Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Семенчук, Разрешимые $\mathfrak{F}$ -радикальные формации, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 261–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:59:17

РАЗРЕШИМЫЕ $\mathfrak{F}$ -РАДИКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ

В. Н. Семенчук

Хорошо известен результат Виландта [1], утверждающий о том, что порождение субнормальных подгрупп любой конечной группы G является субнормальной группой G . Естественным обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальности [2]. В [3] перечислены все наследственные локальные формации $\mathfrak{F}$ такие, что порождение $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп в произвольной конечной группе G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппой G .

Настоящая работа посвящена решению задачи о перечислении всех разрешимых нормально наследственных локальных формаций $\mathfrak{F}$ таких, что в любой конечной группе G произведение любых перестановочных $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппой группы G . Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая локальная нормально наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$;
- 2) $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -радикальная формация;
- 3) $\mathfrak{F}$ – наследственная формация такая, что произведение любых перестановочных $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп в произвольной конечной группе G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппой группы G .

Из данной теоремы следует описание локальных $\mathfrak{F}$ -радикальных формаций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{F}$ -радикальной, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы из G , принадлежит $\mathfrak{F}$.

В работе рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [2]. Напомним некоторые из определений и обозначений.

Пусть π_i – некоторое множество простых чисел. Тогда $\mathfrak{S}_{\pi_i}$ – класс всех разрешимых π_i -групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной* (нормально наследственной), если любая подгруппа (нормальная подгруппа) произвольной группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$ -субнормальной*, если существует максимальная цепь подгрупп $G = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_n = H$ такая, что $K_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для любого $j = 1, 2, \dots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *радикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;
- 2) из $G = AB$, где A и B – нормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы G , всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ – класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп.

В леммах 1 и 2 приведены известные свойства $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- 2) если H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа из G , K – подгруппа из G , то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K ;
- 3) если H_1, H_2 – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- 4) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K и K $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , то H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G ;
- 5) если A – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G , то $A^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа G .

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа, N – нормальная подгруппа группы G . Тогда

- 1) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , то HN и HN/N – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы групп G и G/N соответственно;
- 2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G/N .

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная $\mathfrak{F}$ -радикальная формация. Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа G является группой одного из следующих типов:

- 1) G – группа порядка p , где p – любое простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$;
- 2) G – группа Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа. Если существует простое число p из $\pi(G)$ такое, что $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то G – группа порядка p .

Пусть теперь $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и пусть $\Phi(G) = 1$. По теореме 1.5 из [4] $G = N \rtimes M$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G , N – p -группа, $M \in \mathcal{M}(f(p))$. Ясно, что $C_G(N) = N$. Покажем, что M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. Вначале покажем, что M – примарная группа. Предположим противное. Тогда в M найдутся собственные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $M = M_1 M_2$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то очевидно, что $N M_1$ и $N M_2$ $\mathfrak{F}$ -нормальные максимальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы G . Но тогда $G = N M_1 \cdot N M_2$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, $|M| = q^n$. Аналогичным образом доказывается, что M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. А это значит, что M – циклическая q -подгруппа. Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $q \neq p$. Теперь покажем, что $|M| = q$. Предположим противное. Пусть $|M| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L – циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q . Обозначим через T регулярное сплетение $E \wr L$. Пусть K – база сплетения T , т.е. $T = K \rtimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна M , то $M \notin f(p)$. Очевидно, что K, L принадлежат формации $f(p)$. Пусть $K = P \wr T$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R . Тогда $R = C \rtimes T = C \rtimes (K \rtimes L)$. Очевидно, что подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$ -субнормальны в R . Легко видеть, что подгруппы CK и CL принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$. Но тогда $F_p(R) = C$, и поэтому $T = R/C \in f(p)$. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Итак, мы показали, что $G/\Phi(G)$ – группа Шмидта. Теперь по лемме 4 из [5] следует, что G – группа Шмидта. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Всякая разрешимая локальная $\mathfrak{F}$ -радикальная формация $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что если $G \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(G)$, то $Z_p \in \mathfrak{F}$. Если $|G| = p$, то утверждение очевидно. Пусть $|G| = p$. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа G . Если $|G : M| = p$, то $G/M \simeq Z_p \in \mathfrak{F}$. Пусть $|G : M| \neq p$. Ясно, что $p \in \pi(M)$. Так как $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация, то $M \in \mathfrak{F}$. Индукцией по порядку G получаем, что $Z_p \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}^S$ – максимальная наследственная подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$. В силу следствия 3 теоремы 1 из [6] и теоремы 4.3 из [2] формация $\mathfrak{F}^S$ является насыщенной. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$. Тогда $\Phi(G) = 1$. Ясно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $C_G(N) = F(G) = N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}^S$, то в G найдется минимальная не $\mathfrak{F}^S$ -группа H . Так как формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $|\pi(H)| > 1$. Очевидно, что H является минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой. По лемме 3 H – группа Шмидта. По теореме 26.1 из [2] $H = RQ$, где Q – нормальная силовская q -подгруппа, а R – циклическая силовская r -подгруппа H , q и r – различные простые числа. Если $H \cap N = 1$, то $HN/N \simeq H/H \cap N \simeq H \in \mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $K = H \cap N \neq 1$. Отсюда и из $H/K \in \mathfrak{F}$ получаем, что $K \subseteq Q$, а значит, N – q -группа. Рассмотрим $H^* \simeq H/\Phi(H)$. Тогда по теореме 26.1 из [2] H^* можно представить в виде:

$$H^* = \frac{Q\Phi(H)}{\Phi(H)} \ltimes \frac{R\Phi(H)}{\Phi(H)},$$

где $Q\Phi(H)/\Phi(H)$ – элементарная абелева q -группа, а $|R\Phi(H)/\Phi(H)| = r$. Так как $H^* \notin \mathfrak{F}$, то по лемме 4.5 из [2] $H^*/F_q(H^*) \simeq Z_r \notin f(q)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как $C_G(N) = N$ и $N = F_q(G)$, то $F_q(G)$ является q -группой. Отсюда следует, что $r \in \pi(G/N) \subseteq \pi(f(q))$. По теореме 4.7 из [2] $f(q)$ нормально наследственная формация. Как показано выше $Z_r \in f(q)$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть $G = AB$, где A, B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы G . Индукцией по порядку группы покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . По лемме 2 AN/N и BN/N – $\mathfrak{F}$ -субнормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы G/N . По индукции $G/N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа G и $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что $N = G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим подгруппу AN . Если $G = AN$, то A и $N = G^{\mathfrak{F}}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$ -нормальной максимальной подгруппе H группы G , что невозможно. Итак, $G \neq AN$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $AN \subseteq M$. По тождеству Дедекенда $M = M \cap AB = A(M \cap B)$. Согласно лемме 1 A и $M \cap B$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы M . По индукции $M \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, N разрешима. А это значит, что $C_G(N) = N$. Пусть N – p -группа. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то $G/N \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Если $p \in \pi_i$, то $N \in \mathfrak{S}_{\pi_i}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Пусть теперь $p \in \pi_j \setminus \pi_i$. Так как $AN \in \mathfrak{F}$, то $AN \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Если $O_{p'}(AN) \neq 1$,

то $O_{p'}(AN) \subseteq C_{AN}(N) \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Итак, $F_p(AN) = N$. Известно, что формация $\mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ имеет локальный экран h такой, что

$$h(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}, & \text{если } p \in \pi_i, \\ \mathfrak{S}_{\pi_j}, & \text{если } p \in \pi_j \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Следовательно, $AN/N \in \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Отсюда $A \in \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Аналогичным образом получаем, что $B \in \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Так как $G = AB$, то $G \in \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Отсюда $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{F} = \cap \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -радикальная формация. Покажем, что из 2) следует 3).

По лемме 4 $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Пусть A и B – перестановочные $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы G . Индукцией по порядку G покажем, что AB – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G . Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Обозначим $T = AB$. По лемме 2 AN/N и BN/N – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы из G/N . По индукции TN/N – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G/N . Пусть $TN \neq G$. По лемме 1 A и B – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы TN . По индукции T – $\mathfrak{F}$ -субнормальна в TN . По лемме 2 T – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа из G . Итак, $G = TN$. Если $T_G \neq 1$, то, как и выше, нетрудно показать, что T – $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G . Итак, $T_G = 1$. Покажем, что подгруппы A и B принадлежат $\mathfrak{F}$. Пусть $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$. По лемме 1 $A^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G . По теореме 7.10 из [2] $N \subseteq N_G(A^{\mathfrak{F}})$. Тогда $1 \neq A^{\mathfrak{F}} \subseteq (A^{\mathfrak{F}})^{TN} \subseteq (A^{\mathfrak{F}})^T \subseteq T$. Получили противоречие с тем, что $T_G = 1$. Итак, $A \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом, $B \in \mathfrak{F}$. Так как A – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G и $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация, то G разрешима. Следовательно, N – абелева p -группа. По теореме 15.10 из [2] $AN \in \mathfrak{F}$ и $BN \in \mathfrak{F}$. По лемме 2 AN и BN – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы из G . Так как $G = ANBN$ и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -радикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то T – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G . Покажем, что из 3) следует 1).

Пусть $\mathfrak{F}^*$ – локальная формация, имеющая локальный экран f^* такой, что $f^*(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и p – любое простое число из $\pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/F_p(G) \in f(p)$, где p – любое простое число из $\pi(G)$. Ясно, что $G/F_p(G) \in \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь по лемме 4.5 из [2] $G \in \mathfrak{F}^*$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Покажем обратное. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}^*$ – наследственная формация, то очевидно, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $\Phi(G) = 1$. Но тогда по теореме 1.5 из [4] $G = N \rtimes H$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G , N – p -группа, $M \in \mathcal{M}(f(p))$. Ясно, что $C_G(N) = N$. Покажем, что M – группа простого порядка. Пусть $|\pi(M)| > 1$. Тогда $M = K_1 K_2$, где K_1 и K_2 – собственные подгруппы из M . Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то по лемме 1 NK_1 и NK_2 –

$\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы из G . Так как $NK_1 \in \mathfrak{F}$ и $NK_2 \in \mathfrak{F}$, то K_i – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа из NK_i ($i = 1, 2$). Теперь по лемме 1 K_1 и K_2 – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы G . Но тогда, согласно условию, $M = K_1 K_2$ является максимальной $\mathfrak{F}$ -нормальной подгруппой группы G . Что невозможно, так как $G = G^{\mathfrak{F}} M$. Итак, M – примарная подгруппа. Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $q \neq p$. Теперь покажем, что $|M| = q$. Предположим противное. Пусть $|M| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L – циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q . Обозначим через T регулярное сплетение $E \wr L$. И пусть K – база сплетения T , т.е. $T = K \rtimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна M , то $M \notin f(p)$. Очевидно, что подгруппы K, L принадлежат $f(p)$. Пусть $R = P \wr T$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R . Тогда $R = C \rtimes T = C \rtimes (K \rtimes L)$. Покажем, что $R \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $R/C \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что подгруппы CK и CL – $\mathfrak{F}$ -субнормальны в R . Легко видеть, что CK и CL принадлежат $\mathfrak{F}$. Следовательно, K – $\mathfrak{F}$ -субнормальна в CK , а L – $\mathfrak{F}$ -субнормальна в CL . По лемме 1 K и L – $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы G . Но тогда согласно условию $K \rtimes L$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы R . По теореме 15.10 из [2] $R \in \mathfrak{F}$. Но $F_p(R) = C$ и поэтому $T \simeq R/C \in f(p)$. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/C_G(N) = G/N \in f^*(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Отсюда следует, что $q \in \pi(f(p))$. Так как $f(p)$ – наследственная формация, то $M \in f(p)$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathfrak{F} = \cap \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то $\mathfrak{F}$ – формация из пункта 1). Теорема доказана.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступило
02.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wielandt H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. V. 45. P. 209–244.
- [2] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [3] Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. Орешетках подгрупп конечных групп // Конференция математиков Белоруси. Гродно, 1992. С. 10.
- [4] Семенчук В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. № 3. С. 348–382.
- [5] Семенчук В. Н. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп для произвольной totally локальной формации // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 4. С. 251–260.
- [6] Васильев А. Ф. О максимальной наследственной подформации локальной формации // Вopr. алгебры. 1990. № 5. С. 39–45.