Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Секерин, Преобразование Радона и зоноиды,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 2, 254–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:57:21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА И ЗОНОИДЫ

А. Б. Секерин

Целью данной работы является описание в терминах преобразования Радона известного класса выпуклых компактов, называемых зоноидами или штейнеровскими компактами.

Обозначения. Для $x, y \in \mathbb{R}^m$ полагаем $\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j$, dx – стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^m$, S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, $B(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |x - y| < R\}$. Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \varphi \subset \Omega\}$. Функции из $\mathcal{D}(\Omega)$ будем считать вещественнозначными. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\Delta \varphi$ – лапласиан, $\hat{\varphi}(t, w)$ – преобразование Радона [1, с. 16]. Мерой будем называть заданную на локально компактном пространстве положительную борелевскую меру, конечную на компактах. Для выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ через $H_K(x)$ обозначается опорная функция этого компакта $H_K(x) = \max\{\langle x, y \rangle, y \in K\}$.

В. Бляшке [2] была поставлена задача описания класса центрально-симметричных выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$, $m > 2$, опорная функция которых допускает представление

$$H_K(x) = \int_{S^{m-1}} |\langle x, w \rangle| d\nu(w), \quad (1)$$

где ν – мера, заданная на сфере. Другими словами, была поставлена задача описания выпуклых компактов, которые представляют собой линейную комбинацию (в том числе “непрерывную”) отрезков с положительными коэффициентами. Впоследствии компакты, входящие в данный класс, получили название зоноидов [3] или штейнеровских компактов [4]. Данный класс компактов служил объектом исследований ряда работ [3]–[7] и в настоящее время получено несколько эквивалентных описаний зоноидов. В частности, показано, что необходимыми и достаточными условиями принадлежности симметричного относительно начала координат

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ классу зоноидов является каждое из следующих свойств компакта K и его опорной функции H_K : а) компакт K – смещение линейных элементов некоторой спрямляемой кривой; б) K является образом векторной меры; в) функция $\exp(-tH_K(x))$ положительно определена (по Бохнеру) для каждого $t > 0$. Показано, что центрально-симметричный относительно начала координат многогранник тогда и только тогда является зоноидом, когда любая его двумерная грань имеет центр симметрии.

В работе [8] автором была обнаружена связь задачи описания зоноидов с задачей представления плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций логарифмическим потенциалом. При этом ранее [9] было показано, что последняя задача самым непосредственным образом связана со свойствами преобразования Радона в комплексном пространстве (см. определение в [1, с. 160]). Условимся для краткости это преобразование называть комплексным преобразованием Радона. Таким образом, был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H(z)$ – четная однородная плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию однородности $H(tz) = tH(z)$, $t > 0$. Для того, чтобы функция $H(z)$ была опорной функцией зоноида необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ с неотрицательным комплексным преобразованием Радона выполнялось

$$\int_{\mathbb{C}^n} H(z) \Delta \varphi(z) d\omega_{2n}(z) \geq 0.$$

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H(x)$ – субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$. Для того, чтобы на $[0, \infty) \times S^{m-1}$ существовала мера $\mu \geq 0$ такая, что для любого $R > 0$ было верно

$$H(x) = \int_{[0, R] \times S^{m-1}} |t - \langle x, w \rangle| d\mu(t, w) + h_R(x), \quad (2)$$

где функция $h_R(x)$ гармонична в $B(0, R)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с неотрицательным преобразованием Радона выполнялось

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x) \Delta \varphi(x) dx \geq 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $H(x)$ – субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию однородности $H(tx) = tH(x)$, $t > 0$. Для того, чтобы $H(x)$ с точностью до линейной функции совпадала с опорной функцией некоторого зоноида необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с неотрицательным преобразованием Радона выполнялось (3).

Теорема 2 используется как вспомогательное средство для доказательства теоремы 3, хотя возможно представляет определенный самостоятельный интерес. В формулировке теоремы 3 следует отметить то обстоятельство, что эта формулировка заранее не предполагает четности (с точностью до линейной функции) функции $H(x)$. Условие субгармоничности функции $H(x)$ является вполне естественным, так как любая выпуклая функция в $\mathbb{R}^m$, в частности, субгармонична. Тем не менее условие субгармоничности может быть заменено локальной суммируемостью функции $H(x)$, в этом случае в формулировке теоремы 3 равенство $H(x)$ опорной функции зоноида следует понимать как равенство почти всюду. Отметим наконец, что требование выполнения условия (3) фактически является значительным усилением условия субгармоничности, так как локально суммируемая функция $H(x)$ тогда и только тогда почти всюду равна некоторой субгармонической функции, когда условие (3) выполняется для всех неотрицательных функций $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ [10]. Именно это усиление требований на функцию $H(x)$ обеспечивает ее искомые свойства (класс неотрицательных функций существенно уже класса функций с неотрицательным преобразованием Радона).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем, что для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ и любых $(t, w) \in \mathbb{R} \times S^{m-1}$ верно

$$\int_{\mathbb{R}^m} |t - \langle x, w \rangle| \Delta \varphi(x) dx = 2\hat{\varphi}(t, w), \quad (4)$$

где $\hat{\varphi}(t, w)$ – преобразование Радона функции φ . Действительно, пусть $I(t, w)$ – интеграл из левой части (4), $L_\varphi(x) = \Delta \varphi(x)$. Заменой переменных по определению преобразования Радона получаем

$$I(t, w) = \int_{\mathbb{R}} |s - t| \hat{L}_\varphi(s, w) ds,$$

где $\hat{L}_\varphi(s, w)$ – преобразование Радона функции $L_\varphi(x)$. Имеем [1, с. 21]

$$\hat{L}_\varphi(s, w) = \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial s^2}(s, w), \quad (s, w) \in \mathbb{R} \times S^{m-1},$$

где $\widehat{\varphi}(s, w)$ – преобразование Радона исходной функции φ . Поэтому верно

$$I(t, w) = \int_{\mathbb{R}} |s - t| \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial s^2}(s, w) ds.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем $I(t, w) = 2\widehat{\varphi}(t, w)$. Пусть $H(x)$ – функция, определенная в $\mathbb{R}^m$ и для каждого $R > 0$ в шаре $B(0, R)$ представимая в виде (2), где μ – положительная мера на $[0, \infty) \times S^{m-1}$, а функция $h_R(x)$ гармонична в $B(0, R)$. Тогда для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с неотрицательным преобразованием Радона, используя (2) с таким значением R , что $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$, из (4) легко получаем

$$\int H(x) \Delta \varphi(x) dx = 2 \int \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w) \geq 0.$$

Пусть теперь функция $H(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяет (3) для всех функций $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с неотрицательным преобразованием Радона. Наделим $X = [0, \infty) \times S^{m-1}$ стандартной топологией произведения и рассмотрим пространство $C_c(X)$ непрерывных, вещественнозначных функций на X с компактным носителем. Подпространство в $C_c(X)$, образованное сужениями на $[0, \infty) \times S^{m-1}$ преобразований Радона функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ обозначим через $RC_c(X)$. Используя аналог теоремы Пэли–Винера для преобразования Радона [1, с. 34], легко убедиться в том, что подпространство $RC_c(X)$ содержит любую функцию вида $\psi(t^2)$, где ψ – любая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что для любой функции $\psi(t, w) \in C_c(X)$ существует функция $\widehat{\varphi}(t, w) \in RC_c(X)$ такая, что $|\psi(t, w)| \leq \widehat{\varphi}(t, w)$. Определим теперь на $RC_c(X)$ функционал F , полагая для $\widehat{\varphi}(t, w) \in RC_c(X)$

$$\langle F, \widehat{\varphi}(t, w) \rangle = \int H(x) \Delta \varphi(x) dx, \quad (5)$$

где функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ такова, что сужение ее преобразования Радона на $[0, \infty) \times S^{m-1}$ равно $\widehat{\varphi}(t, w)$. Эта функция определяется единственным образом, так как в силу свойства однородности [1, с. 35] имеем для любого $\alpha \neq 0$

$$\widehat{\varphi}(\alpha s, \alpha \xi) = |\alpha|^{-1} \widehat{\varphi}(s, \xi), \quad (s, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m \setminus 0). \quad (6)$$

Поэтому преобразование Радона однозначно определяется своим сужением на $[0, \infty) \times S^{m-1}$ и, в силу формулы обращения [1, с.25], однозначно определяет исходную функцию. Таким образом, функционал F корректно определен на $RC_c(X)$. Далее, если для $\widehat{\varphi} \in RC_c(X)$ верно $\widehat{\varphi}(t, w) \geq 0$, то из (6) следует, что $\widehat{\varphi}(s, \xi) \geq 0$ для всех $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m \setminus 0)$, и по

условию интеграл в правой части (5) неотрицателен. Это означает, что F – положительный функционал на $RC_c(X)$. Так как для любой функции $\psi(t, w) \in C_c(X)$ существует функция $\widehat{\varphi}(t, w) \in RC_c(X)$ такая, что $|\psi(t, w)| \leq \widehat{\varphi}(t, w)$, то к функционалу F применима теорема о продолжении положительных функционалов [11, с. 270], т.е. на $C_c(X)$ существует положительный функционал μ такой, что для $\varphi \in RC_c(X)$ верно $\mu(\varphi) = F(\varphi)$. В силу теоремы Рисса функционал μ задается положительной мерой, которую мы также обозначим через μ . Рассмотрим разность

$$H(x) - \frac{1}{2} \int_{[0, R] \times S^{m-1}} |t - \langle x, w \rangle| d\mu(t, w) = h_R(x).$$

Покажем, что функция $h_R(x)$ гармонична в $B(0, R)$. Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(B(0, R))$. Тогда в силу (4) имеем

$$\int h_R(x) \Delta \varphi(x) dx = \int H(x) \Delta \varphi(x) dx - \int_{[0, R] \times S^{m-1}} \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w), \quad (7)$$

где $\widehat{\varphi}(t, w)$ – преобразование Радона функции φ . Так как выполнено вложение $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$, то для $w \in S^{m-1}$, $t \geq R$ имеем $\widehat{\varphi}(t, w) = 0$, поэтому по построению меры μ верно

$$\int_{[0, R] \times S^{m-1}} \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w) = F(\widehat{\varphi}) = \int H(x) \Delta \varphi(x) dx.$$

Таким образом, интеграл в левой части (7) равен нулю. Это означает, что функция $h_R(x)$ почти всюду в $B(0, R)$ совпадает с некоторой гармонической в $B(0, R)$ функцией $\check{h}_R(x)$. С другой стороны по условию $h_R(x)$ – разность субгармонических функций, тогда [12, с. 48] $h_R(x) = \check{h}_R(x)$ всюду в $B(0, R)$, т.е. функция $h_R(x)$ гармонична в $B(0, R)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть однородная субгармоническая функция $H(x)$ имеет вид

$$H(x) = \int_{S^{m-1}} |\langle x, w \rangle| d\nu(w) + \langle a_0, x \rangle,$$

где $a_0 \in \mathbb{R}^m$, ν – положительная мера, заданная на S^{m-1} . Так как это равенство – частный случай представления (2), то из теоремы 2 вытекает справедливость (3) для функции $H(x)$ и любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с неотрицательным преобразованием Радона. Обратно, пусть условие (3) выполняется для однородной субгармонической функции $H(x)$. Тогда по

теореме 2 на $[0, \infty) \times S^{m-1}$ существует мера $\mu \geq 0$ такая, что для любого $R > 0$ верно

$$H(x) = \int_{[0, R] \times S^{m-1}} |t - \langle x, w \rangle| d\mu(t, w) + h_R(x), \quad (8)$$

где функция $h_R(x)$ гармонична в $B(0, R)$. Покажем, используя однородность $H(x)$, что мера μ сосредоточена на множестве $\{0\} \times S^{m-1}$, т.е. фактически на сфере S^{m-1} . Действительно, из (8) и (4) следует, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ верно

$$\int H(x) \Delta \varphi(x) dx = 2 \int \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w). \quad (9)$$

Пусть для $\alpha > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ функция φ_α определяется соотношением $\varphi_\alpha(x) = \varphi(\alpha x)$. Тогда из равенства $H(\alpha x) = \alpha H(x)$ следует

$$\begin{aligned} \int H(x) \Delta \varphi_\alpha(x) dx &= \alpha^{-(m-1)} \int H(x) \Delta \varphi(x) dx \\ &= 2\alpha^{-(m-1)} \int \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w), \end{aligned}$$

где $\widehat{\varphi}(t, w)$ – преобразование Радона функции φ . С другой стороны преобразование Радона функции $\varphi_\alpha(x)$ равно $\alpha^{-(m-1)} \widehat{\varphi}(\alpha t, w)$ [1, с. 20]. Поэтому из (9) следует

$$\int H(x) \Delta \varphi_\alpha(x) dx = 2\alpha^{-(m-1)} \int \widehat{\varphi}(\alpha t, w) d\mu(t, w).$$

Таким образом, для любой функции $\widehat{\varphi}(t, w) \in RC_c(X)$ и любого $\alpha > 0$ имеем

$$\int \widehat{\varphi}(\alpha t, w) d\mu(t, w) = \int \widehat{\varphi}(t, w) d\mu(t, w). \quad (10)$$

Пусть $0 < r_1 < r_2$ и функция $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$, равна 1 для $|x| \leq r_2^2$ и нулю для $|x| \geq 4r_2^2$. Тогда $\varphi(t) = \psi(t^2) \in RC_c(X)$. В силу (10) имеем для любого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \mu([0, r_2] \times S^{m-1}) &\leq \int \varphi(t) d\mu(t, w) = \int \varphi(\alpha t) d\mu(t, w) \\ &\leq \mu([0, 2r_2/\alpha] \times S^{m-1}). \end{aligned}$$

Полагая $\alpha = r_1/(2r_2)$, получаем

$$\mu([0, r_2] \times S^{m-1}) \leq \mu([0, r_1] \times S^{m-1}).$$

Таким образом, $\mu((r_1, r_2] \times S^{m-1}) = 0$, откуда непосредственно вытекает равенство $\mu((0, \infty) \times S^{m-1}) = 0$. Зададим на S^{m-1} меру $\nu \geq 0$, полагая для любой функции $q(w) \in C(S^{m-1})$

$$\int_{S^{m-1}} q(w) d\nu(w) = \int_{\{0\} \times S^{m-1}} q(w) d\mu(t, w).$$

Тогда равенство (8), в силу того, что $\mu((0, \infty) \times S^{m-1}) = 0$, можно записать в виде

$$H(x) = \int_{S^{m-1}} |\langle x, w \rangle| d\nu(w) + h_R(x).$$

Тогда функция $h_R(x)$ не зависит от R и в силу однородности $H(x)$ также является однородной. Так как кроме того $h_R(x)$ – гармоническая функция, то $h_R(x) \equiv \langle a_0, x \rangle$, где $a_0 \in \mathbb{R}^m$. Теорема доказана.

Институт математики

Уфимского научного центра РАН

Поступило

23.08.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Наука, 1967.
- [2] Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.
- [3] Bolker E. D. A class of convex bodies // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 323–346.
- [4] Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.
- [5] Залгаллер В. А., Решетняк Ю. Г. О спрямляемых кривых, аддитивных вектор-функциях и смещении отрезков // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном. 1954. № 2. С. 45–67.
- [6] Herz C. S. A class of negative definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 14. P. 670–676.
- [7] Choquet G. Mesures coniques et affines invariants par isométries. Zonoforms, zonoèdres et fonctions de type négatif // C. R. Acad. Sci. Paris. 1968. V. 266. P. 619–621.
- [8] Секерин А. Б. О представлении аналитических функций многих переменных рядами экспонент // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 3. С. 538–565.
- [9] Секерин А. Б. Об интегральном представлении субгармонических функций // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 6. С. 865–871.
- [10] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
- [11] Мейер П. А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
- [12] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.