Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, О теореме Марцинкевича для
двоичного интеграла Перрона, *Матем. заметки*,
1996, том 59, выпуск 2, 267–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:25:32

О ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ДВОИЧНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРРОНА

В. А. Скворцов

Теорема Марцинкевича, о которой идет речь в данной заметке, утверждает, что измеримая функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Перрону тогда и только тогда, когда она обладает по крайней мере одной непрерывной перроновской мажорантой и одной непрерывной перроновской минорантой (см. [1]). С тех пор, как эта теорема была впервые опубликована в первом издании книги Сакса [1] (см. также [2], где эта теорема была получена независимо) она была обобщена на случай более общих интегралов перроновского типа (см. [3], [4], [5], а также обзорную статью [6]). В то же время было замечено, что для некоторых интегралов, которые определяются с помощью симметричных производных чисел, теорема Марцинкевича неверна (см. [7], [6], [8]).

В этой заметке мы сделаем некоторые общие наблюдения, касающиеся взаимосвязи этой теоремы с понятием вариации функции относительно дифференциального базиса, и затем, на основе этих наблюдений покажем, что теорема Марцинкевича неверна для двоичного интеграла Перрона.

1. Напомним некоторые определения (см. [9], [10]). *Дифференциальным базисом* β назовем некоторое подмножество декартова произведения $J \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – действительная прямая, а J – множество всех невырожденных (замкнутых интервалов) на $\mathbb{R}$.

Если $E \subset \mathbb{R}$, то положим

$$\beta(E) = \{(I, x) \in \beta; I \subset E\},$$

$$\beta[E] = \{(I, x) \in \beta; x \in E\}.$$

Скажем, что дифференциальный базис β *задан на отрезке* I_0 , если $\beta = \beta(I_0) = \beta[I_0]$. Множество $\beta[\{x\}]$ будем называть *дифференциальным базисом в точке* x .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00417.

Если функция $\delta(x) > 0$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$, положим

$$\beta_\delta[E] = \{(I, x) \in \beta[E] : I \subset (x - \delta(x), x + \delta(x))\}.$$

Все дальнейшие рассуждения будем вести на некотором фиксированном интервале, на котором задан базис β . Пусть это будет интервал $[a, b]$. Мы будем предполагать, что для любой функции $\delta(x) > 0$, заданной на $[a, b]$, и любого $x \in [a, b]$ выполнено соотношение $\beta_\delta[\{x\}] \neq \emptyset$ (свойство Витали).

Конечное подмножество $\pi \subset \beta_\delta[E]$ назовем β_δ -разбиением на множестве E , если интервалы I_1 и I_2 из различных пар $(I_1, x_1) \in \pi$, $(I_2, x_2) \in \pi$ не перекрываются. Разбиение $\pi \subset \beta_\delta(I) \cap \beta_\delta[I]$ назовем β_δ -разбиением отрезка I , если

$$\bigcup_{i: (I_i, x_i) \in \pi} I_i = I.$$

Скажем, что базис β обладает *свойством разбиения*, если для любого интервала I такого, что $(I, x) \in \beta$ при некотором x и для любой функции $\delta(x) > 0$, заданной на $[a, b]$, существует β_δ -разбиение интервала I .

Все рассматриваемые здесь функции предполагаются действительнозначными. Если F – функция точки, то ей соответствует функция

$$F([a, b]) = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Если функция интервала аддитивна, то соотношение (1) позволяет восстановить (с точностью до аддитивной константы) функцию точки, для которой верно (1). Мы будем ниже также рассматривать функции, заданные на базисе β , т.е. на множестве пар “интервал-точка”.

Верхнюю и нижнюю производную функции интервала F (или соответствующей ей по (1) функции точки, если F аддитивна) в точке x относительно базиса β определим соотношениями

$$\begin{aligned} \overline{D}_\beta F(x) &= \inf_\delta \left\{ \sup \frac{F(I)}{|I|} : (I, x) \in \beta_\delta[\{x\}] \right\}, \\ \underline{D}_\beta F(x) &= \sup_\delta \left\{ \inf \frac{F(I)}{|I|} : (I, x) \in \beta_\delta[\{x\}] \right\}. \end{aligned}$$

Если $\overline{D}_\beta F(x) = \underline{D}_\beta F(x)$, то это обобщение назовем β -производной функции F в точке x , обозначив ее $D_\beta F(x)$. Если эта производная конечна в точке x , то скажем, что F дифференцируема в x относительно базиса β , или, короче, β -дифференцируема.

Функция интервала F называется *супераддитивной*, если для интервалов I, I_1, I_2 таких, что $I = I_1 \cup I_2$ и интервалы I_1 и I_2 не перекрываются,

справедливо неравенство $F(I) \geq F(I_1) + F(I_2)$. Функция F называется *субаддитивной*, если $-F$ супераддитивна.

Пусть f – функция точки на $[a, b]$ и β – дифференциальный базис, заданный на $[a, b]$, причем $([a, b], x) \in \beta$ при некотором x . Супераддитивная функция интервала M называется P_β -*мажорантой* функции f , если $\underline{D}_\beta M(x) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Субаддитивная функция интервала m называется P_β -*минорантой* функции f , если $\overline{D}_\beta m(x) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Для базисов, обладающих свойством разбиения, справедливо (см. [9]) соотношение $M(I) \geq m(I)$ при любом I таком, что $(I, x) \in \beta$. Поэтому имеет смысл следующее определение: функция f P_β -*интегрируема* на $[a, b]$ и ее P_β -*интеграл* равен конечному числу C , если $\inf M([a, b]) = \sup m([a, b]) = C$, где $\inf$ и $\sup$ берутся по множеству всех P_β -мажорант и по множеству всех P_β -минорант функции f соответственно.

Легко проверить, что если P_β -интеграл функции f существует на $[a, b]$, то он определен и на всяком внутреннем подинтервале I таком, что $(I, x) \in \beta$, являясь аддитивной функцией интервала, которую естественно назвать *неопределенным P_β -интегралом* функции f и обозначить $P_\beta\text{-}\int_I f = F(I)$. Неопределенный интеграл $F(I)$ *непрерывен относительно базиса β* в каждой точке x , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta(x) > 0$ такая, что $|F(I)| < \varepsilon$, если $(I, x) \in \beta_\delta[\{x\}]$.

Заметим, что классический интеграл Перрона (см. [1]) определяется с помощью мажорант и минорант, являющихся функциями точки, что соответствует использованию аддитивных мажорант и минорант в выше приведенном определении. В теореме Марцинкевича также речь идет об аддитивных мажорантах и минорантах.

Для базисов, обладающих свойством разбиения, интеграл Перрона эквивалентен интегралу Хенстока–Курцвейля, определяемому с помощью обобщенных сумм Римана (см. [9], [11]). Нам здесь не понадобится само определение этого интеграла, но некоторые понятия и факты из теории интеграла Хенстока–Курцвейля мы будем использовать (см. [9], [10]).

Пусть $\Phi(I, x)$ – функция, определенная на элементах базиса β , заданного на отрезке $[a, b]$. В частности, это может быть функция интервала $F(I)$, что соответствует условию $F(I) = \Phi(I, x_1) = \Phi(I, x_2)$ при любых x_1 и x_2 таких, что $(I, x_1), (I, x_2) \in \beta$.

Определим для фиксированной функции $\delta(x) > 0$, заданной на $[a, b]$, и для фиксированного множества $E \subset [a, b]$ δ -*вариацию функции Φ относительно базиса β по множеству E на отрезке $A \subset [a, b]$* , положив

$$V(\beta_\delta, \Phi, E, A) = \sup \left\{ \sum_{(I, x) \in \pi} |\Phi(I, x)| : \pi \subset \beta_\delta[E \cap A] \cap \beta_\delta(A) \right\}. \quad (2)$$

Согласимся считать, что в случае $E \cap A = \emptyset$ δ -вариация функции Φ по E на отрезке A равна нулю. Для функции точки δ -вариацию будем считать совпадающей по определению с δ -вариацией соответствующей функции интервала, определенной равенством (1).

Отметим, что при фиксированных $\delta(x)$, Φ , E вариация

$$V_{\delta}(A) = V(\beta_{\delta}, \Phi, E, A), \quad (3)$$

рассмотренная как функция интервала A , очевидно неотрицательна и супераддитивна.

Далее определим β -вариацию функции Φ по множеству E на отрезке A соотношением

$$V(\beta, \Phi, E, A) = \inf_{\delta} V(\beta_{\delta}, \Phi, E, A), \quad (4)$$

где $\inf$ берется по всем функциям $\delta(x) > 0$. Очевидно, что

$$V(\beta, \Phi, E_1, A) \leq V(\beta, \Phi, E_2, A), \quad \text{если } E_1 \subset E_2. \quad (5)$$

Роль β -вариации в теории интеграла Перрона связана со следующими теоремами, которые являются частными случаями, соответственно, теорем 1.6.1 и 1.6.4 из [9].

ТЕОРЕМА А. Пусть базис β обладает свойством разбиения. Пусть функция f R_{β} -интегрируема на $[a, b]$ и $G(I)$ – ее неопределенный R_{β} -интеграл. Тогда для функции, определенной для каждого элемента (I, x) базиса β равенством $\Phi(I, x) = G(I) - f(x)|I|$, справедливо соотношение

$$V(\beta, \Phi, [a, b], [a, b]) = 0.$$

ТЕОРЕМА В. Пусть базис β обладает свойством разбиения на $[a, b]$. Пусть $F(I)$ – аддитивная функция интервала, а $f(x)$ – функция точки, заданная на $[a, b]$. Пусть $D = \{x : D_{\beta}F(x) = f(x)\}$. Тогда f R_{β} -интегрируема на $[a, b]$ и $F(I)$ – ее неопределенный R_{β} -интеграл, если

$$V(\beta, F(I) - f(x)|I|, [a, b] \setminus D, [a, b]) = 0.$$

Из этих теорем нетрудно вывести следующую теорему, которая будет полезным орудием для построения контрпримеров при выяснении возможности обобщения теоремы Марцинкевича на случай некоторых базисов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть базис β обладает свойством разбиения. Пусть $G(I)$ – аддитивная функция интервала, определенная на всех интервалах $I \subset [a, b]$ таких, что $(I, x) \in \beta([a, b])$ и пусть E – множество точек, в которых не существует конечная производная $D_\beta G(x)$. Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} D_\beta G(x), & \text{если } G \text{ дифференцируема в } x, \\ 0, & \text{если } x \in E, \end{cases}$$

P_β -интегрируема на $[a, b]$ и $G(I)$ является ее неопределенным P_β -интегралом тогда и только тогда, когда

$$V(\beta, G, E, [a, b]) = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f P_β -интегрируема и $G(I)$ – ее неопределенный P_β -интеграл. Тогда для функции Φ , определенной, как в теореме А, в силу неравенства (5) и утверждения теоремы А имеем

$$V(\beta, \Phi, E, [a, b]) = 0. \quad (7)$$

Но $f(x) = 0$ при $x \in E$. Поэтому $\Phi(I, x) = G(I)$ при $x \in E$ и из (7) следует (6).

Обратное утверждение следует из теоремы В.

Опираясь на теорему 1, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть базис β обладает свойством разбиения на $[a, b]$. Пусть $F(I)$ – аддитивная функция интервала, определенная на всех интервалах $I \subset [a, b]$ таких, что $(I, x) \in \beta([a, b])$, и β -дифференцируемая всюду, кроме замкнутого множества E . Пусть $\{\gamma_n\}$ – множество смежных интервалов к E . Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} D_\beta F(x), & \text{если } x \in [a, b] \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E, \end{cases} \quad (8)$$

P_β -интегрируема тогда и только тогда, когда найдется аддитивная функция интервала $H(I)$, для которой $H(I) = 0$ при любом I таком, что $(I, x) \in \beta(\gamma_n)$ для некоторого γ_n , и такая, что для функции

$$G(I) = F(I) + H(I) \quad (9)$$

выполняется соотношение

$$V(\beta, G, E, [a, b]) = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $D_\beta G(x) = D_\beta F(x) = f(x)$ вне E , то к G применима теорема 1 и поэтому из (10) следует P_β -интегрируемость функции f .

Для доказательства обратного утверждения отметим, что если функция f P_β -интегрируема, то на любом отрезке I таком, что $(I, x) \in \beta(\gamma_n)$ для некоторого γ_n , ее интеграл совпадает с $F(I)$, так как на I функция F является одновременно мажорантной и минорантной для $D_\beta F(x)$. Поэтому неопределенный P_β -интеграл функции f необходимо имеет представление (9). Остается еще раз применить теорему 1 к функции G .

В случаях, когда дается отрицательный ответ на вопрос о справедливости теоремы Марцинкевича для конкретного базиса β , теорема 2 позволяет при построении контрпримера доказывать интегрируемость соответствующей функции. Существование пары мажоранты-миноранты в таком контрпримере также может быть доказано с использованием δ -вариации F из теоремы 2 при условии, что мы требуем аддитивности мажоранты и миноранты. В самом деле, для широкого класса базисов можно показать, что функция интервала $V_\delta(I)$, определенная равенством (3) для функции F и множества E из теоремы 2, является непрерывной супераддитивной функцией интервала (см., например, [8]), и поэтому, если она к тому же конечна на $[a, b]$, функции $F(I) + V_\delta(I)$ и $F(I) - V_\delta(I)$ образуют, соответственно, супераддитивную непрерывную миноранту и субаддитивную непрерывную мажоранту функции (8). Однако, во многих случаях, в том числе в рассматриваемом ниже случае двоичного базиса, функция $V_\delta(I)$ не является аддитивной (в чем нетрудно убедиться путем построения примера). Поэтому для построения аддитивных непрерывных мажорант и минорант мы ниже воспользуемся другим методом.

2. Перейдем непосредственно к рассмотрению случая, когда β – двоичный базис на отрезке $[0, 1]$, т.е. базис, образованный всевозможными парами (Δ, x) , где x – любая точка, принадлежащая Δ , а интервалы Δ имеют вид

$$\Delta_j^n = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq j \leq 2^n - 1.$$

Интервалы Δ_j^n при фиксированном n назовем интервалами ранга n . Двоичный базис очевидно обладает свойством разбиения. Если x – двоично-иррациональная точка, то базис $\beta[\{x\}]$ состоит из элементов $(\Delta_{j(x,n)}^n, x)$, где $\{\Delta_{j(x,n)}^n\}_n$ – последовательность вложенных двоичных интервалов, для которых x является общей внутренней точкой. В случае двоично-рациональной точки x базис $\beta[\{x\}]$ образован двумя такими последовательностями интервалов, для которых x является, начиная с некоторого номера n , общим концом. Интеграл Перрона для двоичного базиса рассмотрен нами в [12]–[14].

Покажем, что для двоичного интеграла Перрона несправедлив аналог теоремы Марцинкевича, а имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Существует измеримая на отрезке $[0, 1]$ функция, обладающая непрерывной аддитивной P_β -мажорантой и непрерывной аддитивной P_β -минорантой, где β – двоичный базис, но неинтегрируемая в смысле двоичного интеграла Перрона.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим на $[0, 1]$ симметричное совершенное множество канторовского типа путем удаления смежных интервалов так, что отношение длины удаляемого открытого интервала к длине концентрического с ним отрезка, из которого он удаляется, постоянно и равно $1/2$. Таким образом, на первом шаге мы удаляем из отрезка $[0, 1] = \Delta^0 = \Delta_0^1 \cup \Delta_1^1$ интервал $(1/4, 3/4)$, оставляя отрезки Δ_0^2 и Δ_3^2 . Далее построение можно описать по индукции. Пусть после $(n - 1)$ -го удаления осталось 2^{n-1} отрезков, каждый из которых представляет собой двоичный отрезок $\Delta_j^{2^{n-2}}$ ранга $2n - 2$. Нижние индексы j этих оставшихся двоичных отрезков обозначим $j(k, 2n - 2)$, где $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ и

$$0 = j(0, 2n - 2) < j(1, 2n - 2) < \dots < j(2^{n-1} - 1, 2n - 2) = 2^{2n-2} - 1.$$

Каждый из этих отрезков можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{j(k, 2n-2)}^{2n-2} &= \Delta_{2j(k, 2n-2)}^{2n-1} \cup \Delta_{2j(k, 2n-2)+1}^{2n-1} \\ &= \Delta_{4j(k, 2n-2)}^{2n} \cup \Delta_{4j(k, 2n-2)+1}^{2n} \cup \Delta_{4j(k, 2n-2)+2}^{2n} \cup \Delta_{4j(k, 2n-2)+3}^{2n}. \end{aligned} \quad (11)$$

На n -м шаге каждого интервала $\Delta_{j(k, 2n-2)}^{2n-2}$ удаляется открытый интервал γ_k^n , замыкание которого представимо в виде

$$\overline{\gamma}_k^n = \Delta_{4j(k, 2n-2)+1}^{2n} \cup \Delta_{4j(k, 2n-2)+2}^{2n}. \quad (12)$$

После этого на $\Delta_{j(k, 2n-2)}^{2n-2}$ остаются два интервала ранга $2n$: $\Delta_{4j(k, 2n-2)}^{2n}$ и $\Delta_{4j(k, 2n-2)+2}^{2n}$. В результате этого построения определяется целочисленная функция $j(k, m)$ для $m = 0, 1, \dots$, и для k таких, что $0 \leq k \leq 2^n - 1$ при $m = 2n$ и $m = 2n - 1$. Значения функции удовлетворяют условию $0 \leq j(k, m) \leq 2^m - 1$ и определяются по индукции соотношениями

$$\begin{aligned} j(2k, 2n - 1) &= 2j(k, 2n - 2), & j(2k + 1, 2n - 1) &= 2j(k, 2n - 2) + 1, \\ j(2k, 2n) &= 4j(k, 2n - 2), & j(2k + 1, 2n) &= 4j(k, 2n - 2) + 3. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Delta_{j(2k, 2n)}^{2n} &\subset \Delta_{j(2k, 2n-1)}^{2n-1} \subset \Delta_{j(k, 2n-2)}^{2n-2}, \\ \Delta_{j(2k+1, 2n)}^{2n} &\subset \Delta_{j(2k+1, 2n-1)}^{2n-1} \subset \Delta_{j(k, 2n-2)}^{2n-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим (см. [11], [12], [13]), что при любых k и n

$$\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1} \setminus \Delta_{j(k, 2n)}^{2n} \subset \gamma_k^n. \quad (15)$$

Положим

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_{j(k, 2n)}^{2n}, \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Очевидно, что $|E| = 0$ и что любой точке $x \in E$ соответствует последовательность индексов $\{k(x, m)\}_m$ такая, что последовательность интервалов $\{\Delta_{j(k(x, m), m)}^m\}_m$ стягивается к точке x . Отметим, что у интервалов четного ранга $\Delta_{j(k, 2n)}^{2n}$ оба конца принадлежат E , в то время как у интервалов $\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}$ один конец лежит в E , а другой является центром смежного интервала γ_k^n .

Пусть c_k^n – центр интервала $\gamma_k^n = (a_k^n, b_k^n)$ так, что

$$\begin{aligned} [a_k^n, c_k^n] &= \Delta_{j(2k, 2n)+1}^{2n} \subset \Delta_{j(2k, 2n-1)}^{2n-1}, \\ [c_k^n, b_k^n] &= \Delta_{j(2k+1, 2n)-1}^{2n} \subset \Delta_{j(2k+1, 2n-1)}^{2n-1}. \end{aligned}$$

Определим на $[0, 1]$ функцию $F(x) = 0$, если $x \in E$, и

$$F(x) = 2^{-n} \sin^2 \left(\frac{x - a_k^n}{b_k^n - a_k^n} \pi \right), \quad \text{если } x \in (a_k^n, b_k^n) = \gamma_k^n. \quad (16)$$

Очевидно, что F непрерывна на всем отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на $[0, 1] \setminus E$, причем в концевых точках a_k^n и b_k^n интервала γ_k^n она имеет одностороннюю производную изнутри интервала, равную нулю. Из определения (16) видно, что $F(c_k^n) = 2^{-n}$ и $F(a_k^n) = F(b_k^n) = 0$, откуда с учетом (15) для соответствующей, согласно (1), функции интервала имеем

$$|F(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1})| = 2^{-n}. \quad (17)$$

Кроме того.

$$F(\Delta_{j(k, 2n)}^{2n}) = 0. \quad (18)$$

Докажем, что функция

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{если } x \in [0, 1] \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E, \end{cases}$$

обладает аддитивной непрерывной P_β -мажорантой и аддитивной непрерывной P_β -минорантой. Мажоранту и миноранту мы определим как функции интервала, равные приращениям соответствующих функций точки, чем будет гарантирована их аддитивность.

Определим на множестве E сингулярную меру μ так, чтобы для каждого интервала $\Delta_{j(k, 2n)}^{2n}$ выполнялось равенство

$$\mu(E \cap \Delta_{j(k, 2n)}^{2n}) = 2^{-n}.$$

Тем самым

$$\mu(E) = 1. \quad (19)$$

Поскольку $E \cap \Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1} = E \cap \Delta_{j(k, 2n)}^{2n}$, то

$$\mu(E \cap \Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}) = \mu(E \cap \Delta_{j(k, 2n)}^{2n}) = 2^{-n}. \quad (20)$$

Определим функцию точки на $[0, 1]$, положив $r(x) = \mu(E \cap [0, x])$. Эта функция непрерывна и монотонна на $[0, 1]$ и постоянна на каждом интервале γ_k^n . Пусть R – функция интервала, определяемая как приращение функции r . Ясно, что

$$D_\beta R(x) = R'(x) = 0, \quad \text{если } x \in [0, 1] \setminus E. \quad (21)$$

Докажем, что в каждой точке $x \in E$ для любого интервала Δ_j^m такого, что $x \in \Delta_j^m$, выполняется неравенство

$$|F(\Delta_j^m)| \leq R(\Delta_j^m). \quad (22)$$

В самом деле, если $x \in \Delta_j^m$, то это значит, что этот интервал имеет вид либо $\Delta_{j(k, 2n)}^{2n}$, либо $\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}$. В первом случае (22) очевидно в силу (18). Во втором случае имеет место равенство (17), и поэтому в силу (20) и определения функции R имеем

$$|F(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1})| 2^{-n} = \mu(E \cap \Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}) = R(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}),$$

что также обеспечивает (22). Из неравенства (22), дифференцируемости функции F вне E , равенства (21) и непрерывности функций F и r легко следует, что функции $M(\Delta) = F(\Delta) + R(\Delta)$ и $m(\Delta) = F(\Delta) - R(\Delta)$ являются, соответственно, непрерывной аддитивной P_β -мажорантой и непрерывной аддитивной P_β -минорантой функции f .

Осталось доказать, что функция f не является P_β -интегрируемой на $[0, 1]$. Для этого воспользуемся теоремой 2.

Пусть H – любая функция интервала, равная нулю на любом двоичном интервале, целиком лежащем внутри какого-нибудь интервала γ_n^k . Пусть $G(\Delta) = F(\Delta) + H(\Delta)$. В силу (15), (17) и (18)

$$\begin{aligned} |G(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}) - G(\Delta_{j(k, 2n)}^{2n})| &= |G(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1} \setminus \Delta_{j(k, 2n)}^{2n})| \\ &= |F(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1} \setminus \Delta_{j(k, 2n)}^{2n})| = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{либо } |G(\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1})| \geq 2^{-n-1}, \quad \text{либо } |G(\Delta_{j(k, 2n)}^{2n})| \geq 2^{-n-1}, \quad (23)$$

где $\Delta_{j(k, 2n)}^{2n} \subset \Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}$.

Вновь воспользуемся введенной выше сингулярной мерой μ .

Зафиксируем произвольную функцию $\delta(x) > 0$. Рассмотрим на множестве E произвольное β_δ -разбиение $\pi = \{(\Delta_j, x)\} \subset \beta_\delta[E]$ такое, что

$$E \subset \bigcup_j \Delta_j. \quad (24)$$

Мы перейдем от π к другому разбиению $\pi' = \{(\Delta'_i, x_i)\} \in \beta_\delta[E]$ с теми же точками x_i и с $\Delta'_i \subset \Delta_i$.

Зафиксируем двоичный интервал Δ_i из π . Он имеет либо четный, либо нечетный ранг. Если $\Delta_i = \Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}$ при некотором n , то к нему применимы соотношения (23). Мы включим в π' в качестве Δ'_i тот из интервалов $\Delta_{j(k, 2n-1)}^{2n-1}$ и $\Delta_{j(k, 2n)}^{2n}$, для которого реализуется неравенство из (23). В любом случае получим с учетом (20)

$$|G(\Delta'_i)| \geq 2^{-n-1} = 2^{-1}\mu(E \cap \Delta_i).$$

Если же $\Delta_i = \Delta_{j(k, 2m)}^{2m}$, то в силу соотношений (14), примененных к $n = m + 1$, точка x_i лежит либо в $\Delta_{j(2k, 2m+1)}^{2m+1}$, либо в $\Delta_{j(2k+1, 2m+1)}^{2m+1}$. В любом из этих случаев к соответствующему интервалу нечетного ранга $2m + 1$ применимо только что проведенное выше рассуждение с заменой в (23) n на $m + 1$. Это приводит к выбору в качестве Δ'_i такого интервала, для которого

$$|G(\Delta'_i)| \geq 2^{-m-2} = 2^{-2}\mu(E \cap \Delta_i). \quad (25)$$

Итак, при любом i мы перешли от интервала Δ_i к интервалу Δ'_i , для которого выполняется по крайней мере (25). Суммируя неравенство (25) по i и учитывая (24) и (19), приходим к соотношению

$$\sum_{i: (\Delta'_i, x_i) \in \pi'} |G(\Delta'_i)| \geq 2^{-2}\mu(E) = 2^{-2}.$$

Поскольку функция $\delta(x) > 0$ была взята произвольно, то в соответствии с определениями (2) и (4) получаем

$$V(\beta, G, E, [0, 1]) \geq 2^{-2}.$$

Применяя теорему 2, приходим к выводу, что f не интегрируема в смысле двоичного интеграла Перрона, что завершает доказательство теоремы 3.

Отметим в заключение, что построенная при доказательстве теоремы 3 функция F , очевидно является ACG -функцией (см. [1]), которая, к тому же, дифференцируема почти всюду. Поэтому F является неопределенным интегралом Данжуа–Хинчина (см. [15]) своей производной $F'(x) = f(x)$. Тем самым мы установили справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Существует функция, которая интегрируема на отрезке $[0, 1]$ в смысле интеграла Данжуа–Хинчина, но не интегрируема на $[0, 1]$ в смысле двоичного интеграла Перрона.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [2] Толстов Г. П. Об интеграле Perron'a // Матем. сб. 1939. Т. 5. № 47. С. 647–660.
- [3] Скворцов В. А. Некоторые свойства CP -интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60(102). № 3. С. 304–324.
- [4] Bullen P. S. The Burkill approximately continuous integral – II // Math. Chron. 1983. V. 12. P. 93–98.
- [5] Байгожин Е. С. О двоичном интеграле Перрона // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1993. № 4.
- [6] Bullen P. S. Some applications of a theorem of Marcinkiewicz // Lecture Notes in Math. V. 1419. Berlin: Springer, 1990. P. 10–18.
- [7] Скляренко В. А. Обобщенные интегралы в теории тригонометрических рядов. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1973.
- [8] Skvortsov V. A., Thomson B. S. Symmetric integrals do not have the Marcinkiewicz property // Real Analysis Exchange. 1995. V. 20. № 2.
- [9] Ostaszewski K. M. Henstock integration in the plane // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1986. V. 63. № 353.
- [10] Thomson B. S. Derivates of interval functions // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1991. V. 93. № 452.
- [11] Henstock R. The general theory of integration. Oxford: Clarendon Press, 1991.
- [12] Скворцов В. А. О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 4. С. 784–786.
- [13] Скворцов В. А. Некоторое обобщение интеграла Перрона // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1969. № 4. С. 48–51.
- [14] Skvortsov V. A. Some properties of dyadic primitives // Lecture Notes in Math. V. 1419. Berlin: Springer, 1990. P. 167–179.
- [15] Хинчин А. Я. О процессе интегрирования Данжуа // Матем. сб. 1918. Т. 30. № 4. С. 548–557.