\tau} = \alpha_{\tau}$, которое в силу непрерывности участвующих в нем операторов остается справедливым для любого элемента $\alpha_{\tau} \in H_{-1/2,1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma)$. Отсюда и из леммы 2 следует биективность операторов $K_{\chi,p}^{\pm}$. Неравенство (49) следует из (41) и (21). Теорема доказана.

Перейдем к изучению свойств операторов, порожденных поверхностными потенциалами второго рода.

ТЕОРЕМА 5. Для любой плотности $\beta_{\tau} \in H_{1/2,p}^{\tau}(\Gamma)$ при $p \in \mathbb{C}_{\kappa}$, $\kappa > 0$, поле $E(x, p) = (W_p\beta_{\tau})_E(x, p) \in H_{1,p}(\Omega^{\pm})$, причем $T_p^{+}E_{\tau}^{+} = T_p^{-}E_{\tau}^{-} \in H_{-1/2,1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma)$. Справедливо неравенство

$$\|E\|_{1,p;\Omega^{+}} + \|E\|_{1,p;\Omega^{-}} \leq c\sigma^{-1}|p|^2\|\beta_{\tau}\|_{1/2,p;\Gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы с учетом формул скачков (47) совершенно аналогично доказательству теоремы 3 и поэтому здесь не приводится.

Определим на элементах $\beta_{\tau} \in H_{1/2,p}^{\tau}(\Gamma)$ операторы $N_{\chi,p}^{\pm}$ формулой $N_{\chi,p}^{\pm}\beta_{\tau} = T_{\chi,p}^{\pm}(\gamma_p^{\pm}(W_p\beta_{\tau})_E)_{\tau}$.

ТЕОРЕМА 6. Операторы $N_{\chi,p}^{\pm}$ при $p \in \mathbb{C}_{\kappa_0}$ осуществляют биективные отображения

$$N_{\chi,p}^{\pm} : H_{1/2,p}^{\tau}(\Gamma) \rightarrow H_{-1/2,-1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma).$$

Для любого элемента $G_{\tau} \in H_{-1/2,-1/2,p}^{\tau}(\text{Div}, \Gamma)$ справедливо неравенство

$$\|(N_{\chi,p}^{\pm})^{-1}G_{\tau}\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\sigma^{-3}|p|^4\|G_{\tau}\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность операторов $N_{\chi,p}^{\pm}$ следует из теоремы 5, теоремы о следах и (40). Обозначив через I единичный оператор, заметим, что для любой гладкой плотности β_{τ} из (47) следуют равенства

$$(I - (T_p^{-})^{-1}T_p^{+})(T_{\chi,p}^{+})^{-1}N_{\chi,p}^{+}\beta_{\tau} = ((T_p^{+})^{-1}T_p^{-} - I)(T_{\chi,p}^{-})^{-1}N_{\chi,p}^{-}\beta_{\tau} = \nu \wedge \beta_{\tau},$$

которые в силу непрерывности входящих в них операторов остаются справедливыми для всех $\beta_{\tau} \in H_{1/2,p}^{\tau}(\Gamma)$. Отсюда следует биективность операторов $N_{\chi,p}^{\pm}$. Неравенство (50) следует из (21), (22) и (41). Теорема доказана.

5. Разрешимость систем граничных уравнений. Введем при всех $l \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ пространства $H_{r;1,l,\kappa}(G^\pm)$, состоящие из равных нулю при $t < 0$ трехкомпонентных определенных в $\Omega^\pm \times \mathbb{R}$ вектор-функций $U(x, t)$, преобразования Лапласа которых $U(x, p)$ голоморфно отображают $\mathbb{C}_\kappa$ в стандартные пространства Соболева $H_{1,0}(\Omega^\pm)$ и таких, что

$$\sup_{\sigma > \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|)^{2l} \|U(x, p)\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 d\zeta < \infty, \quad p = \sigma + i\zeta. \quad (51)$$

Квадраты норм в этих пространствах определяются левой частью неравенства в (51). Отметим, что норма пространства $H_{r;1,l,\kappa}(G^\pm)$ эквивалентна норме, квадрат которой при натуральных l задается формулой

$$\int_{G^\pm} \exp(-2\kappa t) \{ |\partial_t^l U(x, t)|^2 + |\nabla \partial_t^l U(x, t)|^2 \} dX.$$

Пространства $H_{r;l,\kappa}(\text{rot}, G^\pm)$ состоят из равных нулю при $t < 0$ трехкомпонентных вектор-функций, преобразования Лапласа $U(x, p)$ которых голоморфно отображают $\mathbb{C}_\kappa$ в пространство $H_0(\text{rot}, \Omega^\pm)$ и таких, что

$$\sup_{\sigma > \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|)^{2l} \|U(x, p)\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm}^2 d\zeta < \infty, \quad p = \sigma + i\zeta.$$

Наконец, пространства $H_{r;m,l,\kappa}^\tau(\Sigma^+)$ и $H_{r;-1/2,m,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+)$, $m = \pm 1/2$, $l \in \mathbb{R}$, состоят из равных нулю при $t < 0$ касательных к Γ векторных полей $U(x, t)$, $X \in \Gamma \times \mathbb{R}$, преобразования Лапласа которых голоморфно отображают $\mathbb{C}_\kappa$ в пространства $H_{m,0}^\tau(\Gamma)$, $H_{-1/2,m,0}^\tau(\text{Div}, \Gamma)$ соответственно и таких, что

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma > \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|)^{2l} \|U(x, p)\|_{m,p;\Gamma}^2 d\zeta < \infty, \\ \sup_{\sigma > \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |p|)^{2l} \|U(x, p)\|_{-1/2,m,p;\Gamma}^2 d\zeta < \infty, \end{aligned}$$

$p = \sigma + i\zeta$. Обозначив через $\gamma^\pm$ и $\lambda^\pm$ операторы следов, непрерывно при каждом $l \in \mathbb{R}$ отображающие $H_{r;1,l,\kappa}(G^\pm)$ на $H_{r;1/2,l,\kappa}(\Sigma^+)$ и $H_{r;l,\kappa}(\text{rot}, G^\pm)$ в $H_{r;-1/2,l,\kappa}^\tau(\Sigma^+)$ соответственно, приведем вариационную постановку задач $D^\pm$. Пусть

$$G_\tau \in H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+), \quad l \in \mathbb{R}.$$

Решением задачи D^+ или D^- назовем поле $\{E, H\}$, $E \in H_{r;1,0,\kappa}(G^\pm)$, $H \in H_{r;0,\kappa}(\text{rot}, G^\pm)$, удовлетворяющее условию $(\gamma^\pm E)_\tau \pm \chi \lambda^\pm H = G_\tau$ и уравнению

$$\int_{G^\pm} \{ (\text{rot } E, H') - (\text{rot } H, E') + \varepsilon(\partial_t E, E') + \mu(\partial_t H, H') \} dX = 0$$

для любых бесконечно дифференцируемых в $G^\pm$ векторных полей $\{E', H'\}$ с компактными носителями, лежащими в $G^\pm$.

Представление решений задач $D^\pm$ потенциалами $(V\alpha_\tau)(X)$ и $(W\beta_\tau)(X)$ привело нас к системам граничных уравнений (9), (10), которые мы запишем в виде $K_\chi^\pm \alpha_\tau = G_\tau$, $N_\chi^\pm \beta_\tau = G_\tau$.

ТЕОРЕМА 7. *Существует $\kappa_0 > 0$ такое, что при $\kappa \geq \kappa_0$ и любом $l \in \mathbb{R}$ системы граничных уравнений (9), (10) однозначно разрешимы для любого элемента $G_\tau \in H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+)$. Разрешающие операторы этих систем осуществляют непрерывные отображения*

$$(K_\chi^\pm)^{-1}: H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+) \rightarrow H_{r;-1/2,1/2,l-2,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+),$$

$$(N_\chi^\pm)^{-1}: H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+) \rightarrow H_{r;1/2,l-4,\kappa}^\tau(\Sigma^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнив в системах (9), (10) переход к преобразованиям Лапласа, приходим к системам граничных уравнений $K_{\chi,p}^\pm \alpha_\tau = G_\tau$, $N_{\chi,p}^\pm \beta_\tau = G_\tau$ соответственно. Разрешимость таких систем при каждом $p \in \mathbb{C}_\kappa$, $\kappa \geq \kappa_0$, следует из теорем 4 и 6. Из включения $G_\tau \in H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+)$ следует, что преобразование Лапласа $G_\tau(x, p)$ голоморфно отображает $\mathbb{C}_\kappa$ в пространство $H_{-1/2,-1/2,0}^\tau(\Gamma)$. Повторив доказательство, проведенное в [11], убеждаемся в том, что поля $\alpha_\tau(x, p)$ и $\beta_\tau(x, p)$, являющиеся решениями систем $K_{\chi,p}^\pm \alpha_\tau = G_\tau$, $N_{\chi,p}^\pm \beta_\tau = G_\tau$, голоморфно отображают $\mathbb{C}_\kappa$ в пространства $H_{-1/2,1/2,0}^\tau(\Gamma)$, $H_{1/2,0}^\tau(\Gamma)$ соответственно. Это утверждение вместе с (48), (50) завершает доказательство теоремы.

Решив системы (9), (10), построим поля $(V\alpha_\tau)(X)$, $(W\beta_\tau)(X)$ с найденными плотностями. Дают ли они решения задач $D^\pm$?

ТЕОРЕМА 8. *Если $G_\tau \in H_{r;-1/2,-1/2,l,\kappa}^\tau(\text{Div}, \Sigma^+)$, $\kappa \geq \kappa_0$, $l \geq 3$, то потенциалы $(V\alpha_\tau)(X)$, $(W\beta_\tau)(X)$, $X \in G^\pm$, являются решениями задач $D^\pm$. Их электрические компоненты принадлежат пространствам $H_{r;l-3,\kappa}(G^\pm)$, магнитные – пространствам $H_{r;l-3,\kappa}(\text{rot}, G^\pm)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α_τ и β_τ – решения систем (9), (10) соответственно. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что электрические компоненты $E(x, t)$ обоих потенциалов принадлежат пространству $H_{r;l-3,\kappa}(G^\pm)$, а магнитные компоненты $H(x, t)$ – пространству $H_{r;l-3,\kappa}(\text{rot}, G^\pm)$. Голоморфность отображения

$$E(x, p): \mathbb{C}_\kappa \rightarrow H_{1,0}(\Omega^\pm),$$

а также отображения

$$H(x, p): \mathbb{C}_\kappa \rightarrow H_0(\text{rot}, \Omega^\pm)$$

проверяется так же, как это было сделано в [11]. Заметим, что для $E(x, p)$ справедливо неравенство

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 \leq c(\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm}^2 + \|E_\tau^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}^2).$$

Но из (24) и (21) следует неравенство

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm} \leq c|p| \cdot \|E_\tau^\pm\|_{1/2,p;\Gamma}.$$

Наконец, с помощью (41) получаем

$$\|E\|_{1,p;\Omega^\pm} \leq c|p|^3 \|G_\tau\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}.$$

Для магнитных компонент $H(x, p)$ справедливы неравенства

$$\|H\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm} \leq c\|E\|_{p,\text{rot};\Omega^\pm} \leq c|p|^3 \|G_\tau\|_{-1/2,-1/2,p;\Gamma}.$$

Полученные неравенства доказывают требуемое утверждение. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 7 и 8 справедливы и в случае, когда переменная t изменяется на конечном интервале $(0, T)$. При этом в определениях функциональных пространств можно положить $\kappa = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [2] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [3] Bamberger A., Ha Duong T. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique // Math. Methods Appl. Sci. 1986. V. 8. № 4. P. 405–435.
- [4] Bamberger A., Ha Duong T. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide // Math. Methods Appl. Sci. 1986. V. 8. № 5. P. 598–608.
- [5] Chudinovich I., Dieng S. Les méthodes de la théorie des potentiels dans les problèmes de la diffraction des ondes acoustiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. V. 320. P. 885–889.
- [6] Chudinovich I., Dieng S. Résolubilité des équations aux limites dans les problèmes de la diffraction non-stationnaire d'ondes acoustiques sur des variétés à bord // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. V. 320. P. 1019–1023.
- [7] Chudinovich I. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1993. V. 16. № 3. P. 203–227.
- [8] Chudinovich I. Methods of potential theory in the dynamics of elastic media // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 427–446.
- [9] Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных упругих сред // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 124–128.
- [10] Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции упругих волн на пространственных трещинах // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 119–123.
- [11] Chudinovich I. The solvability of boundary equations in mixed problems for nonstationary Maxwell system // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. № 5. P. 425–448.
- [12] Chudinovich I., Lytova A. Mathematical questions of the boundary equation method in nonstationary problems of the diffraction of electromagnetic waves // Proceedings of the 6th International Conference on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Lviv, 1999. P. 73–75.
- [13] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
- [14] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
- [15] Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с параметром в классах обобщенных функций // Сиб. матем. ж. 1981. Т. 22. № 2. С. 214–218.

Харьковский национальный университет им. В. Каразина, Украина
E-mail: main@dolb.kharkov.ua

Поступило
20.06.1997
Исправленный вариант
24.11.1998