Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 291–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 07:19:29

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ В L^p ($p = p(x)$) НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

И. И. Шарапудинов

§ 1. Введение

Пусть $p = p(x)$ — 2π -периодическая измеримая и существенно ограниченная функция. Через L^p мы будем обозначать пространство измеримых 2π -периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Известно [1], что при $1 \leq p(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) пространство L^p является нормированным. Одна из эквивалентных норм в L^p задается следующим образом

$$\|f\|_{p,\pi} = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Пусть для каждого вещественного $\lambda \geq 1$ задана измеримая 2π -периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Тогда мы можем определить линейный оператор $\mathcal{K}_\lambda$,

$$\mathcal{K}_\lambda f = (\mathcal{K}_\lambda f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt, \quad (2)$$

действующий в пространстве L^p . В настоящей статье исследуется вопрос о равномерной ограниченности в L^p семейства операторов $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$. В частности, получен утвердительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова, предполагавшего, что операторы $\mathcal{K}_\lambda$ ($1 \leq \lambda < \infty$) с классическими ядрами k_λ (например, когда k_λ есть одно из ядер Пуассона, Фейера, Стеклова и т.д.) образуют равномерно ограниченное в L^p семейство в том и только в том случае, если показатель $p = p(x)$ “не очень меняется при изменениях”. Аналогичный вопрос для сумм Фурье–Хаара исследовался в работе [2].

§ 2. Условия равномерной ограниченности в L^p некоторых семейств операторов свертки

Всюду ниже мы будем считать, что $k_\lambda = k_\lambda(x)$ – измеримая 2π -периодическая функция. Будем говорить, что семейство ядер $\{k_\lambda\}_{1 \leq \lambda < \infty}$ удовлетворяет, соответственно, условиям А), В), С), если имеют место следующие оценки:

- А) $\int_{-\pi}^{\pi} |k_\lambda(x)| dx \leq c_1$,
- В) $\sup_x |k_\lambda(x)| \leq c_2 \lambda^v$,
- С) $|k_\lambda(x)| \leq c_3$ при $\lambda^{-\gamma} \leq |x| \leq \pi$,

где $v, \gamma, c_j > 0$ и не зависят от λ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k_\lambda = k_\lambda(x)$ ($1 \leq \lambda < \infty$) удовлетворяет условиям А)–С). Тогда, если $p = p(x)$ 2π -периодическая функция, для которой выполнено условие Дини–Липшица

$$|p(x') - p(x'')| \ln \frac{1}{|x' - x''|} = O(1) \quad (x', x'' \in [-\pi, \pi]), \quad (3)$$

то семейство операторов $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено в L^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = [\lambda^\gamma]$ – целая часть числа λ^γ , $h = 1/N$,

$$x_k = (kh - 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \quad (4)$$

$$s_k = \min\{p(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_{k+2}\} \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \quad (5)$$

$$p_t(x) = s_k \quad (x_k - t \leq x < x_{k+1} - t) \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \quad (6)$$

Поскольку $p_t(x) = p_0(x + t)$, то из (4)–(6) следует, что $p_t(x)$ ступенчатая функция, 2π -периодическая вместе с $p(x)$ и такая, что при $|t| \leq \pi h$

$$p_t(x) \leq p(x). \quad (7)$$

Определим для $x \in [-\pi, \pi]$ множество E_x следующим образом. Если $(x - \pi h, x + \pi h) \subset (-\pi, \pi)$, то

$$E_x = (-\pi, \pi) \setminus (x - \pi h, x + \pi h).$$

Если же $x - \pi h < -\pi$ или $\pi < x + \pi h$, то положим соответственно

$$E_x = (-\pi, \pi) \setminus \{(-\pi, x + \pi h) \cup (x - \pi h + 2\pi, \pi)\}$$

или

$$E_x = (-\pi, \pi) \setminus \{(x - \pi h, \pi) \cup (-\pi, x - \pi h - 2\pi)\}.$$

Пусть

$$\|f\|_{p,\pi} \leq 1. \quad (8)$$

Тогда, полагая $\bar{p} = \max\{p(x) \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$, имеем из (2)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(\mathcal{K}_{\lambda}f)(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_{\lambda}(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} + \int_{E_x} \right) f(t)k_{\lambda}(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_{\lambda}(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \\ &\quad + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{E_x} f(t)k_{\lambda}(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} = J_1^{1/\bar{p}} + J_2^{1/\bar{p}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались тем, что отображение $(f, g) \rightarrow \rho(f, g)$, где

$$\rho(f, g) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}}$$

является метрикой в L^p (см. [1]). Заметим, что в силу C) $|k_{\lambda}(t-x)| = O(1)$ при $-\pi \leq x \leq \pi$, $t \in E_x$. Поэтому с учетом (8) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_x} f(t)k_{\lambda}(t-x) dt \right| &= O(1) \int_{E_x} |f(t)| dt \\ &= O(1) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = O(1)\|f\|_{p,\pi} = O(1), \quad (10) \end{aligned}$$

так как при $q(x) \leq p(x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) имеет место оценка

$$\|f\|_{q,\pi} \leq (2\pi + 1)\|f\|_{p,\pi}. \quad (11)$$

(Оценка (11) доказывается аналогично тому, как это делалось в [2] при доказательстве неравенства $\|f\|_q \leq 2\|f\|_p$, где

$$\|f\|_p = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \int_0^1 |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

($1 \leq q(x) \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$, $0 \leq x \leq 1$).)

Из (9) и (10) находим

$$J_2 = O(1). \quad (12)$$

Оценим J_1 . Имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{s_k+p(x)-s_k} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия (3) и из (4) и (5) следует, что при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

$$|p(x) - s_k| = O((\ln(2\lambda^\gamma))^{-1}) = O\left(\frac{1}{\ln(2\lambda)}\right).$$

Поэтому в силу В) и (8) имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)-s_k} \\ &= (\lambda^v)^{O(1/(\ln(2\lambda)))} \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)| dt \right)^{O(1/(\ln(2\lambda)))} \\ &= O(1) (\|f\|_{p,\pi})^{O(1/(\ln(2\lambda)))} = O(1). \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$\mu = \mu(\lambda) = \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |k_\lambda(t-x)| dt = \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \quad (15)$$

и заметим, что в силу свойства А) $\mu(\lambda) = O(1)$. Мы можем считать, что для любого $\lambda \geq 1$ будет $\mu(\lambda) > 0$. В самом деле, равномерная ограниченность в L^p подсистемы операторов $\mathcal{K}_\lambda$, для которых $\mu(\lambda) = 0$, непосредственно следует из сопоставления (2)–(4) с тем, что $h = 1/N \geq \lambda^{-\gamma}$.

Из (13)–(15) с помощью неравенства Иенсена находим

$$\begin{aligned}
 J_1 &= O(1) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu^{s_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{1}{\mu} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)| |k_\lambda(t-x)| dt \right)^{s_k} dx \\
 &= O(1) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu^{s_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{\mu} \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)|^{s_k} |k_\lambda(t-x)| dt \\
 &= O(1) \sum_{k=0}^{2N-1} \mu^{s_k-1} \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t+x)|^{s_k} dx \\
 &= O(1) \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t+x)|^{s_k} dx \\
 &= O(1) \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} |f(x)|^{s_k} dx.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (4)–(6), находим

$$\begin{aligned}
 J_1 &= O(1) \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} |f(x)|^{p_t(x)} dx \\
 &= O(1) \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \int_{-\pi-t}^{\pi-t} |f(x)|^{p_t(x)} dx \\
 &= O(1) \int_{-\pi h}^{\pi h} |k_\lambda(t)| dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p_t(x)} dx. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Далее, в силу (1), (7), (8) и (11)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p_t(x)} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{p_t, \pi}} \right|^{p_t(x)} (\|f\|_{p_t, \pi})^{p_t(x)} dx \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p_t, \pi}} \right|^{p_t(x)} ((2\pi+1)\|f\|_{p, \pi})^{p_t(x)} dx \\
 &\leq (2\pi+1)^{\overline{p}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p_t, \pi}} \right|^{p_t(x)} dx = (2\pi+1)^{\overline{p}}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Из А), (16) и (17) выводим

$$J_1 = O(1). \tag{18}$$

Сопоставляя оценки (9), (12) и (18), установленные при условии (8), мы заключаем, что семейство линейных операторов $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено на единичном шаре пространства L^p . Теорема 1 доказана.

Перейдем к рассмотрению вопроса об окончательности условия Дини–Липшица (3) в теореме 1. Будем говорить, что функция $p = p(x)$, заданная на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяет условию Дини–Липшица с показателем α , если найдется такая постоянная $c > 0$, что

$$\omega(p, \delta) \leq c \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-\alpha} \quad (0 < \delta < 1, \quad \alpha > 0),$$

где $\omega(p, \delta) = \sup\{|p(x') - p(x'')| \mid |x' - x''| \leq \delta\}$ – модуль непрерывности функции $p = p(x)$.

Через DL_α обозначим множество 2π -периодических функций $p = p(x)$, удовлетворяющих условию Дини–Липшица с показателем α и таких, что $p(x) \geq 1$ ($-\infty < x < \infty$).

Будем говорить, что класс DL_α обладает свойством равномерной ограниченности семейства операторов (РОСО) $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$, если для любого показателя $p = p(x) \in DL_\alpha$ семейство $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено в L^p .

Будем говорить, что семейство $\{k_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ удовлетворяет условию D), если $k_\lambda(x) \geq 0$ при $|x| \leq \lambda^{-\gamma}$ и $k_\lambda(x) \geq d_1 \lambda$ при $|x| \leq d_2 \lambda^{-1}$, где d_1 и d_2 не зависят от λ и $0 < d_j \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для семейства ядер $\{k_\lambda\}_{1 \leq \lambda}$ имеют место условия A)–D), причем в условии C) $0 < \gamma \leq 1$, $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ – семейство линейных операторов свертки, определенных с помощью равенства (2). Тогда класс DL_α обладает свойством РОСО $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$, если и только если $\alpha \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\nu > 1$,

$$p_\alpha = p_\alpha(x) = \begin{cases} \nu + \left| \ln \frac{|x|}{2\pi} \right|^{-\alpha} & (-\pi/2 \leq x \leq 0), \\ \nu - \left| \ln \frac{x}{2\pi} \right|^{-\alpha} \frac{\nu - 1}{2} & (0 < x \leq \pi), \\ \nu & (x = 0) \end{cases} \quad (19)$$

и продолжим $p(x)$ в $[-\pi, -\pi/2]$ 2π -периодически, линейно и непрерывно. Нетрудно проверить, что $p_\alpha \in DL_\alpha$. Далее, пусть

$$f(x) = f_\nu(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0), \\ x^{-1/\nu} & (0 < x \leq \pi). \end{cases} \quad (20)$$

Тогда имеем из (19)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p_{\alpha}(x)} dx = \int_0^{\pi} x^{-1+(\nu-1)/(2\nu)|\ln(x/(2\pi))|^{-\alpha}} dx < \infty,$$

так как при $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^{\pi} x^{-1}(\ln x)^{-2} dx < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 x^{(\nu-1)/(2\nu)|\ln(x/(2\pi))|^{-\alpha}} = 0.$$

Стало быть $f \in L^{p_{\alpha}}$. Для этой функции имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(\mathcal{K}_{\lambda} f)(x)|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & \geq \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 |(\mathcal{K}_{\lambda} f)(x)|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & = \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_{\lambda}(t-x) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & = \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & = \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \int_0^{\pi} f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & = \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \left(\int_0^{\lambda-\gamma} + \int_{\lambda-\gamma}^{\pi} \right) f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & \geq \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \int_0^{\lambda-\gamma} f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & \quad - \left(\int_{-d_2\lambda-1}^0 \left| \int_{\pi-\gamma}^{\pi} f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right|^{p_{\alpha}(x)} dx \right)^{1/\overline{p}_{\alpha}} \\ & = R_1^{1/\overline{p}_{\alpha}} - R_2^{1/\overline{p}_{\alpha}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Из условия С) находим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda-\gamma}^{\pi} f(t+x) k_{\lambda}(t) dt \right| &= O(1) \int_{\lambda-\gamma}^{\pi} |f(t+x)| dt \leq O(1) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x)| dt \\ &= O(1) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = O(1) \int_0^{\pi} t^{-1/\nu} dt = \frac{\nu}{\nu-1} O(1). \end{aligned} \tag{22}$$

Из (20)–(22) следует, что

$$R_2 = O(1) \frac{\nu}{\nu - 1}. \quad (23)$$

С другой стороны, из условия D) и из (20)

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda^{-\gamma}} f(t+x) k_\lambda(t) dt &\geq d_1 \lambda \int_0^{d_2 \lambda^{-1}} f(t+x) dt \\ &= d_1 \lambda \int_x^{d_2 \lambda^{-1}+x} f(t) dt = d_1 \lambda \int_0^{d_2 \lambda^{-1}+x} t^{-1/\nu} dt \\ &= d_1 \lambda \frac{\nu}{\nu - 1} (d_2 \lambda^{-1} + x)^{1-1/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) и (21) получаем

$$\begin{aligned} R_1 &\geq \int_{-d_2 \lambda^{-1}}^0 \left[d_1 \frac{\nu}{\nu - 1} \lambda (d_2 \lambda^{-1} + x)^{1-1/\nu} \right]^{\nu + |\ln(|x|/(2\pi))|^{-\alpha}} dx \\ &> \int_{-d_2 \lambda^{-1}/2}^0 \left[d_1 \frac{\nu}{\nu - 1} \lambda \left(\frac{1}{2} d_2 \lambda^{-1} \right)^{1-1/\nu} \right]^{\nu + |\ln(|x|/(2\pi))|^{-\alpha}} dx \\ &= \int_{-d_2 \lambda^{-1}/2}^0 \left[d_1 \frac{\nu}{\nu - 1} \left(\frac{1}{2} d_2 \right)^{(\nu-1)/\nu} \lambda^{1/\nu} \right]^{\nu + |\ln(|x|/(2\pi))|^{-\alpha}} dx \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (24)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, так как $0 < \alpha < 1$.

Сопоставляя (21), (23) и (24), мы заключаем, что множество значений, принимаемых операторами $\mathcal{K}_\lambda = \mathcal{K}_\lambda f$ ($1 \leq \lambda < \infty$) при $f = f(x) = f_\nu(x)$, где функция $f_\nu(x)$ определена с помощью равенства (20), не ограничено в $L^{p\alpha}$. Теорема 2 доказана.

§ 3. О сходимости в L^p ($p = p(x)$) некоторых операторов свертки с классическими ядрами

В качестве следствий результатов предыдущего параграфа мы здесь приведем примеры семейств операторов свертки с некоторыми классическими ядрами, равномерно ограниченных в пространстве L^p с переменным показателем $p = p(x)$, удовлетворяющих условию Дини–Лишица (3). Мы ограничимся здесь рассмотрением семейств операторов Пуассона, Стеклова, Фейера.

По аналогичной схеме можно было бы рассмотреть и другие классические операторы, такие, как операторы Чезаро, Джексона и т.д.

1. Операторы Фейера. Если n – натуральное число, то положим

$$k_n(x) = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{\sin(n+1)x/2}{2 \sin x/2} \right\}^2,$$

если же $n \leq \lambda < n+1$, то будем считать, что $k_\lambda(x) = k_n(x)$. Операторы Фейера F_λ определяем, полагая

$$F_\lambda f = (F_\lambda f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt.$$

Нетрудно проверить, что ядра Фейера удовлетворяют условиям А)–С) и, следовательно, в силу теоремы 1 семейство $\{F_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено в L^p .

С другой стороны, если $f = f(x)$ – непрерывная 2π -периодическая функция, заданная на $(-\infty, \infty)$, то, как хорошо известно, $(F_\lambda f)(x)$ сходится при $\lambda \rightarrow \infty$ к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$. Таким образом, $\{F_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ представляет собой равномерно ограниченное семейство операторов такое, что $F_\lambda f \rightarrow f$ ($\lambda \rightarrow \infty$) на всюду плотном в L^p множестве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π -периодических функций. Стало быть, для произвольной функции $f \in L^p$ $F_\lambda f \rightarrow f$ ($\lambda \rightarrow \infty$) по норме пространства L^p и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (F_\lambda f)(x)|^{p(x)} dx \rightarrow 0$$

для произвольной функции $f \in L^p$ ($p = p(x)$), если только $p \in DL_1$.

2. Операторы Пуассона. Пусть $0 \leq r < 1$, $\lambda = 1/(1-r)$. Ядро Пуассона и оператор определяется с помощью равенств

$$k_\lambda(x) = P(r, x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2},$$

$$\mathcal{P}_\lambda f = (\mathcal{P}_\lambda f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt.$$

Отметим следующие свойства ядер Пуассона (см. [3, с. 161])

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-r}{1+r} \leq k_\lambda(x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1-r}, \quad (25)$$

$$k_\lambda(x) \leq c \frac{\lambda}{1 + (\lambda x)^2} \quad (|x| \leq \pi), \quad (26)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_\lambda(x) dx = 1. \quad (27)$$

Сопоставляя (25)–(27), нетрудно заметить, что для ядер Пуассона $k_\lambda(x)$ справедливы условия А)–С) и, следовательно, в силу теоремы 1 семейство $\{\mathcal{P}_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено в L^p ($p = p(x)$). Если теперь $f = f(x)$ произвольная функция из L^p , то из равномерной ограниченности в L^p операторов $\mathcal{P}_\lambda$ следует, что

$$\|f - \mathcal{P}_\lambda f\|_{p, \pi} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty),$$

отсюда, в свою очередь,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (\mathcal{P}_\lambda f)(x)|^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

для произвольной функции $f \in L^p$ ($p = p(x)$), если только $p \in DL_1$.

3. Операторы Стеклова. Пусть $\lambda \geq 1$. Положим

$$\Delta_\lambda = \left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right], \quad k_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in \Delta_\lambda, \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \Delta_\lambda, \end{cases} \quad (28)$$

и продолжим $k_\lambda(x)$ 2 π -периодически на $(-\infty, \infty)$. Операторы Стеклова S_λ определяются равенством

$$S_\lambda f = (S_\lambda f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t - x) dt.$$

Не составляет труда проверить, что ядро Стеклова (28) удовлетворяет условиям А)–С) и, следовательно, в силу теоремы 1 семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ равномерно ограничено в L^p ($p = p(x)$) и, стало быть,

$$\|f - S_\lambda f\|_{p, \pi} \rightarrow 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (S_\lambda f)(x)|^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

для произвольной функции $f \in L^p$ ($p = p(x)$), если только $p \in DL_1$.

§ 4. О разрешимости задачи Дирихле с существенно переменным поведением граничных значений

Мы здесь рассмотрим задачу Дирихле в единичном круге $|z| < 1$. Пусть на границе этого круга задана функция $f = f(e^{ix})$, принадлежащая пространству L^1 . Хорошо известно, что найдется гармоническая внутри круга $|z| < 1$ функция $u = u(z)$ такая, что

$$\|f(e^{ix}) - u(re^{ix})\|_{1, \pi} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 1),$$

при этом

$$u(re^{ix}) = (\mathcal{P}_\lambda f)(e^{ix}) \quad \left(\lambda = \frac{1}{1-r} \right),$$

где $\mathcal{P}_\lambda$ – оператор Пуассона, определенный в § 3.

Пусть теперь $[a, b] \in (-\pi, \pi)$, $f \in L^1([a, b])$ и $f \in L^q([-\pi, \pi] \setminus [a, b])$, где число $q > 1$ (через $L^p(E)$ мы обозначим пространство измеримых функций $f = f(x)$ таких, что $\int_E |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$). Таким образом, граничные значения (т.е. функция $f = f(e^{ix})$) имеют существенно переменное поведение, так как на разных частях границы круга $|z| \leq 1$ функция $f(e^{ix})$ принадлежит различным функциональным пространствам. Мы можем объединить эти пространства в одно, если положим

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ q, & x \in [-\pi, \pi] \setminus [a, b] \end{cases}$$

и введем пространство L^p ($p = p(x)$). Но теперь возникает вопрос о том, найдется ли гармоническая в круге $|z| < 1$ функция u такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{ix}) - f(e^{ix})|^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 1),$$

другими словами, разрешима ли задача Дирихле в круге в том случае, когда граничные значения $f(e^{ix})$ составляют функцию $f \in L^{p(x)}$. Как показывает пример, построенный при доказательстве теоремы 2, на этот вопрос, вообще говоря, приходится дать отрицательный ответ. Это значит, что, оставаясь в шкале пространств L^p с кусочно постоянными на $[-\pi, \pi]$ функциями $p = p(x)$, невозможно решить задачу Дирихле с учетом локального поведения граничных значений: приходится ограничиться решением этой задачи в метрике пространства L^m , где $m = \inf \{p(x) : x \in [-\pi, \pi]\}$, без учета того, что на части границы поведение граничных значений лучше.

С другой стороны, когда $f \in L^1([a, b])$ и $f \in L^q([-\pi, \pi] \setminus [a, b])$, где $q > 1$, можно было бы поступить следующим образом: функцию $p(x) = 1$, заданную на $[a, b]$ продолжим на $[-\pi, \pi]$ с сохранением условия Дини–Лишица и так, чтобы для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $p(x) = q$ при $x \in [-\pi, \pi] \setminus [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ и $p(x) \leq q$ при $x \in [a - \varepsilon, a] \cup [b, b + \varepsilon]$. Тогда очевидно, что $f \in L^p$ и, как было показано в § 3,

$$\|f(e^{ix}) - (\mathcal{P}_\lambda f)(e^{ix})\|_{p, \pi} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

Полагая $u(re^{ix}) = (\mathcal{P}_\lambda f)(e^{ix})$ ($\lambda = 1/(1-r)$), мы находим гармоническую функцию $u(z)$ ($z = re^{ix}$), решающую задачу Дирихле в круге $|z| < 1$ в метрике пространства L^p ($p = p(x)$). При этом заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{a-\varepsilon} |u(re^{ix}) - f(e^{ix})|^q dx + \int_{b+\varepsilon}^{\pi} |u(re^{ix}) - f(e^{ix})|^q dx \\ \leq \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{ix}) - f(e^{ix})|^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 1), \end{aligned}$$

т.е. лучшее локальное поведение граничных значений задачи Дирихле на множестве $[-\pi, a] \cup [b, \pi]$ позволяет решить эту задачу в метрике пространства $L^q([-\pi, a-\varepsilon] \cup [b+\varepsilon, \pi])$, которая является более сильной, чем метрика пространства $L^1([-\pi, a-\varepsilon] \cup [b+\varepsilon, \pi])$ (так как по условию $q > 1$).

Махачкала

Поступило

03.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 4. С. 613–632.
- [2] Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 2. С. 275–283.
- [3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1965.