Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шурыгин, Связность Эресмана для канонического слоения на многообразии над локальной алгеброй, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 303–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:46:25

СВЯЗНОСТЬ ЭРЕСМАНА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО СЛОЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ НАД ЛОКАЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ

В. В. Шурыгин

Введение. Многообразие $M^{\mathbb{A}}$ над локальной алгеброй $\mathbb{A}$ локально $\mathbb{A}$ -диффеоморфно расслоению $\mathbb{A}$ -струй $J^{\mathbb{A}}M$ [1] ($\mathbb{A}$ -близких точек A . Вейля [2]). Это является причиной того, что уравнения горизонтального распределения $\mathbb{A}$ -связности на $J^{\mathbb{A}}M$ сохраняют свой смысл и для многообразия $M^{\mathbb{A}}$, определяя на нем распределение, называемое $\mathbb{A}$ -аффинным горизонтальным распределением. В случае алгебры дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$, например, это приводит к распределению на многообразии с интегрируемой почти-касательной структурой [3], заданному уравнениями горизонтального распределения аффинной связности на касательном расслоении [4]:

$$dx^i + \Gamma_{jk}^i(x^m) dx^j \dot{x}^k + t_j^i(x^m) dx^j = 0. \quad (1)$$

В настоящей работе доказывается, что $\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение на полном [5] многообразии $M^{\mathbb{A}}$ является связностью Эресмана в смысле Блюменталья–Хебды [6], [7], и что условием существования на $M^{\mathbb{A}}$ $\mathbb{A}$ -аффинного горизонтального распределения является обращение в нуль класса Атья [8] некоторого слоеного главного расслоения над $M^{\mathbb{A}}$.

1. Аффинные связности высших порядков. Мы будем использовать следующие обозначения (см. [1]): $\mathbb{R}(N, q)$ – алгебра срезанных многочленов от N переменных степени $\leq q$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. $\mathbb{A} = \mathbb{R}(N, q)/\mathbb{I}$ – локальная алгебра ширины N и высоты q , $\mathring{\mathbb{A}} = \text{Rad}(\mathbb{A})$ – максимальный идеал алгебры $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^n$ – модуль строк длины n с элементами из алгебры $\mathbb{A}$, $\mathring{\mathbb{A}}^n$ – подмодуль в $\mathbb{A}^n$, состоящий из строк с элементами из $\mathring{\mathbb{A}}$, $\pi_0^q: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\pi_0^q: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – естественные эпиморфизмы. Модуль $\mathring{\mathbb{A}}^n$ (в частности, алгебру $\mathbb{A}$) можно представить в виде прямой суммы $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n + \mathring{\mathbb{A}}^n$. В соответствии с этим для произвольного элемента

$X \in \mathbb{A}^n$ получаем разложение $X = x + \overset{\circ}{X}$. Субмерсия $\pi_0^q: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает каноническое расслоение на $\mathbb{A}^n$, слои которого являются смежными классами по подмодулю $\overset{\circ}{\mathbb{A}^n}$. Это слоение на $\mathbb{A}^n$ мы будем называть каноническим $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -слоением. Для простоты будем предполагать все встречающиеся в дальнейшем дифференцируемые многообразия и отображения гладкими, т.е. класса C^∞ .

Гладкое отображение

$$\varphi: U \subset \mathbb{A}^n \rightarrow U' \subset \mathbb{A}^n \quad (2)$$

называется $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -гладким, если касательное отображение $T_x\varphi$ является $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -линейным при любом $X \in U$. $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -гладкое отображение φ в простой [8] для $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -расслоения окрестности $U_X \subset U$ точки X может быть записано в виде

$$X'^i \varphi^i \sum_{|p|=1}^q \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^i}{Dx^p} \overset{\circ}{X}^p, \quad (3)$$

где $i, j = 1, \dots, n$, $x^i = \pi_0^q(X^i)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ – мультииндекс длины n , а $\varphi^i: \pi_0^q(U_X) \rightarrow \mathbb{A}$ – некоторые $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -значные гладкие функции. Если отображение φ задается уравнениями (3) на простой для $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -слоения области U , то оно однозначно расширяется до $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -гладкого отображения

$$\varphi: (\pi_0^q)^{-1}(\pi_0^q(U)) \rightarrow (\pi_0^q)^{-1}(\pi_0^q(U')), \quad (4)$$

задаваемого той же формулой (3). При этом $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -диффеоморфизм расширяется до $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -диффеоморфизма. Если же область U не является простой, то $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -гладкое отображение (2) может быть записано формулой (3), в которой $\varphi^i: U \rightarrow \mathbb{A}$ – базовые для $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -слоения функции.

Рассмотрим далее семейство диффеоморфизмов вида (4), обладающих свойством $\pi_0^q(\varphi(0)) = 0$. Каждый такой диффеоморфизм при ограничении на слой $(\pi_0^q)^{-1}(0) = \overset{\circ}{\mathbb{A}^n}$ определяет диффеоморфизм $\overset{\circ}{\varphi}: \overset{\circ}{\mathbb{A}^n} \rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{A}^n}$ следующего вида

$$\overset{\circ}{X}'^i = \sum_{|p|=1}^q \varphi_p^i \overset{\circ}{X}^p, \quad (5)$$

где $\varphi_0^i \in \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, $\varphi_p^i \in \overset{\circ}{\mathbb{A}}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}^{q-|p|+1}$ при $|p| > 0$. Множество диффеоморфизмов вида (5) образуют группу Ли $D_n(\overset{\circ}{\mathbb{A}})$, называемую $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -аффинной группой [1]. Алгебру Ли группы $D_n(\overset{\circ}{\mathbb{A}})$ будем обозначать $d_n(\overset{\circ}{\mathbb{A}})$. Соотношениями $\varphi_0^i = 0$, $\varphi_p^i \in \mathbb{R}$ в $D_n(\overset{\circ}{\mathbb{A}})$ выделяется подгруппа, изоморфная дифференциальной группе L_n^q [9]. Если обозначить через ε^i , $i = 1, \dots, n$, стандартную систему образующих алгебры многочленов $\mathbb{R}(n, q)$, то элемент

Y из $D_n(\mathbb{A})$ может быть задан набором элементов

$$Y^i = \sum_{|p|=1}^q \varphi_p^i \varepsilon^p \quad (6)$$

из алгебры $\mathbb{A}(n, q) = \mathbb{A} \otimes \mathbb{R}(n, q) / \text{Rad}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{R}(n, q))^{q+1}$. Эти элементы будем называть $\mathbb{A}(n, q)$ -координатами элемента Y . В дальнейшем будем иногда опускать знак суммы, если суммирование идет по индексам или мультииндексам, расположенным на разных уровнях. При этом композицию элементов $W = Z \circ Y$ в группе $D_n(\mathbb{A})$ будем записывать в виде

$$W^i = W_p^i \varepsilon^p Z_r^i (Y_s^* \varepsilon^s)^r = Z_r^i Y^r, \quad (7)$$

где p, r, s – мультииндексы типа $(p_1, \dots, p_n)$, изменяющиеся в пределах $0 \leq |p| \leq q$, а звездочкой обозначено место составляющих мультииндекса r .

Рассмотрим теперь некоторое расслоение $p: E \rightarrow M$ над m -мерным многообразием M со стандартным слоем $\mathring{\mathbb{A}}^n$ и структурной группой $D_n(\mathbb{A})$. На тотальном пространстве E можно выбрать атлас тривиализации, области определения карт которого имеют вид $p^{-1}(U)$, где U – область определения некоторой карты из гладкого атласа на M . При этом на E получаются преобразования координат следующего вида

$$x^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^\alpha), \quad \mathring{X}^{i'} = A_p^{i'}(x^\alpha) \mathring{X}^p, \quad (8)$$

где $A_p^{i'} \varepsilon^p$ – $\mathbb{A}(n, q)$ -координаты некоторого элемента из $D_n(\mathbb{A})$. Если в уравнениях (8) $n = m$ и $A_p^{i'} = \frac{1}{p!} D^p \varphi^{i'} / D x^p$, где функции $\varphi^{i'}$ принимают значения в $\mathbb{R}$, то расслоение E изоморфно расслоению $\mathbb{A}$ -струй $J^{\mathbb{A}} M$ [1] (или расслоению $\mathbb{A}$ -ближних точек А. Вейля [2]). Преобразование координат (8) на E порождает преобразование координат на тотальном пространстве P главного расслоения $\rho: P \rightarrow M$, ассоциированного с E . Это преобразование имеет вид, аналогичный (8):

$$x^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^\alpha), \quad Y^{i'} = A_p^{i'}(x^\alpha) Y^p, \quad (9)$$

где $Y^i, Y^{i'} \in \mathbb{A}(n, q)$. Расслоение P будем называть расслоением $\mathbb{A}$ -аффинных реперов расслоения E . В координатах правое действие $Z = R_B Y$ группы Ли $D_n(\mathbb{A})$ на P имеет вид, аналогичный (7):

$$\{x^\alpha, Y^i\} \rightarrow \{x^\alpha, Z^i = Y_p^i B^p\}. \quad (10)$$

Рассмотрим далее связность Γ в расслоении P . Элемент этой связности в точке $Y \in P$, рассматриваемый как 1-струя ростка сечения $\sigma: (M, x) \rightarrow (P, Y)$, определяется в координатах коэффициентами связности

$$\Gamma_{\alpha p}^i(Y) = \left. \frac{\partial Y_p^i}{\partial x^\alpha} \right|_{x=\rho(Y)}. \quad (11)$$

На координатной окрестности вида $\rho^{-1}(U)$ на P локальное сечение Y_0 (поле $\mathbb{A}$ -аффинных реперов) с уравнениями $Y_p^i(x^\alpha) = \delta_p^i$ будем называть натуральным. Здесь δ_p^i равняется 1, когда на i -м месте мультииндекса p стоит единица, на остальных – нули, и равняется 0 во всех других случаях. Коэффициенты связности Γ , вычисленные в точках натурального сечения, являются функциями $\Gamma_{\alpha p}^i = \Gamma_{\alpha p}^i(x^\beta)$. Будем называть эти функции коэффициентами $\mathbb{A}$ -аффинной связности в данной локальной системе координат.

Связность в главном расслоении определяет горизонтальное распределение на всяком присоединенном расслоении [10]. Уравнения горизонтального распределения $\mathbb{A}$ -аффинной связности на E имеют вид

$$d\overset{\circ}{X}^i - \Gamma_{\alpha p}^i \overset{\circ}{X}^p dx^\alpha = 0. \quad (12)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *При преобразованиях координат (8) коэффициенты $\mathbb{A}$ -аффинной связности преобразуются по закону*

$$\Gamma_{\alpha' r}^{i'}(A_s^* \varepsilon^s)^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\alpha A_p^{i'} \varepsilon^p + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_p^{i'} \sum_{i=1}^n p_i \Gamma_{\alpha s}^i \varepsilon^{p-i+s}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (10), получим формулу, показывающую, как изменяются коэффициенты связности (9) при правом сдвиге R_B :

$$\Gamma_{\alpha p}^i(Z) \varepsilon^p = \Gamma_{\alpha s}^i(Y) (B_r^* \varepsilon^r)^s. \quad (14)$$

Дифференцируя (8), получим формулу, связывающую коэффициенты связности в точке $Y \in P$ в разных системах координат

$$\Gamma_{\alpha' r}^{i'}(Y) \varepsilon^p = \partial_\alpha A_p^{i'}(x^\beta) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} Y^p + A_p^{i'}(x^\beta) \sum_{i=1}^n P_i Y^{p-i} \Gamma_{\alpha s}^i(Y) \varepsilon^s \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}, \quad (15)$$

где обозначено $p-i = (p_1, \dots, p_i-1, \dots, p_n)$. Преобразование координат (9) индуцирует правый сдвиг натурального сечения $Y_0 \rightarrow Y'_0 = R_A Y_0$, где элемент $A \in D_n(\mathbb{A})$ имеет координаты $A_p^{i'}(x^\alpha)$ (см. (8)). При этом из (14) следует

$$\Gamma_{\alpha' p}^{i'}(Y_0) \varepsilon^p = \Gamma_{\alpha' r}^{i'}(Y'_0) (A_s^* \varepsilon^s)^r. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем (13).

2. Горизонтальные распределения на многообразиях над локальными алгебрами. Семейство $\mathbb{A}$ -гладких диффеоморфизмов вида (2) образует псевдогруппу $\Gamma(\mathbb{A}^n)$. Многообразие $M^{\mathbb{A}}$ называется $\mathbb{A}$ -гладким многообразием размерности n , если на $M^{\mathbb{A}}$ задан атлас с картами, принимающими значения в $\mathbb{A}^n$, и преобразованиями координат, принадлежащими псевдогруппе $\Gamma(\mathbb{A}^n)$. Такой атлас будем называть $\mathbb{A}$ -атласом. Из (3) следует, что при $\mathbb{A}$ -гладком преобразовании координат на $M^{\mathbb{A}}$ координаты $x^{i'}$ локально зависят только от координат x^i , таким образом, каноническое $\mathring{\mathbb{A}}$ -слоение на $\mathbb{A}^n$ индуцирует слоение $\mathring{F}$ на $M^{\mathbb{A}}$, которое также будем называть каноническим $\mathring{\mathbb{A}}$ -слоением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что каждой карте $h: U \rightarrow \mathbb{A}^n$ из $\mathbb{A}$ -атласа на $M^{\mathbb{A}}$ отнесен набор гладких $\mathbb{A}$ -значных функций Γ_{jp}^i , заданных на области $h(U) \subset \mathbb{A}^n$ и являющихся базовыми относительно индуцированного $\mathring{\mathbb{A}}$ -слоения. Предположим далее, что при $\mathbb{A}$ -гладком преобразовании координат (3) эти функции преобразуются по закону (13), где $A_{j'p}^{i'} = \frac{1}{p!} D^p \varphi^{i'} / D x^p$. Тогда на $M^{\mathbb{A}}$ уравнениями (см. (12))

$$d\mathring{X}^i - \Gamma_{jp}^i \mathring{X}^p dx^j = 0 \quad (17)$$

корректно определяется распределение ∇ размерности n . Будем называть это распределение горизонтальным $\mathbb{A}$ -аффинным распределением.

Для исследования определенного выше распределения нам потребуются некоторые расслоения над $M^{\mathbb{A}}$. Обозначим символом $O^v M^{\mathbb{A}}$ и назовем вертикальным соприкасающимся расслоением многообразия $M^{\mathbb{A}}$ расслоение над $M^{\mathbb{A}}$ со стандартным слоем $\mathring{\mathbb{A}}^n$ и функциями склейки, имеющими вид (3), над пересечением областей определения карт из $\mathbb{A}$ -атласа. Если $p: O^v M^{\mathbb{A}} \rightarrow M^{\mathbb{A}}$ – каноническая проекция, а $h: U \rightarrow \mathbb{A}^n$ – $\mathbb{A}$ -карта на $M^{\mathbb{A}}$, относящая точке $X \in U$ координаты $\{x^i, \mathring{X}^i\}$, где $x^i \in \mathbb{R}$, $\mathring{X}^i \in \mathring{\mathbb{A}}$, то точка из $p^{-1}(U)$ в индуцированной на $O^v M^{\mathbb{A}}$ карте определяется координатами $\{x^i, \mathring{X}^i, \mathring{X}^i\}$ с $\mathring{X}^i \in \mathring{\mathbb{A}}$. Главное $D_n(\mathbb{A})$ -расслоение, присоединенное к $O^v M^{\mathbb{A}}$ [10], обозначим через $P^v M^{\mathbb{A}}$ и назовем расслоением вертикальных соприкасающихся $\mathbb{A}$ -аффинных реперов. Если в рассмотренной конструкции заменить в функциях склейки (3) φ^i на $\bar{\varphi}^i = \pi_0^q \circ \varphi^i$, то получим, соответственно, расслоение трансверсальных $\mathbb{A}$ -струй над $M^{\mathbb{A}}$ и расслоение трансверсальных q -реперов (см. [5], [8]). Все указанные расслоения принадлежат к типу слоеных расслоений [8], [11]. Если отнести каждой точке $X \in U \subset M^{\mathbb{A}}$ с координатами $\{x^i, \mathring{X}^i\}$ точку из слоя $p^{-1}(X) \subset O^v M^{\mathbb{A}}$

с координатами $\{x^i, \overset{\circ}{X}^i, \overset{*}{X}^i = \overset{\circ}{X}^i\}$, то корректно определится сечение $s: M^{\mathbb{A}} \rightarrow O^v M^{\mathbb{A}}$. Слои $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -слоения на $M^{\mathbb{A}}$ являются $(\overset{\circ}{\mathbb{A}}^n, D_n(\mathbb{A}))$ -многообразиями [5], [12]. Многообразие $M^{\mathbb{A}}$ называется полным [5], если слои $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ -слоения на $M^{\mathbb{A}}$ являются полными как $(\overset{\circ}{\mathbb{A}}^n, D_n(\mathbb{A}))$ -многообразия [12], [5]. Для полного многообразия $M^{\mathbb{A}}$ можно определить проекцию $C: O^v M^{\mathbb{A}} \rightarrow M^{\mathbb{A}}$, которая в окрестности образа сечения $s(M^{\mathbb{A}})$ имеет вид $C: \{x^i, \overset{\circ}{X}^i, \overset{*}{X}^i\} \rightarrow \{x^i, \overset{*}{X}^i\}$ и в ограничении на слой $p^{-1}(X)$ представляет собой накрытие $q_X \circ D_X^{-1}$, где $q_X: \tilde{F}_X \rightarrow \overset{\circ}{F}_X$ – универсальное накрытие, а $D_X: \tilde{F}_X \rightarrow p^{-1}(X)$ – разветвляющее отображение (см. [12], а также [13] для аффинных многообразий). Отметим, что сечение s и отображение C в более общей ситуации (X, G) -слоения рассматривались М. А. Махальцевым. Прообраз $TC^{-1}(\nabla)$ $\mathbb{A}$ -аффинного горизонтального распределения ∇ при проекции C являются горизонтальным распределением проектируемой относительно поднятого слоения [8] (базовой [11]) связности в $O^v M^{\mathbb{A}}$. В локальных координатах распределение $TC^{-1}(\nabla)$ задается уравнениями

$$d\overset{*}{X}^i - \Gamma_{jp}^i \overset{*}{X}^p dx^j = 0. \quad (18)$$

Распределению $TC^{-1}(\nabla)$ на $O^v M^{\mathbb{A}}$ соответствует проектируемая связность $\tilde{\nabla}$ в главном расслоении $P^v M^{\mathbb{A}}$. Необходимым и достаточным условием существования проектируемой связности в слоеном главном расслоении P является обращение в нуль класса Атья $a(P)$ в когомологиях Молино [8] $H_{\text{adj } F}^{1,1}(P, \mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли структурной группы Ли G расслоения P . Другие препятствия к существованию проектируемой связности были найдены в работе [11].

ТЕОРЕМА 2. *$\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение на полном $\mathbb{A}$ -гладком многообразии $M^{\mathbb{A}}$ является связностью Эресмана в смысле Блюменталя–Хебды [6], [7]. $\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение на $M^{\mathbb{A}}$ существует тогда и только тогда, когда класс Атья $a(P^v M^{\mathbb{A}}) \in H_{\text{adj } F}^{1,1}(P^v M^{\mathbb{A}}, d_n(\mathbb{A}))$ обращается в нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Горизонтальное распределение на многообразии M со слоением F называется связностью Эресмана [6], [7], если для произвольной пары, состоящей из горизонтальной кусочно-гладкой кривой $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$ и вертикальной (т.е. лежащей в слое слоения F) кусочно-гладкой кривой $\tau: [0, 1] \rightarrow M$ с началом в одной и той же точке $X_0 = \sigma(0) = \tau(0)$ существует кусочно-гладкое отображение $\delta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ такое, что ограничение $\delta: a_0 \times [0, 1] \rightarrow M$ является горизонтальной кривой при всяком a_0 и совпадает с σ при $a_0 = 0$, а ограничение $\delta: [0, 1] \times b_0 \rightarrow M$ является вертикальной кривой при всяком b_0 и совпадает с τ при $b_0 = 0$.

Рассмотрим на многообразии $M^{\mathbb{A}}$ горизонтальную кривую σ и вертикальную кривую τ с общим началом $X_0 = \sigma(0) = \tau(0)$. По определению распределения $TC^{-1}(\nabla)$ кривая $\tilde{\sigma} = s \circ \sigma$ является горизонтальной кривой для $\mathbb{A}$ -аффинной связности на $O^v M^{\mathbb{A}}$. Для кривой τ существует единственная кривая $\tilde{\tau}$ на слое $p^{-1}(X_0)$, переходящая в τ при отображении C (накрывающая кривая). При этом $\tilde{\tau}(0) = s(\tau(0)) = \tilde{\sigma}(0)$. Переносом параллельно точки $\tau(a_0) \in p^{-1}(X_0)$, $a_0 \in [0, 1]$, вдоль σ , получим отображение $\tilde{\delta}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow O^v M^{\mathbb{A}}$. Композиция $\delta = C \circ \tilde{\delta}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M^{\mathbb{A}}$ удовлетворяет требованиям определения Блюменталля–Хебды.

Поскольку горизонтальное распределение проектируемой связности в расслоении $O^v M^{\mathbb{A}}$ над полным $M^{\mathbb{A}}$ переходит при отображении C в $\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение на $M^{\mathbb{A}}$, то $\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение на $M^{\mathbb{A}}$ существует тогда и только тогда, когда существует проектируемая связность в $P^v M^{\mathbb{A}}$. Отсюда следует второе утверждение теоремы для полного многообразия $M^{\mathbb{A}}$. Однако, поскольку для определения и $\mathbb{A}$ -аффинного горизонтального распределения и связности в $P^v M^{\mathbb{A}}$ достаточно задания базовых функций Γ_{jk}^i (см. (17) и (18)), это утверждение справедливо и для произвольного $\mathbb{A}$ -гладкого многообразия $M^{\mathbb{A}}$.

Замечания. 1. Из результатов работы [6] следует, что если неполное связное многообразие $M^{\mathbb{A}}$ допускает $\mathbb{A}$ -аффинное горизонтальное распределение, являющееся связностью Эресмана, то универсальные накрывающие слоев канонического $\mathring{\mathbb{A}}$ -слоения являются изоморфными $(\mathring{\mathbb{A}}^n, D_n(\mathbb{A}))$ -многообразиями.

2. Если $a(P^v M^{\mathbb{A}}) \neq 0$, то многообразие $M^{\mathbb{A}}$ не может быть $\mathbb{A}$ -диффеоморфно никакому расслоению $J^{\mathbb{A}} M$.

В заключение приведем пример многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon)$, не допускающего аффинного горизонтального распределения. Для этого на плоскости $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуального переменного $X = x + \varepsilon \dot{x}$ рассмотрим полосу $0 < \dot{x} < \lambda'(x) + \alpha$, где $\lambda'(x) = \beta(\arctg(x + \gamma) - \arctg \gamma) + 1$, а α, β и γ — достаточно малые положительные числа, например, $\alpha = \beta = \gamma = 0.01$. Отождествляя точки $y + \varepsilon \dot{y}$ и $x + \varepsilon \dot{x}$ этой полосы при $y = \lambda(x)$, $\dot{y} = \dot{x}\lambda'(x) + \lambda'(x)$, где $\lambda(x) = \int_0^x \lambda'(x) dx$, получим цилиндр, который наследует структуру многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon)$. Предполагая, что на этом цилиндре имеется аффинное горизонтальное распределение, определяемое коэффициентами Γ и t (см. (1)), при $x = 0$ получим противоречие с законом преобразования коэффициента Γ : $\Gamma(\lambda(x)) = \Gamma(x)\lambda'(x) + \lambda''(x)/\lambda'(x)$, поскольку $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 1$, $\lambda''(0) \neq 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шурыгин В.В. Расслоения струй как многообразия над алгебрами // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1987. С. 3–22.
- [2] Weil A. Théorie des points proches sur les variétés différentiales // Colloq. Internat. Centre Nat. Rech. Sci. V. 52. Strasburg, Paris, 1953. P. 111–117.
- [3] Brickell F., Clark R. S. Integrable almost tangent structures // J. Differ. Geom. 1974. V. 9. № 4. P. 557–563.
- [4] Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1949.
- [5] Шурыгин В.В. Многообразия над локальными алгебрами, эквивалентные расслоениям струй // Изв. вузов. Матем. 1992. № 10. С. 68–79.
- [6] Blumental R. A., Hebda J. J. Ehresmann connections for foliations // Indiana Math. J. 1984. V. 33. № 4. P. 597–612.
- [7] Blumental R. A., Hebda J. J. Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations // Quart. J. Math. 1984. V. 35. P. 383–392.
- [8] Molino P. Riemannian foliations. Boston–Basel: Birkhäuser, 1988.
- [9] Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1979.
- [10] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [11] Kamber F. W., Tondeur P. Foliated bundles and characteristic classes // Lecture Notes in Math. 1975. № 493.
- [12] Апанасов Б.Н. Геометрия дискретных многообразий. М.: Наука, 1991.
- [13] Fried D., Goldman W., Hirsch M. W. Affine manifolds with nilpotent holonomy // Comment. Math. Helv. 1981. V. 56. № 4. P. 487–523.