Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, Равновесные состояния с неполными носителями и периодические траектории, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 230–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:19:21

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ С НЕПОЛНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

С. В. Савченко

§ 1. Введение

Пусть $\Omega = \{1, \dots, l\}$, где $l > 1$, и A – квадратная матрица порядка l из нулей и единиц. Введем пространство двусторонне-бесконечных последовательностей:

$$X_A = \{x = \{x_i\} : x_i \in \Omega, A(x_i, x_{i+1}) = 1, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Если множество Ω снабжено дискретной топологией, то X_A является компактом в тихоновской топологии прямого произведения. Эта топология порождается любой из метрик $d_\theta(x, y) = \theta^n$, где $n = \inf\{|i| : x_i \neq y_i\}$ и $0 < \theta < 1$.

На пространстве X_A определим сдвиг $\sigma : \sigma(x) = z$, где $z_i = x_{i+1}$. Очевидно, он является гомеоморфизмом. Пара (X_A, σ) называется топологической марковской цепью (ТМЦ). В дальнейшем мы будем предполагать, что ТМЦ (X_A, σ) неразложима, т.е. для каждой пары $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{v} \in \Omega$, $\mathbf{w} \in \Omega$, существует такое p , что $A^p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$.

Обозначим через I_A семейство инвариантных относительно сдвига вероятностных мер, определенных на σ -алгебре борелевских множеств пространства X_A . Пусть $h_\mu(\sigma)$ – энтропия сдвига относительно меры $\mu \in I_A$. Для каждой непрерывной функции f положим

$$P(X_A; f; \mu) = h_\mu(\sigma) + \int_{X_A} f d\mu.$$

Равенство $P(X_A; f) = \sup\{P(X_A; f; \mu) : \mu \in I_A\}$ определяет функционал $P(X_A; f)$ на пространстве непрерывных функций $C(X_A)$. Положим

$$I(X_A; f) = \{\mu \in I_A : P(X_A; f; \mu) = P(X_A; f)\}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант M8X000.

Для любого $f \in C(X_A)$ множество $I(X_A; f)$ непусто [1]. Его элементы называются равновесными состояниями для функции f . Изучение зависимости структуры множества $I(X_A; f)$ от свойств функции f является основной задачей статистической механики одномерных решетчатых систем. В случае, когда f – гёльдеровская функция относительно метрики d_θ , множество $I(X_A; f)$ состоит из одной точки, единственное равновесное состояние μ имеет полный носитель, т.е. $\mu(B) > 0$ для любого открытого множества B , и автоморфизм (σ, μ) изоморфен сдвигу Бернулли [1]. Основным инструментом изучения свойств равновесного состояния μ для таких функций является введенный в [2] оператор Рюэля (см. также [3, с. 147]). В предлагаемой работе используется метод производящих функций. Получен критерий существования $\mu \in I(X_A; f)$ с $\mu(B) = 0$, где B – фиксированное цилиндрическое множество, без каких-либо ограничений на непрерывную функцию f . При помощи этого критерия обобщены результаты [4] на более широкий класс функций.

§ 2. Носители равновесных состояний

Пусть $\gamma = \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^n$, $n \geq 0$, – произвольная конечная последовательность символов из Ω . Число n будем называть длиной последовательности и обозначать через $\ell(\gamma)$. Положим $\text{Pr}_i(\gamma) = \mathbf{v}_i$ при $0 \leq i \leq \ell(\gamma)$. Если $\ell(\gamma) \geq 1$ и $\text{Pr}_0(\gamma) = \text{Pr}_{\ell(\gamma)}(\gamma) = \mathbf{v}$, то последовательность γ называется $\mathbf{v}$ -циклом.

Пусть A – произвольная матрица из нулей и единиц. Последовательность γ будем называть *допустимой*, если $A(\text{Pr}_i(\gamma), \text{Pr}_{i+1}(\gamma)) = 1$ при $0 \leq i \leq \ell(\gamma) - 1$. Множество всех допустимых последовательностей обозначим через $P(A)$. Если $\ell(\gamma) = 0$, то будем считать, что $\gamma \in P(A)$. Пусть $K(A, \mathbf{v})$ – множество всех $\mathbf{v}$ -циклов, принадлежащих $P(A)$, и $L(A, \mathbf{v})$ – множество тех $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$, у которых $\text{Pr}_i(\gamma) \neq \mathbf{v}$ при $1 \leq i \leq \ell(\gamma) - 1$ (если $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$, то будем считать, что $\mathbf{v}$ -цикл γ с $\ell(\gamma) = 1$ принадлежит $L(A, \mathbf{v})$). Объединение последовательности, состоящей из одного символа $\mathbf{v}$, и множества $K(A, \mathbf{v})$ обозначим через $K^+(A, \mathbf{v})$.

Для любого $\gamma \in P(A)$ с $\ell(\gamma) \geq 1$ положим

$$B(\gamma) = \{x \in X_A : x_i = \text{Pr}_i(\gamma), i = 0, \dots, \ell(\gamma)\},$$

$$f^*(\gamma) = \max \left\{ \sum_{k=0}^{\ell(\gamma)-1} f(\sigma^k x) : x \in B(\gamma) \right\},$$

$$Q_f^{\max}(\gamma) = \exp(f^*(\gamma)).$$

Если $\ell(\gamma) = 0$, то будем считать, что $f^*(\gamma) = 0$ и $Q_f^{\max}(\gamma) = 1$. Множество $\{x \in X_A : x_0 = \mathbf{v}\}$ обозначим через $B(\mathbf{v})$.

Для каждого $\mathbf{v} \in \Omega$ положим:

$$\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) = \sum_{\gamma \in K(A, \mathbf{v})} Q_f^{\max}(\gamma) z^{\ell(\gamma)}, \quad (1)$$

$$\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) = \sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} Q_f^{\max}(\gamma) z^{\ell(\gamma)}. \quad (2)$$

Обозначим радиусы сходимости рядов (1) и (2) соответственно через $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(f)$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$. Очевидно, $0 < \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(f) \leq \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$. Из неразложимости ТМЦ (X_A, σ) следует, что $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(f) = \mathbf{R}_{\mathbf{w}}(f)$ для любых $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ из Ω . Поэтому в дальнейшем мы будем писать $\mathbf{R}(f)$ вместо $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(f)$. Величину $P(X_A; f)$ можно определить без использования инвариантных вероятностных мер (см. [1]). Из этого определения легко вывести, что

$$\mathbf{R}(f) = \exp(-P(X_A; f)). \quad (3)$$

Пусть $S(\mathbf{r})$ – открытый круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\mathbf{r}$. Из формулы Коши–Адамара и теоремы Вейерштрасса следует, что суммы рядов $\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$ и $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$ являются аналитическими функциями соответственно в $S(\mathbf{R}(f))$ и $S(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$. В дальнейшем мы будем отождествлять степенные ряды и их суммы.

Точку z_0 комплексной плоскости $\mathbb{C}$ будем называть единицей функции g , если $g(z_0) = 1$. Введем новую величину $T_{\mathbf{v}}(f)$, которая совпадает с $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$, если $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) \leq 1$, и равна единице функции $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$, принадлежащей $(0, \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$, в противном случае.

ЛЕММА 1. Для любого $\mathbf{v} \in \Omega$ при $z \in (0, T_{\mathbf{v}}(f))$ имеет место следующее неравенство:

$$\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) \leq \frac{\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)}{1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любым двум последовательностям γ_1 и γ_2 с $\text{Pr}_{\ell(\gamma_1)}(\gamma_1) = \text{Pr}_0(\gamma_2)$ сопоставим последовательность $\gamma_1 \times \gamma_2$ длины $\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$, для которой $\text{Pr}_i(\gamma_1 \times \gamma_2) = \text{Pr}_i(\gamma_1)$ при $0 \leq i \leq \ell(\gamma_1)$ и $\text{Pr}_{i+\ell(\gamma_1)}(\gamma_1 \times \gamma_2) = \text{Pr}_i(\gamma_2)$ при $0 \leq i \leq \ell(\gamma_2)$. Операция $\times$ ассоциативна на множестве $K(A, \mathbf{v})$ и превращает его в полугруппу. Очевидно, $L(A, \mathbf{v})$ является множеством образующих этой полугруппы. Каждая последовательность из $K(A, \mathbf{v})$ однозначно разлагается на “множители” из $L(A, \mathbf{v})$, причем порядок их следования определяется тоже однозначно.

Так как для любых $\mathbf{v}$ -циклов γ_1 и γ_2 выполняется неравенство:

$$Q_f^{\max}(\gamma_1 \times \gamma_2) \leq Q_f^{\max}(\gamma_1) \times Q_f^{\max}(\gamma_2),$$

то при $z \geq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in K(A, \mathbf{v}) \setminus L(A, \mathbf{v})} Q_f^{\max}(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \\ & \leq \left(\sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} Q_f^{\max}(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \right) \left(\sum_{\gamma \in K(A, \mathbf{v})} Q_f^{\max}(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \right) \\ & = \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) \Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) \leq \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) + \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) \Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z).$$

Из определения величины $T_{\mathbf{v}}(f)$ следует, что $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z) < 1$ при $z \in (0, T_{\mathbf{v}}(f))$. Выполняя необходимые арифметические действия, получаем (4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $\mathbf{v} \in \Omega$ выполняется неравенство:

$$R(f) \geq T_{\mathbf{v}}(f). \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Для любого $\mathbf{v} \in \Omega$ справедливо следующее равенство:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_A; f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) = -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что

$$\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < \infty.$$

Так как

$$\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f - t\chi_{B(\mathbf{v})}}^{\max}(z) = \exp(-t) \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z), \quad (7)$$

то существует такое $u > 0$, при котором

$$\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f - u\chi_{B(\mathbf{v})}}^{\max}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < 1.$$

Поэтому $T_{\mathbf{v}}(f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$ при $t > u$. В силу следствия 1 имеем $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) \leq \mathbf{R}(f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) \leq \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$ при любом $t > u$. Таким образом, $P(X_A; f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) = -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$ для $t > u$.

Пусть теперь $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = \infty$. Тогда при любом $t > 0$ величина $T_{\mathbf{v}}(f - t\chi_{B(\mathbf{v})})$ совпадает с единицей функции $\exp(-t) \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$,

принадлежащей интервалу $(0, \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$. Последняя, очевидно, стремится к $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}(f - t\chi_{B(\mathbf{v})}) = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f).$$

Лемма доказана.

Пусть $A \setminus \mathbf{v}$ – матрица, полученная из матрицы A при удалении $\mathbf{v}$ -столбца и $\mathbf{v}$ -строки (заметим, что матрица $A \setminus \mathbf{v}$ не обязана быть неразложимой). Если множество $X_{A \setminus \mathbf{v}}$ пусто, то функция $\varphi_{X_{A \setminus \mathbf{v}}, f}(z)$ является полиномом и, следовательно, $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) = \infty$. В этом случае будем считать, что $P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f) = -\infty$.

ЛЕММА 3. Для любого $\mathbf{v} \in \Omega$ справедливо равенство:

$$P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f) = -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда множество $X_{A \setminus \mathbf{v}}$ пусто, утверждение леммы очевидно. Предположим, что $X_{A \setminus \mathbf{v}} \neq \emptyset$.

Очевидно, $P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f) \leq P(X_A; f - t\chi_{B(\mathbf{v})})$ при любом $t > 0$. Перейдя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в обеих частях этого неравенства и воспользовавшись леммой 2, получим, что $P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f) \leq -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$.

Пусть $\{t_k\}$ – последовательность точек действительной прямой, стремящихся к бесконечности. При каждом k выберем произвольный элемент μ_k из множества $I(X_A; f - t_k\chi_{B(\mathbf{v})})$. Пусть μ – любая предельная точка последовательности $\{\mu_k\}$. Очевидно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B(\mathbf{v})) = 0$ и, следовательно, $\mu(B(\mathbf{v})) = 0$. В силу полунепрерывности сверху метрической энтропии сдвига $h(\sigma)$ на множестве I_A имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_A; f - t_k\chi_{B(\mathbf{v})}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_A; f - t_k\chi_{B(\mathbf{v})}; \mu_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_A; f; \mu_k) \\ &\leq P(X_A; f; \mu) = P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f; \mu) \leq P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо обратное неравенство и, следовательно, $P(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f) = -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Для существования $\mu \in I(X_A; f)$ с $\mu(B(\mathbf{v})) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) = \mathbf{R}(f). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 1 является прямым следствием леммы 3 и того факта, что при $X_{A \setminus \mathbf{v}} \neq \emptyset$ множество $I(X_{A \setminus \mathbf{v}}; f)$ непусто. Если множество $X_{A \setminus \mathbf{v}}$ пусто, то $\mu(B(\mathbf{v})) \neq 0$ для любого $\mu \in I_A$. Это, однако, не противоречит утверждению теоремы, так как $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) = \infty$, а величина $\mathbf{R}(f)$ всегда конечна. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При помощи теоремы 1 и перекодирования пространства X_A можно получить аналогичный критерий для произвольного цилиндрического множества B . Например, если $B = B(\mathbf{v}) \cup B(\mathbf{w})$, то для существования $\mu \in I(X_A; f)$ с $\mu(B) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы радиус сходимости ряда $\varphi_{X_{A \setminus \mathbf{v}}, B(\mathbf{w}), f}(z)$ (или $\varphi_{X_{A \setminus \mathbf{w}}, B(\mathbf{v}), f}(z)$) совпадал с $R(f)$.

§ 3. Класс функций $\mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$

Рассмотрим класс функций $\mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$, состоящий из непрерывных функций, постоянных на множествах $\sigma^k B(\gamma)$, где $\gamma \in L(A, \mathbf{v})$, $0 \leq k \leq \ell(\gamma) - 1$. Для такой функции f при обозначении величин $Q_f^{\max}(\gamma)$, где $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$, рядов $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$ и $\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^{\max}(z)$ по понятным причинам мы будем опускать индекс $\max$.

Пусть $f, g \in C(X_A)$. Из определения величины $P(X_A; \cdot)$ непосредственно следует, что функция $P(X_A; f + tg)$ действительного переменного t выпукла. Поэтому она имеет в каждой точке t правую и левую производные, которые не убывают по t и совпадают друг с другом всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек. Положим

$$\omega^+(f; g; t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(X_A; f + (t+h)g) - P(X_A; f + tg)}{h},$$

$$\omega^-(f; g; t) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{P(X_A; f + (t+h)g) - P(X_A; f + tg)}{h}.$$

Если $\omega^-(f; g; t) = \omega^+(f; g; t)$, то в точке t существует производная, которую в дальнейшем мы будем обозначать через $\omega(f; g; t)$.

ЛЕММА 4. Для любых $f, g \in C(X_A)$ функция $\omega^+(f; g; t)$ непрерывна справа, а $\omega^-(f; g; t)$ — слева. Кроме того, справедливы следующие тождества:

$$\omega^+(f; g; 0) = \max \left\{ \int g d\mu : \mu \in I(X_A; f) \right\}, \quad (10)$$

$$\omega^-(f; g; 0) = \min \left\{ \int g d\mu : \mu \in I(X_A; f) \right\}. \quad (11)$$

Множество $I(X_A; f)$ в этих двух равенствах можно заменить на множество $\hat{I}(X_A; f)$ всех эргодических равновесных состояний для функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $P(X_A; f + tg) \geq \int tg d\mu + P(X_A; f)$ для любого $\mu \in I(X_A; f)$. Поэтому

$$\omega^+(f; g; 0) \geq \sup \left\{ \int g d\mu : \mu \in I(X_A; f) \right\}. \quad (12)$$

Для доказательства обратного неравенства выберем сходящуюся к нулю последовательность точек $\{t_k\}$, в которых функция $P(X_A; f + tg)$ имеет производную. Пусть μ_k – произвольный элемент множества $I(X_A; f + t_k g)$. Тогда $\int g d\mu_k = \omega(f + t_k g; g; 0) = \omega(f; g; t_k)$. Если μ – предельная точка (в слабой топологии) последовательности $\{\mu_k\}$, то $\int g d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(f; g; t_k) \geq \omega^+(f; g; 0)$. Из очевидного равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - (f + t_k g)\| = 0$, где $\|\cdot\|$ – равномерная норма в пространстве $C(X_A)$, следует, что $\mu \in I(X_A; f)$ (см. [3, гл.6 упр.7]). Поэтому в силу (12) имеем $\int g d\mu = \omega^+(f; g; 0)$. Таким образом, функция $\omega^+(f; g; t)$ непрерывна справа и для нее справедливо тождество (10). Непрерывность слева функции $\omega^-(f; g; t)$ и тождество (11) доказываются аналогичным образом. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 4 следует, что условие $\text{card } I(X_A; f) = 1$ равносильно слабой дифференцируемости (определение см. в [5]) функционала $P(X_A; \cdot)$ в “точке” f (если $\text{card } I(X_A; f) = 1$, то производной Гато будет линейный непрерывный функционал, порожденный единственным равновесным состоянием).

Для любого множества $B \subseteq X_A$ (если $B = X_A$, то при обозначении соответствующих величин, степенных рядов и множеств мы будем опускать индекс B) и функции $f \in C(X_A)$ положим

$$\begin{aligned} \text{Fix}_n(X_A; B) &= \{x \in B : \sigma^n x = x\}, \\ N_n(X_A; B; f) &= \sum_{x \in \text{Fix}_n(X_A; B)} \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k x) \right), \\ W(X_A; B; f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n(X_A; B; f)}{n}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5 [3, с. 139]. Если ТМЦ (X_A, σ) неразложима, то для любого открытого множества $B \subseteq X_A$ (в частности, для любого цилиндрического подмножества вида $B(\gamma)$, где $\gamma \in P(A)$) справедливо тождество:

$$W(X_A; B; f) = P(X_A; f). \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $B = X_A$ равенство (13) имеет место и для любой разложимой ТМЦ (X_A, σ) .

Пусть

$$\begin{aligned}\Phi_{X_A, B, f}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n(X_A; B; f) z^n, \\ B_n &= \{x \in B : \sigma x \notin B, \dots, \sigma^{n-1} x \notin B, \sigma^n x \in B\}, \\ \varphi_{X_A, B, f}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} N_n(X_A; B_n; f) z^n.\end{aligned}$$

Если $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\gamma \in K^+(A, \mathbf{v})$, то при $z \in S(\mathbf{R}(f))$ имеем

$$\Phi_{X_A, B(\gamma), f}(z) = \frac{\varphi_{X_A, B(\gamma), f}(z)}{1 - \varphi_{X_A, B(\gamma), f}(z)}. \quad (14)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{R}(f) = T_{\mathbf{v}}(f). \quad (15)$$

Для f с $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) < \infty$ положим

$$p_f(\gamma) = \frac{Q_f(\gamma) \mathbf{R}(f)^{\ell(\gamma)}}{\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) \mathbf{R}(f)}$$

(штрих здесь обозначает дифференцирование).

ЛЕММА 6. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\gamma \in K^+(A, \mathbf{v})$. Тогда

- а) если $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) > 1$, то $\omega(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = p_f(\gamma)$;
- б) если $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = 1$ и $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < \infty$, то $\omega^-(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = 0$ и $\omega^+(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = p_f(\gamma)$;
- в) если $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < 1$ или $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = 1$ и $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = \infty$, то $\omega(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) > \mathbf{R}(f)$. В этом случае найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ величина $R(f_t)$, где $f_t = f + t\chi_{B(\mathbf{v})}$, совпадает с единицей функции $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f_t}(z)$, принадлежащей интервалу $(0, \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$ (см. (7)). По теореме о неявной функции существует производная функции $R(f_t)$ переменного t в точке $t = 0$, значение которой равно $-1/\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f))$. Так как $P(X_A; f_t) = -\ln \mathbf{R}(f_t)$, то

$\omega(f; \chi_{B(\mathbf{v})}; 0) = 1/\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f))\mathbf{R}(f)$. Пусть теперь $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$. Очевидно,

$$\Phi_{X_A, B(\gamma), f}(z) = Q_f(\gamma)z^{\ell(\gamma)}\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)$$

и, следовательно,

$$\varphi_{X_A, B(\gamma), f}(z) = Q_f(\gamma)z^{\ell(\gamma)} \frac{\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)}{1 - (1 - Q_f(\gamma)z^{\ell(\gamma)})\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)}.$$

Отсюда легко получить, что производная функции $\varphi_{X_A, B(\gamma), f}(z)$ в точке $z = \mathbf{R}(f)$ равна

$$\frac{\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f))}{Q_f(\gamma)\mathbf{R}(f)^{\ell(\gamma)}}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, получим, что

$$\omega(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = p_f(\gamma).$$

Пусть теперь $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = 1$ (в этом случае $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) = \mathbf{R}(f)$). При любом $t > 0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \omega(f; \chi_{B(\gamma)}; t) &= \frac{1}{\varphi'_{X_A, B(\gamma), f+t\chi_{B(\gamma)}}(\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\gamma)}))\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\gamma)})} \\ &= \frac{1}{\exp(t)\varphi'_{X_A, B(\gamma), f}(\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\gamma)}))\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\gamma)})}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности справа функции $\omega^+(f; \chi_{B(\gamma)}; t)$ имеем $\omega^+(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = p_f(\gamma)$, если $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) < \infty$, и $\omega^+(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = 0$ в противном случае. Так как $\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\mathbf{v})}) = \mathbf{R}(f)$ при $t < 0$, то $\omega^-(f; \chi_{B(\mathbf{v})}; 0) = 0$ и, следовательно, $\omega^-(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = 0$ для любого $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$.

Если $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполняется равенство $\mathbf{R}(f+t\chi_{B(\mathbf{v})}) = \mathbf{R}(f)$. Поэтому $\omega(f; \chi_{B(\mathbf{v})}; 0) = 0$. В силу леммы 4 в этом случае имеем $\omega(f; \chi_{B(\gamma)}; 0) = 0$ при любом $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$. Тогда
 в случае а) равновесное состояние для функции f единственно и имеет полный носитель;
 в случае б) имеем $\text{card } \hat{I}(X_A; f) \geq 2$, причем только одно эргодическое равновесное состояние имеет полный носитель;
 в случае с) для любого $\mu \in I(X_A; f)$ имеем $\mu(B(\mathbf{v})) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6 в случаях а) и б) существует эргодическое равновесное состояние μ , для которого $\mu(B(\mathbf{v})) > 0$. Пусть $B^\infty(\mathbf{v})$ – множество всех таких $x = \{x_i\} \in X_A$, для которых $x_i = \mathbf{v}$ при бесконечно многих как положительных, так и отрицательных i . По теореме Пуанкаре о возвращении $\mu(B^\infty(\mathbf{v})) = 1$. Предположим, что $\mu(B(\gamma)) < p_f(\gamma)$ при некотором $\gamma \in L(A, \mathbf{v})$. Тогда

$$\mu(B^\infty(\mathbf{v})) = \sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} \ell(\gamma) \mu(B(\gamma)) < \sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} \ell(\gamma) p_f(\gamma) = 1.$$

Если $\mu(B(\gamma_1 \times \gamma_2)) < p_f(\gamma_1 \times \gamma_2)$, где $\gamma_i \in L(A, \mathbf{v})$, $i = 1, 2$, то

$$\begin{aligned} \mu(B(\gamma_1)) &= \sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} \mu(B(\gamma_1 \times \gamma)) < \sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} p_f(\gamma_1 \times \gamma) \\ &= \varphi_{X_A; B(\mathbf{v}); f}(\mathbf{R}(f)) p_f(\gamma_1) = p_f(\gamma_1). \end{aligned}$$

Таким образом можно показать, что из неравенства $\mu(B(\gamma)) < p_f(\gamma)$ при некотором $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$ следует неравенство $\mu(B^\infty(\mathbf{v})) < 1$. Поэтому $\mu(B(\gamma)) = p_f(\gamma)$ для любого $\gamma \in K^+(A, \mathbf{v})$. Если $\nu \in I_A$ и $\nu(B(\gamma)) = p_f(\gamma)$ при $\gamma \in K^+(A; \mathbf{v})$, то $\nu = \mu$. Таким образом, эргодическое равновесное состояние, для которого $\mu(B(\mathbf{v})) > 0$, единственно и имеет полный носитель. В дальнейшем мы будем обозначать его через m^f . Остальные утверждения являются прямым следствием лемм 4 и 6. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Анализ структуры множества

$$\{\mu \in \hat{I}(X_A; f) : \mu(B(\mathbf{v})) > 0\}$$

для функции $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ можно свести к аналогичной задаче для множества $\hat{I}(X_{\tilde{A}}; \tilde{f})$, где $\tilde{A}$ – некоторая, вообще говоря, бесконечная матрица и функция $\tilde{f}$ зависит только от координаты x_0 точки $x \in X_{\tilde{A}}$ (см. [6]). Вместе с теоремой 1 это позволяет получить утверждение теоремы 2 без использования элементов выпуклого анализа.

§ 4. Дзета-функция Артина–Мазура–Рюэля

Пусть

$$\Psi_{X_A, B, f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(X_A; B; f) z^n}{n}. \quad (16)$$

В силу (13) и формулы Коши–Адамара ряд $\Psi_{X_A, B, f}(z)$ сходится при $z \in S(\mathbf{R}(f))$ и по теореме Вейерштрасса его сумма является аналитической функцией в круге $S(\mathbf{R}(f))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3, с. 141]. *Дзета-функцией Артина–Мазура–Рюэля системы (X_A, σ, B, f) называется функция*

$$\zeta_{X_A, B, f}(z) = \exp(\Psi_{X_A, B, f}(z)).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$. Тогда при $z \in S(\mathbf{R}(f))$ имеет место тождество:

$$\zeta_{X_A, f}(z) = (1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z))^{-1} \zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$\begin{aligned} \zeta_{X_A, f}(z) &= \zeta_{X_A, B^\infty(\mathbf{v}), f}(z) \zeta_{X_A, X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}), f}(z) \\ &= \zeta_{X_A, B^\infty(\mathbf{v}), f}(z) \zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z). \end{aligned}$$

Пусть $L^k(A, \mathbf{v})$ – множество допустимых последовательностей, каждая из которых является произведением ровно k последовательностей из $L(A, \mathbf{v})$. Очевидно, $L^1(A, \mathbf{v}) = L(A, \mathbf{v})$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} L^k(A, \mathbf{v}) = K(A, \mathbf{v})$. Обозначим через $\sigma^m \gamma$ последовательность длины $\ell(\gamma)$ с $\text{Pr}_i(\sigma^m \gamma) = \text{Pr}_{(i+m) \bmod (\ell(\gamma))}(\gamma)$ при $0 \leq i \leq \ell(\gamma)$ и положим $[\gamma] = \{\sigma^m \gamma : m = 0, \dots, \ell(\gamma) - 1\}$. Пусть $T^k(A, \mathbf{v}) = \{[\gamma] : \gamma \in L^k(A, \mathbf{v})\}$. Покажем, что

$$\sum_{\gamma \in T^k(A, \mathbf{v})} \frac{Q_f(\gamma)}{\ell(\gamma)} z^{\ell(\gamma)} = \frac{\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^k(z)}{k}.$$

Мы рассмотрим только случай $k = 2$. Так как $[\gamma_1 \times \gamma_2] = [\gamma_2 \times \gamma_1]$ и при $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ для любых $\mathbf{v}$ -циклов γ_1 и γ_2 справедливо равенство $Q_f(\gamma_1 \times \gamma_2) = Q_f(\gamma_1)Q_f(\gamma_2)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in T^2(A, \mathbf{v})} \frac{Q_f(\gamma)}{\ell(\gamma)} z^{\ell(\gamma)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\gamma \in L^2(A, \mathbf{v})} Q_f(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} Q_f(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \right) \left(\sum_{\gamma \in L(A, \mathbf{v})} Q_f(\gamma) z^{\ell(\gamma)} \right) = \frac{\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^2(z)}{2}. \end{aligned}$$

Из всего вышесказанного получаем, что

$$\begin{aligned}\Psi_{X_A, B^\infty(\mathbf{v}), f}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in T^k(A, \mathbf{v})} \frac{Q_f(\gamma)}{\ell(\gamma)} z^{\ell(\gamma)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}^k(z)}{k}.\end{aligned}$$

Если $z \in S(\mathbf{R}(f))$, то $|\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)| < 1$ и, следовательно, последняя сумма равна $-\ln(1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z))$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для функции $f = f(x_0, x_1)$ формула (17) была впервые получена в работе [7] (см. также [8]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) > \mathbf{R}(f)$. Тогда функция $\zeta_{X_A, f}(z)^{-1}$ аналитична в круге $S(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$ и имеет нули первого порядка в точках $\mathbf{R}(f) \exp(2\pi i k/d(A))$, $k = 0, \dots, d(A) - 1$, где $d(A)$ – наибольший общий делитель совокупности чисел $\{\ell(\gamma) : \gamma \in K(A, \mathbf{v})\}$ (заметим, что для неразложимой ТМЦ эта величина не зависит от выбора $\mathbf{v} \in \Omega$). Других нулей на окружности $|z| = \mathbf{R}(f)$ у нее нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8) и (13) дзета-функция $\zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z)$ аналитична и не обращается в нуль в круге $S(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f))$. Функция $(1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z))$ также аналитична в этом круге. Пусть $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f) \exp(2\pi i \alpha)) = 1$, где $\alpha \in [0, 1)$. Тогда $\cos(2\pi \alpha \ell(\gamma)) = 1$ для любого $\gamma \in L(A, \mathbf{v})$ и, следовательно, $\alpha \ell(\gamma) \in \mathbb{Z}$ при любом $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$. Поэтому $\alpha \in \{k/d(A) : k = 0, \dots, d(A) - 1\}$. Так как $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) < \infty$, то функция $(1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z))$ имеет нули первого порядка в точках $\mathbf{R}(f) \exp(2\pi i k/d(A))$, где $k = 0, \dots, d(A) - 1$. Применяя формулу (17), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. По теореме Прингсхейма функции $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)$ (см. определение величины $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$) и $\zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z)$ (см. леммы 3 и 5) имеют особенность в точке $z = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$, если $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) \neq \infty$ (в случае, когда $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) = \infty$, функция $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)$ является полиномом и $\zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z) = 1$). В следующем параграфе мы укажем целый класс функций $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$, для которых $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) > \mathbf{R}(f)$ и функция $\zeta_{X_A, f}(z)^{-1}$ не является аналитической в любом круге $S(\delta)$ с $\delta > \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$. Однако, если порядок полюса в точке $z = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$ функции $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)$ меньше или равен порядку полюса

$\zeta_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(z)$ в этой точке, то функция $\zeta_{X_A, f}(z)^{-1}$ будет аналитической в окрестности точки $z = \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)$. Такая ситуация, например, имеет место, если функция f зависит только от координат x_0 и x_1 точки x (в этом случае функция $\zeta_{X_A, f}(z)^{-1}$ является полиномом [9]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f) > \mathbf{R}(f)$. Тогда существуют такие $C > 0$ и $q \in (0, 1)$, что

$$|N_{nd(A)}(X_A; f)\mathbf{R}(f)^{nd(A)} - d(A)| < Cq^{nd(A)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Утверждения теоремы 4 и следствия 2 для гёльдеровской функции f были доказаны Рюэлем (см. [3, с. 142–143]).

Пусть $T(c)$ – квадратная матрица порядка c , все элементы которой равны единице.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $\alpha > 1$ существуют такие $c \geq 2$ и функция $f \in C(X_{T(c)}),$ что

$$\text{card } \hat{I}(X_{T(c)}; f) = 1 \quad \text{и} \quad \zeta_{X_{T(c)}, f}(z) = (1 - z)^{-\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $f_{1+\beta} \in \mathcal{F}(X_{T(2)}; 2)$, где $0 < \beta < 1$, следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{1+\beta}(x) &= \ln \beta, & \text{если } x_0 &= 2; \\ f_{1+\beta}(x) &= \ln \left(1 - \frac{1 + \beta}{m + 1} \right), & \text{если } x_i &= 1 \text{ при } 0 \leq i \leq m - 1, \\ & & x_m &= 2, m \geq 1; \\ f_{1+\beta}(x) &= 0, & \text{если } x_i &= 1 \text{ при любом } i \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть γ_n – допустимая последовательность длины n с $\text{Pr}_0(\gamma_n) = \text{Pr}_n(\gamma_n) = 2$ и $\text{Pr}_i(\gamma_n) = 1$ при $1 \leq i \leq n - 1$. Так как $Q_{f_{1+\beta}}(\gamma_1) = \beta$ и $Q_{f_{1+\beta}}(\gamma_n) = \beta \prod_{k=2}^n (1 - (1 + \beta)/k)$ при $n \geq 2$, то

$$\varphi_{X_{T(2)}, B(2), f_{1+\beta}}(z) = 1 - (1 - z)^\beta.$$

Легко видеть, что выполнено $\mathbf{R}(f_{1+\beta}) = 1$, $\varphi_{X_{T(2)}, B(2), f_{1+\beta}}(1) = 1$ и $\varphi'_{X_{T(2)}, B(2), f_{1+\beta}}(1) = \infty$. В силу теоремы 2 имеем $I(X_{T(2)}, f_{1+\beta}) = \{\delta_{\tilde{x}}\}$, где $\delta_{\tilde{x}}$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке $\tilde{x}$, все координаты которой равны 1. Так как $f_{1+\beta}(\tilde{x}) = 0$ и пространство $X_{T(2) \setminus 2}$ состоит из одной точки $\tilde{x}$, то $\zeta_{X_{T(2) \setminus 2}, f_{1+\beta}}(z) = (1 - z)^{-1}$. Поэтому (см. (17))

$$\zeta_{X_{T(2)}, f_{1+\beta}}(z) = (1 - z)^{-1-\beta}. \quad (18)$$

Пусть $\alpha \in (1, \infty)$. Тогда существуют такие $\beta \in (0, 1)$ и $p \in \mathbb{N}$, что $(1 + \beta)^p = \alpha$. Если $X_{T(2)}^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, есть копия пространства $X_{T(2)}$, то $X_{T(2^p)} = X_{T(2)}^{(1)} \times \dots \times X_{T(2)}^{(p)}$, где

$$2^p = \underbrace{2 \times \dots \times 2}_p$$

Пусть δ_x^p – вероятностная мера, сосредоточенная в точке

$$\underbrace{\tilde{x} \times \dots \times \tilde{x}}_p$$

(если $p = 1$, то будем опускать верхний индекс). На пространстве $X_{T(2^p)}$ рассмотрим функцию

$$f_{1+\beta,p}(x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) = \sum_{k=1}^p f_{1+\beta}(x^{(k)}), \quad \text{где } x^{(k)} \in X_{T(2)}^{(k)}.$$

Очевидно, $f_{1+\beta,p} \in \mathcal{F}(X_{T(2^p)}; 2^p)$. Кроме того, из (18) следует, что $N_n(X_{T(2)}; f_{1+\beta}) = 1 + \beta$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$N_n(X_{T(2^p)}; f_{1+\beta,p}) = N_n(X_{T(2)}; f_{1+\beta})^p = \alpha$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Исследуем теперь множество равновесных состояний для функции $f_{1+\beta,p}$. Для простоты будем считать, что $p = 2$.

При $t > 0$ для любого $\mathbf{w} \in \Omega = \{1, 2\}$ выполняется неравенство:

$$(f_{1+\beta,p} + t\chi_{B(2 \times \mathbf{w})})(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq (f_{1+\beta} + t\chi_{B(2)})(x^{(1)}) + f_{1+\beta}(x^{(2)}).$$

Отсюда следует, что

$$P(X_{T(2^p)}; f_{1+\beta,p} + t\chi_{B(2 \times \mathbf{w})}) \leq P(X_{T(2)}; f_{1+\beta}) + P(X_{T(2)}; f_{1+\beta} + t\chi_{B(2)}).$$

В силу леммы 6 имеем :

$$\omega^+(f_{1+\beta,p}; \chi_{B(2 \times \mathbf{w})}; 0) \leq \omega^+(f_{1+\beta}; \chi_{B(2)}; 0) = 0$$

и, следовательно, $\mu(B(2 \times \mathbf{w})) = 0$ при любом $\mu \in I(X_{T(2^p)}; f_{1+\beta,p})$. Аналогично,

$$\omega^+(f_{1+\beta,p}; \chi_{B(1 \times 2)}; 0) \leq \omega^+(f_{1+\beta}; \chi_{B(2)}; 0) = 0$$

и $\mu(B(1 \times 2)) = 0$ для любого $\mu \in I(X_{T(2^p)}; f_{1+\beta, p})$. Поэтому справедливо $I(X_{T(2^p)}; f_{1+\beta, p}) = \{\delta_x^p\}$. Утверждение доказано.

Для любой непрерывной функции f , борелевского множества $B \subseteq X_A$ и n , при котором $\text{Fix}_n(X_A) \neq \emptyset$, положим

$$\mu_n^f(B) = \frac{N_n(X_A; B; f)}{N_n(X_A; f)}.$$

Очевидно, мера μ_n^f является вероятностной и инвариантной относительно сдвига. Пусть $J(X_A; f)$ – множество предельных (в слабой топологии) точек последовательности $\{\mu_n^f\}$. Тогда $J(X_A; f) \subseteq I(X_A; f)$ [10]. В частности, при $\text{card } \hat{I}(X_A; f) = 1$ последовательность дискретных инвариантных мер $\{\mu_n^f\}$ сходится к единственному равновесному состоянию для функции f . Если $\text{card } \hat{I}(X_A; f) \geq 2$, то вопрос о структуре множества $J(X_A; f)$ представляет большой интерес и до сих пор остается открытым. Следующее утверждение позволяет получить некоторую информацию об эргодическом разложении элементов множества $J(X_A; f)$ в случае, когда функция f удовлетворяет условиям б) теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$,

$$\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(f)) < \infty.$$

Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{nd(A)}(X_A; f) \mathbf{R}(f)^{nd(A)} = bd(A).$$

Тогда $b \geq 1$ и для любого $\mu \in J(X_A; f)$ справедливо следующее разложение:

$$\mu = b^{-1} m^f + (1 - b^{-1}) \mu^*,$$

где $\mu^* \in I(X_A; f)$ и $\mu^*(B(\mathbf{v})) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_n(\psi)$ – коэффициент при z^n разложения в ряд Тейлора в точке $z = 0$ аналитической в некоторой окрестности нуля функции $\psi(z)$ и $r(\psi)$ – радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(\psi) z^n$.

ЛЕММА 7 [11]. Предположим, что $s_n(\psi) \geq 0$, $\psi(r(\psi)) \geq 1$, a – единица функции $\psi(z)$, принадлежащая $(0, r(\psi)]$. Пусть $\text{НОД}\{n : s_n(\psi) > 0\} = d$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n s_n(\psi) a^{n-1} < \infty$ (эту сумму обозначим через $\psi'(a)$). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nd} \left(\frac{1}{1 - \psi} \right) a^{nd} = \frac{d}{a \psi'(a)}.$$

Так как $s_n(\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}) = N_n(X_A; B(\mathbf{v}); f)$,

$$\Phi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z) = \frac{1}{1 - \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(z)} - 1$$

и по условию $\varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) = 1$, $\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) < \infty$, то по лемме 7 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} N_{nd(A)}(X_A; B(\mathbf{v}); f) \mathbf{R}(f)^{nd(A)} \\ = \frac{d(A)}{\varphi'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(\mathbf{R}(f)) \mathbf{R}(f)} = d(A) m^f(B(\mathbf{v})). \end{aligned}$$

По определению для любого $\gamma \in K(A, \mathbf{v})^+$ при $n > \ell(\gamma)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu_{nd(A)}^f(B(\gamma)) &= \frac{N_{nd(A)}(X_A; B(\gamma); f)}{N_{nd(A)}(X_A; f)} \\ &= \frac{Q_f(\gamma) N_{nd(A) - \ell(\gamma)}(X_A; B(\mathbf{v}); f)}{N_{nd(A)}(X_A; f)}. \end{aligned}$$

Пусть $\mu \in J(X_A; f)$. По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{nd(A)}(X_A; f) \mathbf{R}(f)^{nd(A)} = bd(A)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(B(\gamma)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd(A)}^f(B(\gamma)) = \frac{Q_f(\gamma) \mathbf{R}(f)^{\ell(\gamma)} m^f(B(\mathbf{v}))}{b} \\ &= \frac{m^f(B(\gamma))}{b} \end{aligned}$$

для любого $\gamma \in K(A, \mathbf{v})^+$. Очевидно, $b \geq 1$. Если $b = \infty$, то $\mu(B(\mathbf{v})) = 0$. При $b = 1$ имеем $\mu = m^f$. Если $b \in (1, \infty)$, то положим $\mu^* = (\mu - b^{-1} m^f) b / (b - 1)$. Очевидно, мера μ^* является вероятностной и $\mu^*(B(\mathbf{v})) = 0$. Так как $m^f, \mu \in I(X_A; f)$ и $P(X_A; f; \cdot)$ — аффинная функция на множестве I_A , то $\mu^* \in I(X_A; f)$. Предложение доказано.

В следующем параграфе (см. предложение 3) мы укажем такое подмножество $\mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$, что $\text{card } \hat{I}(X_A; f) = 2$ и $b = 2$ для любой функции f из этого подмножества. Однако, равномерное эргодическое разложение предельной точки последовательности $\{\mu_n^f\}$ не является характерным для произвольной функции f с $\text{card } \hat{I}(X_A; f) < \infty$.

ПРИМЕР. Пусть $f = f_{1+\beta, p}$, где $\beta = 1/2$ и $p \geq 5$ (обозначения см. в доказательстве предложения 1).

Так как $N_n(X_{T(2)}; B(2); f_{1+\beta}) = O(n^{-1/2})$, то

$$N_n(X_{T(2^p)}; B(2^p); f) = N_n(X_{T(2)}; B(2); f_{1+\beta})^p = O(n^{-p/2}).$$

Поэтому при $p \geq 5$ имеем $\Phi'_{X_{T(2^p)}, B(2^p), f}(1) < \infty$. Так как

$$N_n(X_{T(2^p)}; B^\infty(2^p); f) \leq n N_n(X_{T(2^p)}; B(2^p); f),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(2^p)}; B^\infty(2^p); f) = 0. \quad (19)$$

Выберем такое $t_0 > 0$, что

$$\varphi_{X_{T(2^p)}, B(2^p), f+t_0\chi_{B(2^p)}}(1) = 1.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} N_n(X_{T(2^p)}; f + t_0\chi_{B(2^p)}) &= N_n(X_{T(2^p)}; B^\infty(2^p); f + t_0\chi_{B(2^p)}) \\ &\quad + N_n(X_{T(2^p)}; X_{T(2^p)} \setminus B^\infty(2^p); f). \end{aligned}$$

Можно показать (см. предложение 3), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(2^p)}; B^\infty(2^p); f + t_0\chi_{B(2^p)}) = 1.$$

В силу (19) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(2^p)}; X_{T(2^p)} \setminus B^\infty(2^p); f) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(2^p)}; f) = (1 + \beta)^p. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(2^p)}; f + t_0\chi_{B(2^p)}) = 1 + (1 + \beta)^p.$$

Так как

$$\varphi'_{X_{T(2^p)}, B(2^p), f+t_0\chi_{B(2^p)}}(1) = \exp(t_0)\varphi'_{X_{T(2^p)}, B(2^p), f}(1) < \infty,$$

то $\hat{I}(X_{T(2^p)}; f + t_0\chi_{B(2^p)}) = \{m^{f+t_0\chi_{B(2^p)}}; \delta_x^p\}$ (см. предложение 1 и теорему 2). В силу предложения 2 имеем

$$J(X_{T(2^p)}; f + t_0\chi_{B(2^p)}) = \{b^{-1}m^{f+t_0\chi_{B(2^p)}} + (1 - b^{-1})\delta_x^p\},$$

где $b = 1 + (1 + \beta)^p$. Выбирая p подходящим образом, можно сделать величину b сколь угодно большой (в то же время автору неизвестно, существуют ли функции f , удовлетворяющие условиям предложения 2, для которых $b = \infty$ или $b < 2$).

§ 5. Класс функций Фишера–Хоуфбауэра

Пусть (для удобства изложения мы сохранили здесь обозначения работы [4])

$$M_0 = \{x \in X_{T(c)} : x_0 \neq 1\} \text{ и}$$

$$M_k = \{x \in X_{T(c)} : x_i = 1, i = 0, \dots, k-1, x_k \neq 1\} \text{ при } k \in \mathbb{N}.$$

Множества M_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, вместе с точками x , для которых $x_i = 1$ при всех $i \geq 0$, образуют разбиение пространства $X_{T(c)}$. Числу c , $c \geq 2$, и последовательности $g = \{g_k\}$ действительных чисел, стремящихся к нулю, сопоставим функцию g_c на пространстве $X_{T(c)}$:

$$g_c(x) = g_k, \text{ если } x \in M_k \text{ при некотором } k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$g_c(x) = 0 \text{ в противном случае.}$$

Очевидно, $g_c \in \mathcal{F}(X_{T(c)}; \mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in \Omega_c \setminus \{1\}$, где $\Omega_c = \{1, \dots, c\}$. Положим $\varphi_g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sum_{k=0}^n g_k) z^{n+1}$. Радиус сходимости ряда $\varphi_g(z)$ равен единице. Очевидно, $\varphi_{X_{T(2)}, B(\mathbf{2}), g_2}(z) = \varphi_g(z)$. При $c \geq 3$ функции $\varphi_{X_{T(c)}, B(\mathbf{2}), g_c}(z)$ находятся из следующего рекуррентного соотношения:

$$\varphi_{X_{T(c+1)}, B(\mathbf{2}), g_{c+1}}(z) = \frac{\varphi_{X_{T(c)}, B(\mathbf{2}), g_c}(z)}{1 - \varphi_{X_{T(c)}, B(\mathbf{2}), g_c}(z)}.$$

Таким образом,

$$\varphi_{X_{T(c)}, B(\mathbf{v}), g_c}(z) = \frac{\varphi_g(z)}{1 - (c-2)\varphi_g(z)}, \quad (20)$$

где $c \geq 2$, $\mathbf{v} \in \Omega_c \setminus \{1\}$.

Теорема 2 и (20) позволяют получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5 [4].

- если $\varphi_g(1) > (c-1)^{-1}$, то $P(X_{T(c)}, g_c) > 0$ и $\hat{I}(X_{T(c)}; g_c) = \{m^{g_c}\}$;
- если $\varphi_g(1) = (c-1)^{-1}$ и $\varphi'_g(1) < \infty$, то $P(X_{T(c)}, g_c) = 0$ и $\hat{I}(X_{T(c)}; g_c) = \{m^{g_c}; \delta_{\bar{x}}\}$;
- если $\varphi_g(1) < (c-1)^{-1}$ или $\varphi_g(1) = (c-1)^{-1}$ и $\varphi'_g(1) = \infty$, то $P(X_{T(c)}, g_c) = 0$ и $\hat{I}(X_{T(c)}; g_c) = \{\delta_{\bar{x}}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Строго говоря, в [4] вместо б) доказано более слабое утверждение: $\{m^{g_c}; \delta_{\bar{x}}\} \subseteq \hat{I}(X_{T(c)}; g_c)$.

Из (20) и (17) следует, что при $z \in \mathbf{R}(g_c)$ имеет место тождество:

$$\zeta_{X_{T(c)}, g_c}(z)^{-1} = (1 - (c - 1)\varphi_g(z))(1 - z). \quad (21)$$

Очевидно, что если $\varphi_g(1) < \infty$, то функция $\zeta_{X_{T(c)}, g_c}(z)^{-1}$ не аналитична в любом круге $S(\delta)$, где $\delta > 1$. В случае, когда $c = 2$, имеем $\mathbf{r}_2(g_2) = 1$. Поэтому результат теоремы 4 о границе мероморфности дзета-функции не может быть улучшен.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. При $c = 2$ формула (21) была доказана Галавотти в [12]. В этой же работе был построен пример гёльдеровской функции f , для которой дзета-функция $\zeta_{X_A, f}(z)$ не имеет мероморфного продолжения во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что функция g_c удовлетворяет условию б) теоремы 5. Тогда $J(X_{T(c)}; g_c) = \{(m^{g_c} + \delta_{\bar{x}})/2\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(X_{T(c)}; g_c) \mathbf{R}(g_c)^n = 2$$

(в нашем случае $\mathbf{R}(g_c) = 1$). При $n \geq 1$ имеем (см. (21))

$$\begin{aligned} N_n(X_{T(c)}; g_c) &= s_n \left(z (\ln \zeta_{X_{T(c)}, g_c}(z))' \right) \\ &= s_n \left(-z \left(\ln(1 - (c - 1)\varphi_g(z))(1 - z) \right)' \right) \\ &= s_n \left(-z \left(\ln(1 - (c - 1)\varphi_g(z)) \right)' \right) + 1. \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \left(-z \left(\ln(1 - (c - 1)\varphi_g(z)) \right)' \right),$$

воспользуемся леммой Абеля о пределе n -й компоненты свертки двух последовательностей с неотрицательными членами.

ЛЕММА 8 [11], [13]. *Предположим, что $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ – две последовательности неотрицательных чисел, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b < \infty$. Тогда, если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = b \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Пусть

$$b_k = s_k \left(\frac{1}{1 - (c-1)\varphi_g(z)} \right), \quad a_k = s_k \cdot z(c-1)\varphi'_g(z).$$

Так как $(c-1)\varphi_g(1) = 1$ и $\varphi'_g(1) < \infty$, то по лемме 7 имеем

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \left(\frac{1}{1 - (c-1)\varphi_g(z)} \right) = \frac{1}{(c-1)\varphi'_g(1)}.$$

Очевидно, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (c-1)\varphi'_g(1)$ и

$$-z \left(\ln(1 - (c-1)\varphi_g(z)) \right)' = \frac{z(c-1)\varphi'_g(z)}{1 - (c-1)\varphi_g(z)}.$$

Поэтому по лемме 8 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \left(-z \left(\ln(1 - (c-1)\varphi_g(z)) \right)' \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 1.$$

Предложение доказано.

§ 6. Динамическая дзета-функция Рюэля–Смейла

ТМЦ (X_A, σ) и положительной непрерывной функции f сопоставим пространство $X_A^f = \{(x, u) : x \in X_A, 0 \leq u \leq f(x)\}$, в котором отождествляются точки $(x, f(x))$ и $(\sigma x, 0)$. При $0 \leq u, u+t \leq f(x)$ положим $\sigma_f^t(x, u) = (x, u+t)$. Для остальных t отображение σ_f^t определим, исходя из того, что $\{\sigma_f^t\}$ – однопараметрическая группа преобразований. Семейство преобразований $\sigma_f = \{\sigma_f^t, t \in \mathbb{R}\}$ с непрерывным временем t называется специальным потоком, построенным по ТМЦ (X_A, σ) и положительной функции $f \in C(X_A)$.

Для любой $\mu \in I_A$ положим $\mu_f = \mu \times dt / \int f d\mu$, где dt – мера Лебега на действительной прямой $\mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что множество $\{\mu_f : \mu \in I_A\}$ совпадает с семейством I_A^f всех инвариантных относительно потока σ_f вероятностных мер. Пусть $h(\sigma_f) = \sup\{h_m(\sigma_f^1) : m \in I_A^f\}$.

Используя формулу Абрамова [14]: $h_{\mu_f}(\sigma_f^1) = h_{\mu}(\sigma)/\int f d\mu$, легко показать, что $h(\sigma_f)$ совпадает с единственным решением $h(X_A; f)$ уравнения $P(X_A; -hf) = 0$. В дальнейшем, если ясно, о каком пространстве X_A идет речь, то мы будем писать просто $h(f)$. Обозначим через $I(X_A^f; 0)$ множество вероятностных мер с максимальной энтропией для потока σ_f . В силу формулы Абрамова $I(X_A^f; 0) = \{\mu_f : \mu \in I(X_A; -h(f)f)\}$. В частности, множество $I(X_A^f; 0)$ для любой положительной функции $f \in C(X_A)$ непусто. Если $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f) > 1$, то вероятностная мера с максимальной энтропией для σ_f единственна и имеет полный носитель.

Рассмотрим ряд $\Psi_{X_A, B, -h(f)s f(1)}$ (см. (16)). Так как $\mathbf{R}(-h(f)\delta f) > 1$ при любом $\delta > 1$, то при таких значениях δ ряд $\Psi_{X_A, B, -h(f)\delta f(1)}$ абсолютно сходится. По теореме Вейерштрасса сумма ряда $\Psi_{X_A, B, -h(f)s f(1)}$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Положим

$$d_{X_A, B, f}(s) = \exp(\Psi_{X_A, B, -h(f)s f(1)}).$$

Очевидно, дзета-функция $d_{X_A, B, f}(s)$ аналитична и не обращается в нуль в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Если $B = X_A$, то мы будем опускать индекс B . Заметим, что

$$d_{X_A, X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}), f}(s) = d_{X_A \setminus \mathbf{v}, f}(hs),$$

где $h = h(X_A; f)/h(X_A \setminus \mathbf{v}; f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [15]. *Дзета-функцией Рюэля–Смейла* потока σ_f называется функция $d_{X_A, f}(s)$.

Положим

$$j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(s) = \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), -h(f)s f(1)}. \quad (22)$$

Очевидно, при $\operatorname{Re} s > 1$ сумма ряда $j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(s)$ является аналитической функцией, по модулю меньшей единицы.

ТЕОРЕМА 3'. *Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место тождество:*

$$d_{X_A, f}(s) = (1 - j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(s))^{-1} d_{X_A, X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}), f}(s). \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В работе [16] формула (23) была доказана для функции, значение которой на множестве $\sigma^k B(\gamma)$, $\gamma \in L(A, \mathbf{v})$, $1 \leq k \leq \ell(\gamma)$, зависит только от числа $\ell(\gamma) - k$.

ТЕОРЕМА 4'. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f) > 1$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что дзета-функция $d_{X_A, f}(s)$ допускает мероморфное продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1 - \varepsilon$, которое не обращается там в нуль и имеет простой полюс в точке $s = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varepsilon < \frac{\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f)}{\|h(f)f\|}$$

и $t = \exp(\varepsilon \|h(f)f\|)$. Очевидно, для такого ε имеем

$$j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(1 - \varepsilon) \leq \varphi_{X_A, B(\mathbf{v}), -h(f)f}(t) < \infty.$$

По теореме Вейерштрасса функция $j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 - \varepsilon$. Из равенства

$$W(X_A; X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}); -h(f)f) = -\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f)$$

(см. (8) и (13)) следует, что

$$W(X_A; X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}); -h(f)(1 - \varepsilon)f) < 0.$$

Поэтому $\Psi_{X_A, X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}), -h(f)(1 - \varepsilon)f}(1) < \infty$. В силу теоремы Вейерштрасса функция $d_{X_A, X_A \setminus B^\infty(\mathbf{v}), f}(s)$ аналитична и не обращается в нуль при $\operatorname{Re} s > 1 - \varepsilon$.

Так как по условию $j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(1) = 1$ (см. (22)) и $j'_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(1) < 0$, то дзета-функция $d_{X_A, f}(s)$ имеет в точке $s = 1$ простой полюс (см. (23)). Теорема доказана.

Пусть τ – произвольная замкнутая траектория потока σ_f и $\lambda(\tau)$ – ее наименьший период. Каждой такой траектории τ соответствует орбита некоторой периодической точки x ТМЦ (X_A, σ) с наименьшим периодом n . Очевидно, $\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f) > 1$. Предположим, что для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k x) : x \in \operatorname{Fix}_n(X_A; B(\mathbf{v})) \right\} \not\subseteq a\mathbb{Z}. \quad (24)$$

Тогда

$$\operatorname{card}\{\tau : \lambda(\tau) \leq y\} \sim \frac{\exp(h(f)y)}{h(f)y}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4' функция $d_{X_A, f}(s)^{-1}$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 - \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{\ln \mathbf{r}_{\mathbf{v}}(-h(f)f)}{\|h(f)f\|}.$$

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4', следует, что все ее нули в этой области расположены в точках s , для которых $j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(s) = 1$. Пусть

$$j_{X_A, B(\mathbf{v}), f}(1 + it) = 1$$

при $t \neq 0$. Тогда $\cos(\operatorname{th}(f)f^*(\gamma)) = 1$ (обозначения см. в начале §2) и, следовательно, $\operatorname{th}(f)f^*(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$ для любого $\gamma \in L(A, \mathbf{v})$. Если $\gamma = \prod_{k=1}^m \gamma_k$, где $\gamma_k \in L(A, \mathbf{v})$, $k = 1, \dots, m$, то для $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ имеем $f^*(\gamma) = \sum_{k=1}^m f^*(\gamma_k)$. Поэтому $f^*(\gamma) \in (2\pi/h(f)t)\mathbb{Z}$ для любого $\gamma \in K(A, \mathbf{v})$, что противоречит условию (24) при $a = 2\pi/h(f)t$. Таким образом, функция $d_{X_A, f}(s)^{-1}$ не обращается в нуль на прямой $\operatorname{Re} s = 1$ за исключением точки $s = 1$ и, следовательно, функция $d'_{X_A, f}(s)/d_{X_A, f}(s)$ допускает представление в следующем виде:

$$\frac{d'_{X_A, f}(s)}{d_{X_A, f}(s)} = (1 - s)^{-1} + \alpha(s), \quad (26)$$

где функция $\alpha(s)$ аналитична в некоторой области, содержащей множество $\{s : \operatorname{Re} s \geq 1\}$. Применяя тауберову теорему Икехара–Винера [16, теорема 6.7], получаем (25) (подробный вывод (25) из (26) см. в [16], где теорема о мероморфном продолжении дзета-функции Рюэля–Смейла $d_{X_A, f}(s)$ и закон (25) были доказаны в случае, когда f – гёльдеровская функция). Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В [16] закон (25) был доказан при условии

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k x) : x \in \operatorname{Fix}_n(X_A) \right\} \not\subseteq a\mathbb{Z}$$

для любого $a \in \mathbb{R}$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}(X_A; \mathbf{v})$ это условие не равносильно (24).

Автор благодарит Б. М. Гуревича за обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bowen R. Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms // Lecture Notes in Math. V. 470. Berlin: Springer, 1975.
- [2] Ruelle D. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas // Comm. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 267–278.
- [3] Ruelle D. Thermodynamic formalism. Reading: Addison–Wesley, 1978.
- [4] Hofbauer F. Examples for the nonuniqueness of the equilibrium state // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 228. P. 223–241.
- [5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [6] Gurevich B. M. A variational characterization of one-dimensional countable state Gibbs random fields // Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 1984. V. 68. P. 205–242.
- [7] Takahashi Y. Shift with orbit basis and realization of one dimensional maps // Osaka J. Math. 1983. V. 20. P. 599–629.
- [8] Савченко С. В. Дзета-функция и гиббсовские меры // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 181–182.
- [9] Bowen R., Lanford O. E. Zeta functions of restrictions of the shift transformation // Proc. Sympos. Pure Math. 1968. V. 14. P. 43–49.
- [10] Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^{\nu}$ -action satisfying expansiveness and specification // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 988–991; // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 237–251.
- [11] Чжун-Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964.
- [12] Gallavotti G. Funzioni zeta ed insiemi basilari // Accad. Lincei. Rend. Sc. fis. mat. e nat. 1976. V. 61. P. 309–317.
- [13] Hardy G. H. Divergent series. Oxford: Oxford University Press, 1949.
- [14] Абрамов Л. М. Об энтропии потока // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. С. 873–875.
- [15] Ruelle D. Generalized zeta-functions for axiom A basic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. P. 153–156.
- [16] Parry W., Pollicott M. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. Asterisque. V. 187–188, 1990.