Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Фоменко, Об одном свойстве конформных бесконечно малых деформаций многомерных поверхностей в римановом пространстве, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 284–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:27:34

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНФОРМНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Т. Фоменко

1. Пусть F^k — k -мерная поверхность класса C^3 в n -мерном римановом пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрической формой $a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, где $a_{\alpha\beta} \in C^3$. Будем считать, что в окрестности каждой своей точки поверхность F^k задается уравнениями

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^k),$$

где $(x^1, x^2, \dots, x^k)$ пробегает некоторую область k -мерного арифметического пространства.

Рассмотрим деформацию $\{F_\varepsilon^k\}$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, поверхности F^k , заданную уравнениями

$$y^\alpha = f_\varepsilon^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^k),$$

где f_ε^α — C^2 -непрерывно зависящие от параметра ε функции; $f_0^\alpha \equiv f^\alpha$. Каждая величина A на F^k при деформации перейдет в величину A_ε на F_ε^k . Величины

$$\delta(A) = \left. \frac{dA_\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad \text{и} \quad \tilde{\delta}(A) = \frac{\delta(A)}{A}$$

при $A \neq 0$ называют, соответственно, *вариацией* и *относительной вариацией* величины A , а тензорное поле $z^\alpha = \delta(f^\alpha)$ — *полем деформации* поверхности F^k . Две деформации поверхности F^k в $\mathbb{R}^n$ являются эквивалентными, если их поля деформаций совпадают. Каждый из классов эквивалентных деформаций называют бесконечно малой деформацией поверхности F^k . В дальнейшем будем считать, что $z^\alpha \in C^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00228а.

Бесконечно малую деформацию поверхности F^k называют конформной (коротко C -деформацией), если вариации углов между любыми двумя направлениями в каждой точке поверхности равны нулю.

Известно [1], что C -деформации рассматриваемой поверхности F^k , и только они, характеризуются тем свойством, что относительная вариация $\tilde{\delta}(d_x s)$ элемента длины дуги кривой на F^k является функцией класса C^2 на F^k .

Пусть G^2 – двумерная поверхность, проходящая через точку x поверхности F^k в направлении двумерной площади ξ и лежащая на поверхности F^k . Обозначим через $d_x \sigma(G^2)$ элемент площади поверхности G^2 в точке x . Бесконечно малую деформацию поверхности F^k назовем *ареально рекуррентной* (коротко AR -деформацией), если относительная вариация $\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^2))$ является функцией класса C^2 на F^k , т.е. в каждой точке $x \in F^k$ относительная вариация $\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^2))$ не зависит от выбора двумерной площадки ξ и двумерной поверхности G^2 , проходящей через точку x в направлении ξ . Отсюда следует, что каждая AR -деформация характеризуется рекуррентным соотношением:

$$\delta(d_x \sigma(G^2)) = \varphi(x) d_x \sigma(G^2) \quad \forall x \in F^k, \quad (1)$$

где φ – некоторая функция на F^k класса C^2 , определяемая бесконечно малой деформацией.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы бесконечно малая деформация поверхности F^k , $k > 2$, в $\mathbb{R}^n$ была AR -деформацией, необходимо и достаточно, чтобы она была C -деформацией.*

Пусть G^l – l -мерная ($2 \leq l \leq k$) поверхность, проходящая через точку x , $x \in F^k$, в направлении l -мерной площадки η и лежащая на F^k . Обозначим через $d_x \sigma(G^l)$ элемент l -мерного объема поверхности G^l в точке x . Из теоремы 1 вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ. *Относительная вариация $\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^l))$ при AR -деформации поверхности F^k является функцией на F^k , т.е. не зависит от выбора l -мерной площадки η и поверхности G^l , и имеет место формула*

$$\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^l)) = l \tilde{\delta}(d_x s) \quad \forall x \in F^k. \quad (2)$$

В качестве приложения теоремы 1 приведем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть S^{n-1} – гиперсфера (или ее часть) в n -мерном евклидовом пространстве E^n , $n > 3$. Тогда каждая функция φ класса C^2 , заданная на S^{n-1} , порождает семейство, зависящее от*

$n(n+1)/2$ параметров, AR -деформаций поверхности S^{n-1} с вариацией элемента площади двумерной поверхности, определяемой рекуррентным соотношением (1) с заданной функцией φ . Каждое поле AR -деформации представляет сумму полей бесконечно малого движения и нормальной бесконечно малой деформации S^{n-1} в E^n .

Условие $k > 2$ в приведенных теоремах является существенным. В случае $k = 2$ AR -деформации составляют более широкий класс деформаций по сравнению с классом C -деформаций; случай $k = 2$, $\varphi \equiv 0$ хорошо изучен в [2]. Теорема 1 в предположении $\varphi \equiv 0$ для случая евклидова пространства E^n доказана в [3]. Нормальные бесконечно малые деформации изучались в [4].

2. Вывод уравнений AR -деформаций F^k в $\mathbb{R}^n$. Зададим поверхность G^2 на F^k , $k > 2$, уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Тогда элемент площади $d_x \sigma(G^2)$ поверхности G^2 в точке x вычисляется по формуле

$$d_x \sigma(G^2) = (\det \|G_{pq}\|)^{1/2} du^1 \wedge du^2, \quad (3)$$

где $G_{pq} = g_{ij} \xi^i_{(p)} \xi^j_{(q)}$ — метрический тензор поверхности G^2 ; $g_{ij} = a_{\alpha\beta} f^\alpha_{,i} f^\beta_{,j}$ — метрический тензор поверхности F^k ; $\xi^i_{(p)} = \partial x^i / \partial u^p$, $p = 1, 2$.

При AR -деформации поверхности F^k имеем

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (d_x \sigma(G^2)) \right|_{\varepsilon=0} = 2\varphi (d_x \sigma(G^2))^2,$$

где φ — некоторая функция на F^k .

Отсюда в силу формулы (3) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \det \|G_{pq}^\varepsilon\| - \det \|G_{pq}\| \} = 2\varphi (\det \|G_{pq}\|), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} G_{pq}^\varepsilon &= g_{ij}^\varepsilon \xi^i_{(p)} \xi^j_{(q)}; \\ g_{ij}^\varepsilon &= a_{\alpha\beta}^\varepsilon f_{\varepsilon,i}^\alpha f_{\varepsilon,j}^\beta; \\ a_{\alpha\beta}^\varepsilon &= a_{\alpha\beta}(f_\varepsilon^1, f_\varepsilon^2, \dots, f_\varepsilon^n). \end{aligned}$$

Разлагая функции $a_{\alpha\beta}^\varepsilon, f_\varepsilon^\alpha$ по степеням малого параметра ε , находим

$$g_{ij}^\varepsilon = a_{\alpha\beta} f_{,i}^\alpha f_{,j}^\beta + \varepsilon [\partial_\gamma a_{\alpha\beta} z^\gamma f_{,i}^\alpha f_{,j}^\beta + a_{\alpha\beta} z_{,j}^\alpha f_{,i}^\beta + a_{\alpha\beta} z_{,i}^\alpha f_{,j}^\beta] + o(\varepsilon),$$

где $o(\varepsilon)$ обозначают члены более высокого порядка малости по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$; $a_{\alpha\beta}, \partial_\gamma a_{\alpha\beta}$ вычислены в точках поверхности F^k .

Полагая

$$\nabla_i^* z^\alpha = \partial_i z^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha f_{,i}^\beta z^\gamma,$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – символы Кристоффеля пространства $\mathbb{R}^n$, запишем

$$g_{ij}^\varepsilon = g_{ij} + \varepsilon \delta g_{ij} + o(\varepsilon),$$

где

$$\delta g_{ij} = a_{\alpha\beta} \nabla_{(i}^* z^\alpha f_{,j)}^\beta.$$

Используя полученное соотношение, запишем уравнение (4) в виде:

$$D_{ij,kl} \xi_{(1)}^i \xi_{(2)}^j \xi_{(1)}^k \xi_{(2)}^l = 0, \quad (5)$$

где

$$D_{ij,kl} = (g_{ik} \delta g_{jl} + g_{jl} \delta g_{ik} - 2\varphi g_{ik} g_{jl})[i, j]; \quad (6)$$

здесь знак $[i, j]$ означает альтернирование по индексам i, j .

Так как при AR -деформации поверхности F^k соотношение (5) выполняется для любых $\xi_{(1)}^i, \xi_{(2)}^i$, то коэффициенты многочлена (5) равны нулю, т.е.

$$D_{ij,kl} + D_{kj,il} + D_{il,kj} + D_{kl,ij} = 0.$$

Используя свойства символа $D_{ij,kl}$, известным приемом [1], отсюда находим

$$D_{ij,kl} = 0. \quad (7)$$

Умножая уравнение (7) на g^{jl} и суммируя по индексам j, l , получаем

$$g_{ik} g^{jl} \delta g_{jl} + (k-2) \delta g_{ik} = 2\varphi(k-1) g_{ik}. \quad (8)$$

Умножая соотношение (8) на g^{ik} и суммируя по индексам i, k , получаем

$$g^{ij} \delta g_{ij} = k\varphi. \quad (9)$$

Подставляя значение φ из формулы (9) в формулу (7), получим уравнения AR -деформаций поверхности F^k относительно искомого тензорного поля деформации z^α :

$$\begin{aligned} & \left(k a_{\alpha\beta} \nabla_{(l}^* z^\alpha f_{,j)}^\beta g_{ir} + k a_{\alpha\beta} \nabla_{(i}^* z^\alpha f_{,r)}^\beta \right. \\ & \quad \left. - 2 a_{\alpha\beta} \nabla_{(s}^* z^\alpha f_{,t)}^\beta g^{st} g_{ik} g_{jl} \right) [i, j] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем, что соотношения (10) описывают C -деформации поверхности F^k . Так как C -деформации поверхности F^k характеризуются соотношением $\delta(dx s^2) = 2\psi(dx s)^2$, где ψ — относительная вариация элемента длины дуги кривой на F^k , то для C -деформаций имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [a_{\alpha\beta}^\varepsilon f_{\varepsilon,i}^\alpha f_{\varepsilon,j}^\beta dx^i dx^j - a_{\alpha\beta} f_i^\alpha f_j^\beta dx^i dx^j] = 2\psi g_{ij} dx^i dx^j.$$

Последнее соотношение выполняется для любых $dx^1, \dots, dx^k$, и поэтому оно эквивалентно уравнениям

$$\delta g_{ik} = 2\psi g_{ik}. \quad (11)$$

Соотношения (11) описывают C -деформации поверхности F^k в $\mathbb{R}^n$.

Обратимся к уравнениям (8), (9). Подставляя соотношение (9) в формулу (8), находим $(k-2)(\delta g_{ij} - \varphi g_{ij}) = 0$.

Учитывая, что $k > 2$, из последнего соотношения следуют уравнения (11) при $\varphi = 2\psi$. Это означает, что каждая AR -деформация является C -деформацией, причем

$$\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^2)) = 2\tilde{\delta}(d_x s).$$

Этим также доказана формула (2) при $k = 2$.

Обратное утверждение теоремы 1 очевидно. Всякая C -деформация поверхности F^k с относительной вариацией $\tilde{\delta}(d_x s) = \psi(x)$ линейного элемента $d_x s$ является AR -деформацией поверхности F^k с относительной вариацией $\tilde{\delta}(d_x \sigma(G^2)) = 2\psi$. В самом деле, для C -деформации имеем $\delta g_{ij} = 2\psi g_{ij}$; тогда

$$\delta G_{pq} = \delta g_{ij} \xi^i_{(p)} \xi^j_{(q)} = 2\psi \delta G_{pq}$$

и потому

$$\begin{aligned} \delta(d_x \sigma(G^2)) &= \delta \left(\sqrt{\det \|G_{pq}\|} du^1 \wedge du^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\det \|G_{pq}\|)^{-1/2} (G_{11} \delta G_{22} - 2G_{12} \delta G_{12} + G_{22} \delta G_{11}) du^1 \wedge du^2 \\ &= 2\psi \sqrt{\det \|G_{pq}\|} du^1 \wedge du^2 = 2\psi d_x \sigma(G^2). \end{aligned}$$

Это означает, что рассматриваемая C -деформация является AR -деформацией поверхности F^k . Теорема 1 доказана.

4. Докажем справедливость формулы (2) при $k > 2$.

Пусть $l = k$. Подсчитаем вариацию элемента k -мерного объема поверхности F^k .

Имеем

$$\delta(d_x \sigma(F^k)) = \delta \left(\sqrt{\det \|g_{ij}\|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k \right).$$

Используя формулу (9), находим

$$\begin{aligned} \delta(\det \|g_{ij}\|) &= \sum_i \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & \delta g_{1i} & \dots & g_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{k1} & \dots & \delta g_{ki} & \dots & g_{kk} \end{vmatrix} \\ &= \det \|g_{ij}\| g^{ij} \delta g_{ij} = \det \|g_{ij}\| k \varphi. \end{aligned}$$

Это соотношение означает, что

$$\delta \left(\sqrt{\det \|g_{ij}\|} \right) = \frac{k\varphi}{2} \sqrt{\det \|g_{ij}\|}.$$

Поэтому имеет место формула

$$\delta(d_x \sigma(F^k)) = \frac{k\varphi}{2} d_x \sigma(F^k),$$

где

$$\varphi = \tilde{\delta}(d_x \sigma(F^2)) = 2\tilde{\delta}(d_x s).$$

Этим доказана формула (2) при $l = k$.

Если $l < k$, то AR -деформация поверхности F^k порождает AR -деформацию поверхности G^l , и поэтому будет выполняться соотношение

$$\delta(d_x \sigma(G^l)) = \frac{l}{2} \varphi(x) d_x \sigma(G^l) = l \tilde{\delta}(d_x s) d_x \sigma(G^l).$$

Формула (2) доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$ – координаты карты атласа на гиперсфере S^{n-1} в E^n с декартовыми координатами $(y^1, y^2, \dots, y^n)$. Тогда уравнения AR -деформации, определяемой заданной на S^{n-1} функцией φ , имеют вид

$$a_{\alpha\beta} f_{(i,j)}^{\alpha} z^{\beta} = \varphi g_{ij}, \quad (12)$$

где z^{β} – искомое тензорное поле.

Положим $a_i = a_{\alpha\beta} z^{\alpha} f_{,i}^{\beta}$. Тогда, используя уравнения (12), имеем

$$a_{i,j} = a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} z^{\beta} b_{ij} + a_{\alpha\beta} z^{\alpha} f_{,j}^{\beta},$$

где ξ^{β} – единичный вектор нормали к S^{n-1} , b_{ij} – тензор второй квадратичной формы S^{n-1} . Так как справедливы соотношения $b_{ij} = g_{ij}/R$, где $R = \text{const}$, то уравнения AR -деформаций S^{n-1} принимают вид:

$$a_{(i,j)} = 2cb_{ij} + R\varphi b_{ij}, \quad (13)$$

где $c = a_{\alpha\beta} z^{\alpha} \xi^{\beta}$.

Систему (13) можно рассматривать как систему относительно искомых функций $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, c + R\varphi/2$. Тогда ее можно интерпретировать как систему уравнений бесконечно малых изгибов S^{n-1} в E^n . Как известно [1], S^{n-1} жестка в E^n , и поэтому система (13) имеет точно $n(n+1)/2$ решений, порождаемых тривиальными бесконечно малыми изгибаниями S^{n-1} . Каждое из таких решений порождает решение (a_i, c) системы (13), что и доказывает теорему 2.

Таганрогский государственный
педагогический институт

Поступило
30.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рашевский П. К. Риманова геометрия. М.: Наука, 1964.
- [2] Бескоровайная Л. Л. Канонические A -деформации, сохраняющие длины линий кривизны поверхности // Матем. сб. 1975. Т. 93. № 2. С. 163–176.
- [3] Фоменко Л. П. A^2 -деформации поверхностей F^k в E^n // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 5. С. 204; // Деп. ВИНТИ. № 5543–В90.
- [4] Chen B. Y., Yano K. On the theory of normal variations // J. Diff. Geom. 1978. V. 13. P. 1–10.