Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Д. Усманов, О многообразии решений сингулярной обобщенной системы Коши–Римана, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 278–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:16:45

О МНОГООБРАЗИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА

З. Д. Усманов

1. Введение. Предметом исследования в статье служит однородное уравнение

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}w - B(z)\bar{w} = 0, \quad z \in G, \quad (1)$$

в котором $w(z)$ – искомая и $B(z)$ – заданная комплекснозначные функции переменного $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $i^2 = -1$, сингулярная точка $z = 0$ является внутренней для области G . Предполагается, что

$$B(z) = b(\varphi) + B_0(z), \quad (2)$$

где $b(\varphi)$ представима отрезком ряда Фурье:

$$b(\varphi) = \sum_{k=-m_0}^m b_k e^{ik\varphi}, \quad (3)$$

где m_0 и m – целые неотрицательные числа, а $B(z) \in C^\infty(G)$ и $B(z) = O(|z|^\alpha)$, $\alpha > 0$, $z \rightarrow 0$.

Обозначим через A множество наборов $m_0 + m + 1$ комплексных чисел $(b_{-m_0}, \dots, b_0, \dots, b_m)$, являющихся коэффициентами Фурье функции $b(\varphi)$.

Через $A_0 \subset A$ обозначим подмножество, состоящее из наборов, все компоненты которых равны нулю, кроме b_{2k} ($-[m_0/2] \leq k \leq [m/2]$, где квадратными скобками обозначена целая часть числа), причем

$$|b_{2k}|^2 = 4(n-s)(s-k), \quad (4)$$

где n – натуральное число и

$$s = \begin{cases} k+1, \dots, [\frac{n+k}{2}] & \text{при } 0 \leq k < n, \\ 0, \dots, [\frac{n-k}{2}] & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем говорить о принадлежности $b(\varphi)$ тому или иному подмножеству множества A , имея ввиду, что это относится к набору чисел $(b_{-m_0}, \dots, b_0, \dots, b_m)$, соответствующему этой функции.

В статье получен следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $b(\varphi) \in A \setminus A_0$. Тогда уравнение (1) с условиями (2), (3) не допускает нетривиальных решений из класса $C^\infty(G)$.

Опишем основные этапы доказательства теоремы. Сначала мы обращаемся к уравнению

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}\Phi - b(\varphi)\bar{\Phi} = 0, \quad z \in G, \quad (5)$$

в котором $b(\varphi)$ задается равенством (3). Устанавливается

ЛЕММА 1. Только при условии $b(\varphi) \in A_0$ уравнение (5) имеет решения, аналитические по z и $\bar{z}$ в области G .

На этой основе доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $b(\varphi) \in A \setminus A_0$ и $w(z)$ – некоторое решение уравнения (1), (2), (3) из класса $C^p(G)$, $p \geq 2$. Тогда

$$w(z) = O(|z|^p), \quad z \rightarrow 0.$$

В частности, при $p = \infty$ отсюда следует, что $w(z)$ должно иметь нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$. Этот факт существенно используется для доказательства основного результата. Отметим также, что в леммах 1 и 2 без особых ограничений можно полагать область G кругом с центром в $z = 0$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Прежде всего перепишем уравнение (5) в полярных координатах:

$$r\Phi_r + i\Phi_\varphi - b(\varphi)\bar{\Phi} = 0. \quad (6)$$

Поскольку нас должны интересовать только аналитические по z и $\bar{z}$ решения, то

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{s,n-s} z^s \bar{z}^{n-s} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Phi_n(\varphi),$$

причем

$$\Phi_n = \sum_{s=0}^n a_{s,n-s} e^{i(2s-n)\varphi}. \quad (7)$$

Подставляя выражение $\Phi(z)$ в (6) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях r , получим

$$i\Phi'_n + n\Phi_n - b(\varphi)\bar{\Phi}_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где штрих над Φ_n означает дифференцирование по φ . Отсюда следует, что уравнение (6) будет иметь аналитические решения, если хотя бы одна

из Φ_n окажется отличной от нуля. Легко проверить, что $\Phi_0 = a_0 = 0$. Поэтому в дальнейшем полагаем $n = 1, 2, \dots$.

Внося (7) в (8), и, учитывая (3), получим

$$\sum_{s=0}^n 2(n-s)a_{s,n-s}e^{i(2s-n)\varphi} - \sum_{k=-m_0}^m b_k e^{ik\varphi} \sum_{s=0}^n \bar{a}_{s,n-s} e^{-i(2s-n)\varphi} = 0. \quad (9)$$

Здесь неизвестными величинами являются $a_{s,n-s}$ ($s = 0, \dots, n$). Докажем, что если среди чисел b_k , по крайней мере какая-либо пара чисел отлична от нуля, то все $a_{s,n-s} = 0$.

Пусть

$$b_{-m_0} \cdot b_m \neq 0, \quad (10)$$

$m_0 > 0$ и $m > 0$. В данном случае нет необходимости выявлять в уравнении (9) коэффициенты при различных степенях $e^{i\varphi}$ и приравнивать их нулю. Это достаточно сделать лишь для максимальной и минимальной степеней:

$$\begin{aligned} e^{i(n+m)\varphi} : \quad & b_m \cdot \bar{a}_{0,n} = 0, \\ e^{-i(n+m_0)\varphi} : \quad & b_{-m_0} \cdot \bar{a}_{n,0} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует $a_{0,n} = a_{n,0} = 0$. Вследствие чего, в уравнении (9) индекс суммирования s должен изменяться от 1 до $n-1$. И вновь, выявляя коэффициенты при максимальной и минимальной степенях $e^{i\varphi}$, выводим, что $a_{1,n-1} = a_{n-1,1} = 0$. Повторяя процедуру конечное число раз, получим $a_{s,n-s} = 0$, $s = 0, \dots, n$. Следовательно, при выполнении условия (10) уравнение (5) не имеет аналитических решений.

Теперь предположим, что (10) имеет место, когда одно из чисел m_0 или m равняется нулю. Пусть $m_0 = 0$ и $m > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} e^{i(n+m)\varphi} : \quad & b_m \cdot \bar{a}_{0,n} = 0, \\ e^{-in\varphi} : \quad & b_0 \cdot \bar{a}_{n,0} + 2na_{0,n} = 0. \end{aligned}$$

И опять таки $a_{0,n} = a_{n,0} = 0$. Повторяя процедуру приравнивания коэффициентов при максимальной и минимальной степенях, получим в конечном счете $a_{s,n-s} = 0$, $s = 0, \dots, n$. Такой же итог будет при $m_0 > 0$ и $m = 0$.

Для полноты картины следует учесть еще одну возможность, которая не охватывается рассмотренными случаями. Речь идет о частной реализации формулы (3) в виде

$$b(\varphi) = \sum_{k=\nu_0}^{\nu} b_k e^{ik\varphi},$$

где $-m_0 \leq \nu_0 < \nu \leq m$ и $\nu_0 \nu > 0$. И в этом случае (хотя и несколькими иным путем и технически более громоздко, чем ранее) устанавливается $a_{s,n-s} = 0, s = 0, \dots, n$.

Таким образом, уравнение (5) не допускает решений, аналитических по z и $\bar{z}$, если среди чисел b_k найдется хотя бы пара чисел, отличных от нуля.

Остается рассмотреть случай, когда отрезок ряда Фурье (3) вырождается в одночлен, т.е. $b(\varphi) = b_\nu e^{i\nu\varphi}$ ($-m_0 \leq \nu \leq m$). Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\sum_{s=0}^n 2(n-s)a_{s,n-s}e^{i(2s-n)\varphi} - b_\nu \sum_{s=0}^n \bar{a}_{s,n-s}e^{i(n+\nu-2s)\varphi} = 0. \quad (11)$$

Если ν – нечетное число, то $a_{s,n-s} = 0, s = 0, \dots, n$, поскольку все слагаемые одной из сумм будут содержать только четные степени $e^{i\varphi}$, а все слагаемые другой суммы – только нечетные степени. Следовательно, нетривиальные решения могут быть лишь при четных ν .

Итак, $\nu = 2k$. Пусть $0 \leq k \leq [m/2]$. В зависимости от значения n необходимо различать две возможности: 1) $n \leq k$ и 2) $n > k$. В случае 1) максимальная степень функции $e^{i\varphi}$ в первой сумме равенства (11) не превосходит той же функции во второй сумме. По этой причине все $a_{s,n-s} = 0$.

В случае 2), приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях $e^{i\varphi}$, получим

$$2(n-s)a_{s,n-s} - b_{2k}\bar{a}_{n+k-s,s-k} = 0 \quad (12)$$

для $s = k+1, \dots, n-1$ и $a_{s,n-s} = 0$ для прочих значений s . Еще одно уравнение

$$2(s-k)a_{n+k-s,s-k} - b_{2k}\bar{a}_{s,n-s} = 0 \quad (13)$$

извлекается из предыдущего путем замены индекса s на s^* по равенству $s = n+k-s^*$ ($s^* = k+1, \dots, n-1$) и последующим переобозначением s^* в s . Система этих двух уравнений по отношению к неизвестным $a_{s,n-s}$ и $a_{n+k-s,s-k}$ имеет нетривиальное решение при условии, что ее определитель отличен от нуля. Выписывая эти условия, приходим к соотношению (4).

Отличным от нуля коэффициентам $a_{s,n-s}$ и $a_{n+k-s,s-k}$ соответствует аналитическое по z и $\bar{z}$ решение

$$\Phi(z) = a_{s,n-s}z^s z^{n-s} + a_{n+k-s,s-k}z^{n+k-s}\bar{z}^{s-k}$$

уравнения (5) с $b(\varphi) = b_{2k}e^{2ik\varphi}$. Разумеется, сами коэффициенты связываются формулой (12).

Остается рассмотреть последнюю возможность: $\nu = 2k$ и $k < 0$. В ней необходимо различать два случая: 1) $n < -k$ и 2) $n \geq -k$. В случае 1) все

$a_{s,n-s} = 0$, поскольку в (11) минимальная степень $e^{i\varphi}$ в первой сумме превосходит максимальную степень той же функции во второй сумме. В случае 2) коэффициенты $a_{s,n-s}$ и $a_{n+k-s,s-k}$ удовлетворяют системе (12), (13) и могут быть отличными от нуля только при выполнении условия (4).

Лемма 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Разложим $w(z)$ в окрестности точки $z = 0$ в отрезок ряда Тейлора с остаточным членом:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{p-1} r^n \Phi_n(\varphi) + R(z), \quad (14)$$

где $\Phi_n(\varphi)$ задается равенством (7) и $R(z) \in C^p(G)$, причем

$$R(z) = O(|z|^p) \quad \text{и} \quad R_{\bar{z}} = O(|z|^{p-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (15)$$

Покажем, что $\Phi_n(\varphi) \equiv 0$, $n = 0, \dots, p-1$. Тогда из (14) и (15) будет следовать утверждение леммы 2.

Подставив (14) в (1) с ограничениями (2), (3), запишем полученный результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p-1} r^n (i\Phi'_n + n\Phi_n - b(\varphi)\bar{\Phi}_n) - B(z) \sum_{n=0}^{p-1} r^n \bar{\Phi}_n \\ + 2\bar{z}\partial_{\bar{z}}R - [b(\varphi) + B(z)]\bar{R} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Полагая $r = 0$, устанавливаем, что $b(\varphi)\bar{\Phi}_0 = 0$, и потому $\Phi_0 = a_{0,0} = 0$.

С учетом этого в уравнении (16) суммирование должно начинаться с $n = 1$. Поделив это уравнение на r и затем положив $r = 0$, получим

$$i\Phi'_1 + \Phi_1 - b(\varphi)\bar{\Phi}_1 = 0,$$

что совпадает с (8) при $n = 1$. Поскольку $b(\varphi)$ не принадлежит множеству A_0 , то $\Phi_1 = 0$ вследствие леммы 1.

Повторяя аналогичные рассуждения, получим $\Phi_n = 0$, $n = 2, \dots, p-1$. Лемма 2 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Поскольку $w(z) \in C^\infty(G)$, то $w(z)$ в силу леммы 2 должно иметь нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$. Докажем, что в таком случае $w(z) \equiv 0$.

Предположим противное, т.е. $w(z) \neq 0$. Согласно [1], такое решение представимо в виде

$$w(z) = \Psi(z)e^{\omega(z)}, \quad z \in G, \quad (17)$$

где $\Psi(z)$ – аналитическая функция от z ,

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\bar{\zeta}(\zeta - z)}, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

и

$$f(z) = \begin{cases} B(z) \frac{\overline{w(z)}}{w(z)} & \text{для точек } z, \text{ в которых } w(z) \neq 0, \\ B(z) & \text{для точек } z, \text{ в которых } w(z) = 0. \end{cases}$$

Применяя неравенство Ж. Адамара (см. [1, §6 гл.1]) к оценке функции $\omega(z)$, получим

$$|\omega| < \lambda \ln \frac{1}{|z|} + M,$$

где

$$\lambda = 4 \sup_G |B(z)|$$

и M – константа, зависящая от G . Теперь из (17) выводим

$$|\Psi(z)| < e^M |z|^\lambda |w(z)|.$$

Вследствие чего $\Psi(z)$ должна иметь нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$. Но тогда $\Psi(z) \equiv 0$, и потому $w(z) \equiv 0, z \in G$.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что обзор исследований уравнений вида (1) содержится в [2]. Там же показано, что это уравнение с условиями (2), (3) описывает бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения достаточно общей структуры.

Институт математики
АН республики Таджикистан

Поступило
25.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1993.