Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, Подпрямые произведения конечных групп с холловыми π -подгруппами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 311–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:34:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПОДПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ХОЛЛОВЫМИ π -ПОДГРУППАМИ

В. А. Ведерников

Пусть π – непустое множество простых чисел и E_π – класс всех конечных групп, обладающих холловыми π -подгруппами. Группа, принадлежащая классу E_π , называется E_π -группой. Исследованию свойств E_π -групп посвящен ряд работ (см., например, [1]–[4]). Л. А. Шеметков поставил следующий вопрос [5, вопрос 5.65], [3, проблема 18]: замкнут ли относительно конечных подпрямых произведений класс E_π ?

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос при условии выполнимости гипотезы Шрейера о разрешимости внешней группы автоморфизмов конечной простой группы, что непосредственно следует из классификации конечных простых групп [6]. Рассматриваются лишь конечные группы. Все необходимые обозначения и определения можно найти в [3], [8].

Перейдем к изложению полученных результатов.

ЛЕММА 1. *Если группа G – подпрямое произведение E_π -групп G_i , $i = 1, 2$, и G_2 – π -группа, то $G \in E_\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G – подпрямое произведение групп G_i , $i = 1, 2$, то в G существуют нормальные подгруппы N_i такие, что $G/N_i \cong G_i$, $i = 1, 2$, и $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию G_1 – E_π -группа. Следовательно, в G/N_1 существует S_π -подгруппа P/N_1 . Поскольку $G/N_2 \cong G_2$ – π -группа, то $N_1 N_2 / N_2 \cong N_1$ – π -группа. Тогда P является S_π -подгруппой группы G и, значит, $G \in E_\pi$. Лемма доказана.

Нам потребуется следующее известное утверждение.

ЛЕММА 2 [9, лемма 1.1]. *Пусть группа $M = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп P_i , $i = \overline{1, n}$ (возможно и бесконечных). Тогда $\text{Aut}(M)$ содержит нормальную подгруппу $K = \text{Aut}(P_1) \times \text{Aut}(P_2) \times \cdots \times \text{Aut}(P_n)$ такую, что $\text{Aut}(M)/K \cong S_n$.*

ЛЕММА 3. *Пусть $G \in E_\pi$, $M \leq H \leq G$ и $M \triangleleft G$. Если $H/N \in E_\pi$, то $H \in E_\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа G – контрпример, в котором $t = |G| + |H| + |M|$ является наименьшим. Пусть S/M – S_π -подгруппа группы H/M . Допустим, что $S \neq H$, так как $|G| + |S| + |M| < t$, то по индукции $S \in E_\pi$. Поскольку $|H : S|$ – π' -число следует, что $H \in E_\pi$. Получили противоречие. Следовательно, H/M – π -группа. Пусть M_1 – минимальная

нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в M . Допустим, что $M_1 \neq M$. Пусть $\bar{G} = G/M_1$, $\bar{M} = M/M_1$, $\bar{H} = H/M_1$. Тогда $\bar{G} \in E_\pi$, $\bar{H} \leq \bar{G}$, $\bar{M} \triangleleft \bar{G}$ и $\bar{H}/\bar{M} \cong H/M \in E_\pi$. Так как $|\bar{G}| + |\bar{H}| + |\bar{M}| < t$, то по индукции следует, что $\bar{H} \in E_\pi$. Пусть Q/M_1 – S_π -подгруппа группы $\bar{H}$. Поскольку $|G| + |Q| + |M_1| < t$, то по индукции $Q \in E_\pi$. Из $|H : Q| - \pi'$ -число следует, что $H \in E_\pi$. Получили противоречие. Следовательно, M – минимальная нормальная подгруппа группы G .

Допустим, что группа G содержит минимальную нормальную подгруппу L , отличную от M . Пусть $L \leq H$. Так как $L \cap M = 1$ и H/M – π -группа, то L является π -группой. Пусть $G^* = G/L$, $H^* = H/L$, $M^* = ML/L$. Тогда $G^* \in E_\pi$, $H^*/M^* \cong H/(M)/(ML/L) \in E_\pi$. Так как $|G^*| + |H^*| + |M^*| < t$, то по индукции $H^* \in E_\pi$ и, значит, $H \in E_\pi$. Следовательно, L не содержится в H . Пусть $\tilde{G} = G/L$, $\tilde{M} = ML/L$ и $\tilde{H} = HL/L$. Тогда $\tilde{G} \in E_\pi$, $\tilde{H}/\tilde{M} \cong HL/ML \cong H/H \cap ML = H/(H \cap L) \cong (H/M)/(M(H \cap L)/M) \in E_\pi$. Поскольку $|\tilde{G}| + |\tilde{H}| + |\tilde{M}| < t$, то по индукции $\tilde{H} \in E_\pi$ и, значит, $H/H \cap L \in E_\pi$. Из $(H \cap L) \cap M = 1$ следует, что H является подпрямым произведением E_π -группы $H/H \cap L$ и π -группы H/M . Тогда по лемме 1 $H \in E_\pi$. Получили противоречие.

Следовательно, M – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . По теореме 9 из [1] $M \notin C_\pi$. Следовательно, $M = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп P_i , $i = \overline{1, n}$. Так как $c_G(M) = 1$, то G изоморфна подгруппе группы $\text{Aut}(M)$. По лемме 2 $\text{Aut}(M)$ содержит нормальную подгруппу

$$K = \text{Aut}(P_1) \times \text{Aut}(P_2) \times \cdots \times \text{Aut}(P_n).$$

Можно считать, что $G \leq \text{Aut}(M)$. Тогда $G \cap K \triangleleft G$ и, значит, $G \cap K \in E_\pi$. Поскольку, в силу гипотезы Шрейера,

$$K/M \cong \text{Out}(P_1) \times \text{Out}(P_2) \times \cdots \times \text{Out}(P_n)$$

– разрешимая группа, то $(G \cap K)/M$ – D_π -группа. Из-за того, что H/M – π -группа следует, что $(H \cap K)/M$ является π -группой и, значит, $(H \cap K)/M \in E_\pi$. Тогда по лемме 3.1 из [4] $H \cap K \in E_\pi$. Так как $\text{Aut}(P_i) \triangleleft K$, $i = \overline{1, n}$, то $(H \cap K) \cap \text{Aut}(P_i) = H \cap \text{Aut}(P_i) = \text{Aut}_H(P_i) \triangleleft H \cap K$, $i = \overline{1, n}$, и, значит, $\text{Aut}_H(P_i)$, $i = \overline{1, n}$, является E_π -группой.

Пусть $1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = M < H_{n+1} < \cdots < H_S = H$ – композиционный ряд группы H , проходящий через M , причем $H_i/H_{i-1} \cong P_i$, $i = \overline{1, n}$. По лемме 2.5 из [4] $\text{Aut}_H(H_i/H_{i-1}) \cong \text{Aut}_H(P_i)$ является E_π -группой для любого $i = \overline{1, n}$. Так как H/M является π -группой, $N_H(H_i/H_{i-1}) = N_H(H_i) \cap N_H(H_{i-1})$, $C_H(H_i/H_{i-1}) \geq H_{i-1}$, то

$$\text{Aut}_H(H_i/H_{i-1}) \cong N_H(H_i/H_{i-1})/C_H(H_i/H_{i-1}), \quad i = \overline{n+1, S},$$

является π -группой и, значит, E_π -группой. Тогда по теореме 3.5 из [4] H является E_π -группой. Получили противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В лемме 3 формацию $\mathfrak{E}$ нельзя заменить S_n -замкнутой формацией $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} \times \text{form } A_5$. По лемме 4 из [7] $\mathfrak{F}$ является S_n -замкнутой формацией. Пусть $G = \text{SL}(2, 61)$, $\pi = \{2, 3, 5\}$ и $M = Z(G)$. Группа G/M содержит диэдральную подгруппу D/M и подгруппу $H/M \cong A_5$, причем $|D/M| = 60$. Тогда D и H являются холловыми π -подгруппами группы G , причем $H \cong \text{SL}(2, 5)$. Так как $D \in \mathfrak{F}$, то G является $E_\pi(\mathfrak{F})$ -группой. Далее H/M – $S_\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы G/M , но $H \notin \mathfrak{F}$ и, значит, $H \notin E_\pi(\mathfrak{F})$. Во избежание путаницы с формационным произведением в обозначение класса $E_\pi(\mathfrak{F})$ включены скобки (ср. с [3, с. 175]).

ТЕОРЕМА 1. *Конечное подпрямое произведение E_π -групп является E_π -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – подпрямое произведение E_π -групп $G_i, i = \overline{1, n}$. Индукцией по n покажем, что T является E_π -группой.

Пусть $n = 2$. Допустим, что T – контрпример минимального порядка. По теореме 1 из [8] существуют эпиморфизмы φ_i групп G_i на F такие, что

$$T = G_1 \overset{F}{\lambda} G_2 = \{g_1, g_2 \mid g_1^{\varphi_1} = g_2^{\varphi_2}, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}.$$

По лемме 1 из [8] $\text{Ker } \varphi_i = N_i = T \cap G_i \triangleleft T, T/N_i \cong G_{3-i}, i = 1, 2, T/N_1 N_2 \cong F$. Так как $T/N_1 \cong G_2 - E_\pi$ -группа, то $T/N_1 N_2 \cong (T/N_1)/(N_1 N_2/N_1)$ является E_π -группой. Пусть $R/N_1 N_2$ – π -холлова подгруппа группы $T/N_1 N_2$. Пусть H_i – проекция R в $G_i, i = 1, 2$. Тогда R – подпрямое произведение групп H_i , причем $R \cap H_i = N_i$ и H_i/N_i – π -холлова подгруппа группы $G_i/N_i, i = 1, 2$. Далее, по лемме 3 H_i является E_π -группой, $i = 1, 2$. Допустим, что $|R| < |T|$. Но тогда по индукции $R - E_\pi$ -группа. Так как $|T : R| - \pi'$ -число, то и T является E_π -группой. Получили противоречие. Следовательно, $T = R$ и $F \cong G_i/N_i - \pi$ -группа, $i = 1, 2$.

Пусть $(G_2)_\pi - \pi$ -холлова подгруппа группы G_2 и α_2 – ограничение φ_2 на $(G_2)_\pi$. Тогда α_2 – гомоморфизм $(G_2)_\pi$ в F , причем $\text{Ker } \alpha_2 = N_2 \cap (G_2)_\pi - \pi$ -холлова подгруппа в N_2 . Так как $G_2/N_2 \cong F - \pi$ -группа, то $|F| = |G_2|_\pi / |N_2|_\pi$ и, значит, α_2 – эпиморфизм $(G_2)_\pi$ на F . Тогда F -произведение $S = G_1 \overset{F}{\lambda} (G_2)_\pi$ относительно эпиморфизмов φ_1, α_2 является подгруппой группы T причем $S -$ подпрямое произведение групп G_1 и $(G_2)_\pi$. По лемме 1 $S - E_\pi$ -группа. Поскольку $|T| = |F| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$ и $|S| = |F| \cdot |N_1| \cdot |N_2|_\pi$, то $|T : S| - \pi'$ -число и, значит, T является E_π -группой. Следовательно, при $n = 2$ утверждение верно.

Пусть $n > 2$. Тогда T является подпрямым произведением своей проекции T_{n-1} на $G_1 \times \dots \times G_{n-1}$ и группы G_n . По предположению индукции T_{n-1} , как подпрямое произведение групп $G_1, \dots, G_{n-1}$, есть E_π -группа. Поэтому по доказанному выше, G является E_π -группой как подпрямое произведение двух E_π -групп. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Класс E_π является формацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in E_\pi$ и $N \triangleleft G$. Тогда G обладает S_π -подгруппой P и PN/N является S_π -подгруппой группы G/N . Следовательно, $G/N \in E_\pi$ и, значит, класс E_π Q -замкнут. По теореме 1 класс E_π R_0 -замкнут. Поэтому E_π является формацией. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{F} = \{S_n, \text{Ext}\}$ – замкнутая формация. Является ли класс $E_\pi(\mathfrak{F})$ формацией? Класс $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно разрешимых подгрупп, называем S_π -замкнутым. Несложная модификация рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1, позволяет установить, что класс $E_\pi(\mathfrak{F})$ является формацией, если $\mathfrak{F} = \{S_n, \text{Ext}, S_\pi\}$ -замкнутая формация.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чунихин С. А. // Матем. сб. 1953. Т. 33. № 1. С. 111–132.
2. Hall P. // Proc. London Math. Soc. 1956. Т. 6. С. 286–304.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. Gross F. // J. Algebra. 1986. V. 98. P. 1–13.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 1990.
6. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
7. Ведерников В. А. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 6. С. 32–37.
8. Ведерников В. А. // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 523–548.
9. Aschbacher M., Scott L. // J. Algebra. 1985. V. 92. P. 44–80.