Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Файзиев, Псевдохарактеры на правильных произведениях групп, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 2, 314–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:23:02

ПСЕВДОХАРАКТЕРЫ НА ПРАВИЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП

В. А. Файзиев

Напомним (см. [1]), что псевдохарактером группы G называется вещественнозначная функция f на G , удовлетворяющая следующим условиям: 1) $f(x^n) = nf(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in G$; 2) множество $\{f(xy) - f(x) - f(y) \mid x, y \in G\}$ ограничено. Множество всех псевдохарактеров группы S обозначим через $PX(S)$. Очевидно, что $PX(S)$ является вещественным линейным пространством относительно обычных операций. Его подпространство, состоящее из вещественных аддитивных характеров, обозначим через $X(S)$. Пусть τ эпиморфизм группы G на группу H и $\varphi \in PX(H)$, тогда ясно, что функция $\varphi \circ \tau$ будет псевдохарактером группы G , а отображение $\tau^*: \varphi \rightarrow \varphi \circ \tau$ является вложением пространства $PX(H)$ в $PX(G)$.

Пусть $G = \prod_{i \in J} A_i$ – правильное произведение групп $A_i, i \in J$, (см. [2], [3]), тогда для любого $i \in J$ отображение τ_i такое, что $\tau_i(a_i) = a_i \forall a_i \in A_i$ и $\tau_i(a_j) = 1 \forall a_j \in A_j, i \neq j$, продолжается до эпиморфизма группы G на A_i . Эти эпиморфизмы τ_i назовем естественными эпиморфизмами группы G на сомножители, они индуцируют естественные вложения $\tau_i^*: PX(A_i) \rightarrow PX(G)$. В дальнейшем будем считать, что пространства $PX(A_i)$ вложены в $PX(G)$ естественными вложениями τ_i^* . Декартовой подгруппой правильного произведения $G = \prod_{i \in J} A_i$ будем называть нормальный делитель D группы G , порожденный множеством коммутаторов $\{[a_i, a_j] \mid a_i \in A_i, a_j \in A_j, i \neq j, i, j \in J\}$. Декартова подгруппа группы $G = \prod_{i \in J} A_i$ является ядром естественного эпиморфизма группы $\prod_{i \in J} A_i$ на прямое произведение $G = \bigotimes_{i \in J} A_i$. Если правильное произведение групп $A_i, i \in J$ вырождается в их свободное произведение, то декартова подгруппа является свободной группой. Грюнбергом в [4] указана система свободных образующих этой группы, которая состоит из правосторонних коммутаторов $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$, где все i_m различны, $i_1 > i_2, i_2 < i_3 < \dots < i_k, k \geq 2, a_{i_m} \in A_{i_m}, a_{i_m} \neq 1, m = 1, 2, \dots, k$ (предполагается, что зафиксирована некоторая линейная упорядоченность множества индексов J). Ясно, что образ этой системы образующих при естественном эпиморфизме свободного произведения $G = \bigotimes_{i \in J} A_i$ на правильное $G = \prod_{i \in J} A_i$ будет системой образующих, которую будем называть грюнбергов-ой, декартовой подгруппы в $G = \prod_{i \in J} A_i$.

Пусть $G = \prod_{i \in J} A_i$ правильное произведение групп A_i , $i \in J$, и D – его декартова подгруппа. Будем говорить, что псевдохарактер φ группы D инвариантен относительно действия группы G , если для любого x из D и любого g из G выполняется равенство $\varphi(x^g) = \varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$.

Обозначим через $BPX(D, G)$ подпространство $PX(D)$, состоящее из псевдохарактеров группы D , инвариантных относительно действия группы G , ограниченных на грюнберговой системе образующих и на множестве

$$Q = \left\{ [a_{i_n}, b_{i_{n-1}}]^{b_{i_n}} \cdot [a_{i_{n-1}}, b_{i_{n-2}}]^{b_{i_{n-1}}} \cdots [a_{i_2}, b_{i_1}]^{b_{i_2}} \cdots b_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n, n \geq 2; a_{i_m}, b_{i_m} \in A_{i_m}, i_m \in J \right\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $A = \prod_{i \in J} A_i$ – прямое произведение групп A_i , $i \in J$. Тогда всякий псевдохарактер группы A разлагается и единственным образом в ℓ_1 – сумму псевдохарактеров сомножителей. Это означает, что если $\varphi \in PX(A)$, $\varphi_i = \varphi|_{A_i}$ и

$$\Delta = \sup\{\varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y) \mid x, y \in A\}, \\ \Delta_i = \sup\{\varphi_i(xy) - \varphi_i(x) - \varphi_i(y) \mid x, y \in A_i\},$$

то существует не более чем счетное подмножество $J_0 \in J$ такое, что $\Delta_i \neq 0$ в том и только в том случае, когда $i \in J_0$ и

$$\Delta = \sum_{i \in J_0} \Delta_i, \quad \varphi = \sum_{i \in J} \varphi_i.$$

В силу естественного эпиморфизма группы $G = \prod_{i \in J} A_i$ на группу $A = \bigotimes_{i \in J} A_i$ пространство $PX(A)$ вкладывается в $PX(G)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = \prod_{i \in J} A_i$ – правильное произведение групп и декартова подгруппа в $\prod_{i \in J} A_i$. Тогда существует такое вложение $BPX(D, G)$ в $PX(G)$, что $PX(G) = BPX(D, G) \dot{+} PX(\bigotimes_{i \in J} A_i)$

Частным случаем правильных произведений групп являются вербальные произведения, введенные в [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть k – натуральное число и o означает k -е нильпотентное, k -е разрешимое или k -е бернсайдово произведение групп. Тогда для любого набора групп A_i , $i \in J$, справедливо равенство $PX(\prod_{i \in J} A_i) = PX(\bigotimes_{i \in J} A_i)$.

Пусть $G = A \text{ wr } B$ – сплетение групп A и B , $K = \bigotimes_{b \in B} A(b)$ ($A(b) \cong A$) – его базовая группа. Каждому элементу φ из $PX(A)$ сопоставим вещественную функцию $\overline{\varphi}$ на K по правилу

$$\overline{\varphi}(a_1(b_1) \cdot a_2(b_2) \cdots a_n(b_n)) = \sum_{i=1}^n \varphi(a_i).$$

Тогда отображение $\pi: \varphi \rightarrow \overline{\varphi}$ будет вложением $PX(A)$ в $PX(K, B)$, а если группа B конечная, то π будет вложением $PX(A)$ в $PX(K, B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $G = A \operatorname{wr} B$. Тогда

- 1) если группа B бесконечная, то $PX(G) = PX(B) \dot{+} X(A)$;
- 2) если B конечная, то $PX(G) = PX(A)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H = A \operatorname{wr}_v B$ – v -вербальное сплетение групп A и B , $\prod_{b \in B}^v A(b)$ – его базовая группа, а D – декартова подгруппа в $\prod_{b \in B}^v A(b)$. Тогда

$$PX(H) = PX(A \operatorname{wr} B) \dot{+} BPX(D, H),$$

где $BPX(D, H)$ означает пространство псевдохарактеров группы D , инвариантных относительно действия группы H , ограниченных на множестве Q и на гронберговой системе образующих декартовой подгруппы D .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $k \in \mathbb{N}$ и $H = A \operatorname{wr}_v B$ – k -е нильпотентное, k -е разрешимое или k -е бернсайдово сплетение, то $PX(H) = PX(A \operatorname{wr} B)$.

Математический институт
АН Республики Таджикистан

Поступило
01.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штерн А. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 70–73.
2. Головин О. Н. // Матем. сб. 1950. Т. 27. С. 427–454.
3. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. Gruenberg K. // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. № 25. P. 29–62.
5. Moran S. // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6. № 24. P. 581–596.