Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Масальцев, Вариант теоремы Ру–Вильмса для поверхностей постоянной средней кривизны в S^3 , *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 92–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 08:42:55

УДК 514

ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ РУ–ВИЛЬМСА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ В S^3

Л. А. Масальцев

Рассматривается вариант гауссова отображения $g: M^2 \rightarrow S^2$ для поверхности M^2 , погруженной в S^3 , и доказывается аналог теоремы Ру–Вильмса о том, что данное отображение гармоническое тогда и только тогда, когда M^2 имеет постоянную среднюю кривизну. Как следствие получается, что вложенный плоский тор T^2 с постоянной средней кривизной есть сферическая поверхность Делоне.

Библиография: 10 названий.

1. Теорема Ру–Вильмса [1] утверждает, что грассманово отображение подмногообразия M^n евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$ гармонично тогда и только тогда, когда вектор средней кривизны H параллелен в нормальной связности: $\nabla^\perp H = 0$. В частности, если подмногообразие представляет собой гиперповерхность M^n евклидова пространства, то ее гауссово отображение $n: M^n \rightarrow S^n$ гармонично тогда и только тогда, когда средняя кривизна поверхности постоянна. Последнее утверждение было обобщено на случай грассманова отображения подмногообразий пространств постоянной кривизны следующим образом: грассманово отображение подмногообразия пространства постоянной кривизны, отличной от нуля, гармонично тогда и только тогда, когда подмногообразие минимально (см. [2, теорема 18] с указанной там ссылкой на источники).

В статье [3] Х. Лю предложил новый подход к определению гауссова отображения подмногообразия M^k в компактной группе Ли G , который состоит в следующем. Обозначим через $G_k(g)$ грассманово многообразие, состоящее из всех k -мерных линейных подпространств алгебры Ли g данной группы G . Пусть L_x – левый сдвиг на элемент $x \in G$ и dL_x – дифференциал левого сдвига. Дифференциал dL_x переводит касательные векторы из $T_y M$ в касательные векторы в пространстве $T_{xy} G$, и по линейности это действие можно продолжить на подпространства $T_y M$. Лю назвал гауссовым отображением подмногообразия $M^k \in G$ следующее отображение:

$$G: M \rightarrow G_k(g), \quad x \rightarrow (dL_{x^{-1}})T_x M,$$

где $x \in M^k \subset G$. Таким образом, при гауссовом отображении по Лю каждому касательному пространству $T_x M$ к подмногообразию M соответствует k -мерное подпространство в алгебре Ли g , которая рассматривается как касательное пространство $T_e G$ в единице группы G . Мы используем данный подход, изучая гладкие поверхности $M^2 \subset S^3$, и определяем *гауссово отображение* $g(n)$ следующим образом:

$$g(n): M^2 \rightarrow S^2, \quad x \rightarrow (dL_{x^{-1}})(n), \quad (1)$$

где $x \in M^2$ и n есть вектор нормали к поверхности M^2 в точке x . Мы рассматриваем поверхность M^2 с метрикой, индуцированной ее изометрическим погружением в S^3 , а сферу S^2 со стандартной метрикой, индуцированной ее погружением в $\mathbb{R}^3$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Гауссово отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ является гармоническим тогда и только тогда, когда поверхность M^2 имеет постоянную среднюю кривизну в S^3 .*

Затем мы приводим примеры гармонических отображений, которые получаются, если взять в качестве M^2 следующие поверхности постоянной средней кривизны:

- 1) вполне геодезическую 2-сферу;
- 2) сферические поверхности вращения;
- 3) сферический геликоид.

Изучен также вопрос о виде индуцированной метрики на S^2 и случай вырождения гауссова отображения $g(n)$.

2. Рассмотрим сферу S^3 как замкнутую подгруппу Ли единичных по норме кватернионов и вычислим действие дифференциала $dL_{x^{-1}}v(x)$ левого сдвига на произвольный касательный вектор $v(x) \in T_x S^3$. Воспользуемся ортогональным представлением группы единичных кватернионов [4, с. 49]. Пусть $x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$, $v(x) = v^0 + iv^1 + jv^2 + kv^3$. Тогда (поскольку $x^{-1} = x^0 - ix^1 - jx^2 - kx^3$) имеем

$$dL_{x^{-1}}v(y) = \varphi(x^{-1})\varphi(v(x)) = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ -x^1 & x^0 & x^3 & -x^2 \\ -x^2 & -x^3 & x^0 & x^1 \\ -x^3 & x^2 & -x^1 & x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ v^1 & v^0 & -v^3 & v^2 \\ v^2 & v^3 & v^0 & -v^1 \\ v^3 & -v^2 & v^1 & v^0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя элементы первого столбца произведения матриц, видим, что

$$dL_{x^{-1}}v(x) = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ -x^1 & x^0 & x^3 & -x^2 \\ -x^2 & -x^3 & x^0 & x^1 \\ -x^3 & x^2 & -x^1 & x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = A_x v(x), \quad (2)$$

где матрица $A_x \in SO(4)$.

Пусть поверхность M^2 задана в S^3 уравнениями

$$X(u, v) = (X^0(u, v), X^1(u, v), X^2(u, v), X^3(u, v)),$$

и четыре вектора X_u, X_v, n, X образуют подвижный репер в $\mathbb{R}^4$, причем первые три из них принадлежат $T_X S^3$ и n является единичной нормалью к поверхности. Следуя методике Лю, определим согласно формуле (1) гауссовым образом $g(n)$ нормали $n(X)$ в точке $X(u, v) \in M^2$ следующий вектор, принадлежащий касательному пространству к сфере S^3 в точке $(1, 0, 0, 0)$:

$$g(n) := A_X n(X), \quad (3)$$

где оператор A_X задан формулой (2). Отметим, что $|g(n)| = 1$ в любой точке (u, v) , так как $A_X \in SO(4)$. Таким образом, каждой поверхности $M^2 \subset S^3$ мы можем поставить

в соответствие отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2 \subset T_{(1,0,0,0)}S^3$, которое будем называть *гауссовым отображением* данной поверхности. Нам удобно ввести следующие три косимметрические матрицы $J_1, J_2, J_3 \in SO(4)$:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда определение гауссова отображения $g(n)$, заданное формулой (3), можно переписать следующим образом:

$$g_x(n) = (\langle J_1 x, n \rangle, \langle J_2 x, n \rangle, \langle J_3 x, n \rangle). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Действие оператора J_1 на S^3 отвечает правый сдвиг на кватернионы $i: x \rightarrow y = xi$. Аналогично, операторам J_2, J_3 отвечают правые сдвиги на кватернионы j и k соответственно.

ПРИМЕР 1. Пусть $S_0^2 := (x^0 = 0)$ – вполне геодезическая двумерная сфера в S^3 . Тогда в каждой точке $x = (0, x^1, x^2, x^3) \in S_0^2$ вектор нормали $n = (1, 0, 0, 0)$ и нетрудно вычислить по формуле (4), что $g_x(n) = -(x^1, x^2, x^3)$.

Пусть $X(u, v)$ – гладкая поверхность в S^3 . Для доказательства теоремы 1, поскольку гармоничность отображения является локальным свойством, будем считать, что первая и вторая фундаментальные формы поверхности имеют вид

$$ds^2 = e^{2\omega(u,v)}(du^2 + dv^2), \quad (5)$$

$$II = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv + N(u, v) dv^2. \quad (6)$$

Символы Кристоффеля метрики (5) таковы:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \omega_u & \omega_v \\ \omega_v & -\omega_u \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -\omega_v & \omega_u \\ \omega_u & \omega_v \end{pmatrix}.$$

Деривационные формулы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \omega_u X_u - \omega_v X_v + Ln - e^{2\omega} X, \\ X_{uv} &= \omega_v X_u + \omega_u X_v + Mn, \\ X_{vv} &= -\omega_u X_u + \omega_v X_v + Nn - e^{2\omega} X, \\ n_u &= -e^{-2\omega}(LX_u + MX_v), \quad n_v = -e^{-2\omega}(MX_u + NX_v). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения Кодаци имеют вид

$$M_v + \omega_u(L + N) = N_u, \quad M_u + \omega_v(L + N) = L_v. \quad (8)$$

Условие постоянства средней кривизны поверхности можно записать так

$$e^{-2\omega}(L + N) = 2H = \text{const}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по очереди по переменным u, v , получим

$$L_u + N_u = 2\omega_u(L + N), \quad L_v + N_v = 2\omega_v(L + N). \quad (9')$$

Для доказательства теоремы 1 используем следующий критерий гармоничности отображения $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$ риманова многообразия M^m с метрикой $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \dots, m$, в n -мерную сферу $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной метрикой g_0 [5, гл. 4, следствие 2.24]: необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение $f: (M^m, \gamma) \rightarrow (S^n, g_0)$ было гармоническим, является

$$\Delta_M f(x) = -2e(f)f(x), \quad x \in M^m, \quad (10)$$

т.е.

$$\Delta_M f^i(x) = -2e(f)f^i(x) \quad (10')$$

для всех $i = 1, \dots, n+1$, где через $e(f)$ обозначена плотность энергии отображения f , равная

$$e(f) = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^j(x)}{\partial x^\beta}, \quad (11)$$

а

$$\Delta_M f^i(x) = \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \frac{\partial f^i}{\partial x^\tau} \right)$$

– оператор Бельтрами–Лапласа от функции f^i на многообразии M^m .

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 1 о гармоничности гауссова отображения $g(n)$ для поверхностей постоянной средней кривизны в S^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала вычислим плотность энергии $e(g(n))$ гауссова отображения поверхности постоянной средней кривизны в S^3 . Согласно общей формуле (11), учитывая вид метрики поверхности (5), получим

$$e(g(n)) = \frac{e^{-2\omega}}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\frac{\partial g^i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial g^i}{\partial v} \right)^2 \right).$$

Используя деривационные формулы (7) и определение функции $g^i(n)$ (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^i}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \langle n, J_i X \rangle = \langle n_u, J_i X \rangle + \langle n, J_i X_u \rangle \\ &= -e^{-2\omega} (L \langle X_u, J_i X \rangle + M \langle X_v, J_i X \rangle) + \langle n, J_i X_u \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\partial g^i}{\partial v} = -e^{-2\omega} (M \langle X_u, J_i X \rangle + N \langle X_v, J_i X \rangle) + \langle n, J_i X_v \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial g^i}{\partial u} \right)^2 &= L^2 e^{-4\omega} \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X_u \rangle^2 + 2LM e^{-4\omega} \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle \langle X_v, J_i X \rangle \\ &\quad + M^2 e^{-4\omega} \sum_{i=1}^3 \langle X_v, J_i X \rangle^2 - 2L e^{-2\omega} \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle \\ &\quad - 2M e^{-2\omega} \sum_{i=1}^3 \langle X_v, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle + \sum_{i=1}^3 \langle n, J_i X_u \rangle^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого единичного вектора $a \in \mathbb{R}^4$ векторы a, J_1a, J_2a, J_3a образуют ортонормированный базис, поэтому

$$X_u = \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle J_i X,$$

так как $\langle X_u, X \rangle = 0$. Поскольку величины $\langle X_u, J_i X \rangle$ являются проекциями вектора X_u на орты $J_i X$, по теореме Пифагора имеем

$$\sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle^2 = |X_u|^2 = e^{2\omega}.$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^3 \langle n, J_i X_u \rangle^2 = \sum_{i=1}^3 \langle J_i n, X_u \rangle^2 = |X_u|^2 = e^{2\omega}$$

(здесь использована кососимметричность оператора J_i : $\langle J_i a, b \rangle = -\langle a, J_i b \rangle$). Разложив векторы n и X по базису $X_u, J_1 X_u, J_2 X_u, J_3 X_u$, используя их ортогональность и вычисляя их скалярное произведение в данном базисе, получим

$$\sum_{i=1}^3 \langle X, J_i X_u \rangle \langle n, J_i X_u \rangle = - \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle = 0.$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle \langle n, J_i X_v \rangle = -e^{2\omega}, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^3 \langle X_v, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle = e^{2\omega}. \quad (13)$$

Имеем, используя кватернионное представление операторов J_i правыми сдвигами (черта обозначает сопряжение в теле кватернионов),

$$\begin{aligned} \langle J_1 X_u, n \rangle \langle J_1 X, X_v \rangle &= \langle X_u i, n \rangle \langle X i, X_v \rangle = \frac{1}{4} (\overline{X_u} i n + \overline{n} X_u i) (\overline{X} i X_v + \overline{X_v} X i) \\ &= \frac{1}{4} (-i \overline{X_u} n + \overline{n} X_u i) (-i \overline{X} X_v + \overline{X_v} X i) = \langle i, \overline{X_u} n \rangle \langle i, \overline{X} X_v \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} \langle J_2 X_u, n \rangle \langle J_2 X, X_v \rangle &= \langle j, \overline{X_u} n \rangle \langle j, \overline{X} X_v \rangle, \\ \langle J_3 X_u, n \rangle \langle J_3 X, X_v \rangle &= \langle k, \overline{X_u} n \rangle \langle k, \overline{X} X_v \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^3 \langle J_i X_u, n \rangle \langle J_i X, X_v \rangle = \langle \overline{X_u} n, \overline{X} X_v \rangle.$$

Поскольку базис X, X_u, X_v, n всегда ортогональный и с одинаковой ориентацией, последнее выражение, имеющее инвариантный смысл, удобно вычислить, предполагая, что $X(u_0, v_0) = 1, X_u(u_0, v_0) = e^{\omega(u_0, v_0)}i, X_v(u_0, v_0) = e^{\omega(u_0, v_0)}j, n(u_0, v_0) = k$. Тогда

$$\langle \overline{X}_u n, \overline{X} X_v \rangle = \langle -e^{\omega(u_0, v_0)}ik, e^{\omega(u_0, v_0)}j \rangle = e^{2\omega(u_0, v_0)},$$

что и доказывает формулу (13).

Аналогично имеем

$$\sum_{i=1}^3 \langle J_i X, X_u \rangle \langle J_i X_v, n \rangle = \langle \overline{X} X_u, \overline{X}_v n \rangle = \langle e^{\omega(u, v)}i, -e^{\omega(u, v)}jk \rangle = -e^{2\omega},$$

откуда следует (12).

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial g^i}{\partial u} \right)^2 = e^{-2\omega}(L^2 + M^2) + e^{2\omega} - 2M. \quad (14)$$

Аналогично получим

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial g^i}{\partial v} \right)^2 = e^{-2\omega}(M^2 + N^2) + e^{2\omega} + 2M. \quad (15)$$

Значит, плотность энергии гауссова отображения равна

$$e(g(n)) = \frac{e^{-2\omega}}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\frac{\partial g^i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial g^i}{\partial v} \right)^2 \right) = \frac{e^{-4\omega}}{2} (L^2 + N^2 + 2M^2) + 1. \quad (16)$$

Вычислим теперь оператор Бельтрами–Лапласа

$$\Delta_M g^i = e^{-2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) g^i$$

от произвольной координаты $g^i(n)$. В силу деривационных формул (7), поскольку $\langle X_u, J_i X_u \rangle = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^i}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} (-e^{-2\omega} (L \langle X_u, J_i X \rangle + M \langle X_v, J_i X \rangle) + \langle n, J_i X_u \rangle) \\ &= (-L_u + 2L\omega_u) e^{-2\omega} \langle X_u, J_i X \rangle - L e^{-2\omega} \langle \omega_u X_u - \omega_v X_v + Ln - e^{2\omega} X, J_i X \rangle \\ &\quad + (-M_u + 2\omega_u M) \langle X_v, J_i X \rangle - M e^{-2\omega} \langle \omega_v X_u + \omega_u X_v + Mn, J_i X \rangle \\ &\quad - 2M e^{-2\omega} \langle X_v, J_i X_u \rangle + \langle n, J_i (\omega_u X_u - \omega_v X_v + Ln - e^{2\omega} X) \rangle \\ &= e^{-2\omega} (-L_u + \omega_u L - M\omega_v) \langle X_u, J_i X \rangle + e^{-2\omega} (-M_u + \omega_u M + L\omega_v) \langle X_v, J_i X \rangle \\ &\quad - ((L^2 + M^2) e^{-2\omega} + e^{2\omega}) \langle n, J_i X \rangle - 2M e^{-2\omega} \langle X_v, J_i X_u \rangle \\ &\quad + \omega_u \langle n, J_i X_u \rangle - \omega_v \langle n, J_i X_v \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично для второй производной по v получается формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^i}{\partial v^2} = & e^{-2\omega}(-M_v + \omega_M + N\omega_u) + e^{-2\omega}(-N_v + \omega_v N - M\omega_u) \\ & - ((M^2 + N^2)e^{-2\omega} + e^{2\omega}) - 2M\langle X_u, J_i X_v \rangle - \omega_u \langle n, J_i X_u \rangle + \omega_v \langle n, J_i X_v \rangle. \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения для вторых производных и умножая на $e^{-2\omega}$, после упрощения получим следующее выражение для оператора Бельтрами–Лапласа от функции g^i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \Delta_M g^i = & -(e^{-4\omega}(L^2 + N^2 + 2M^2) + 2)\langle n, J_i X \rangle \\ & + e^{-4\omega}((L + N)\omega_u - L_u - M_v)\langle X_u, J_i X \rangle \\ & + e^{-4\omega}((L + N)\omega_v - N_v - M_u)\langle X_v, J_i X \rangle. \end{aligned}$$

Используя формулу (16) для плотности энергии, можно правую часть полученного выражения преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \Delta_M g^i = & -2e(g(n))g^i + e^{-4\omega}\left((L + N)\omega_u - L_u - M_v\right)\langle X_u, J_i X \rangle \\ & + ((L + N)\omega_v - N_v - M_u)\langle X_v, J_i X \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь легко доказать достаточность условия теоремы 1. Действительно, если средняя кривизна поверхности постоянна, то выполнены уравнения (9') и, сравнивая их с соответствующими уравнениями Кодацци (8), получим

$$(L + N)\omega_u = L_u + M_v, \quad (L + N)\omega_v = N_v + M_u. \quad (18)$$

Тогда уравнения (17) принимают вид

$$\Delta_M g^i = -2e(g(n))g^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Следовательно, согласно критерию гармоничности отображения в сферу со стандартной метрикой (10') гауссово отображение $g(n)$ поверхности M^2 постоянной средней кривизны в S^3 является гармоническим, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ гармоническое, т.е. согласно критерию (10') должно быть выполнено уравнение (19). Тогда из (17) следует, что имеют место следующие уравнения для $i = 1, 2, 3$:

$$((L + N)\omega_u - L_u - M_v)\langle X_u, J_i X \rangle + ((L + N)\omega_v - N_v - M_u)\langle X_v, J_i X \rangle = 0.$$

После умножения i -го из этих уравнений на вектор $J_i X$ и суммирования мы получим

$$((L + N)\omega_u - L_u - M_v)X_u + ((L + N)\omega_v - N_v - M_u)X_v = 0.$$

Но линейная зависимость между координатными касательными векторами к регулярной поверхности возможна только тривиальная, поэтому должны быть выполнены уравнения (18). Сравнивая их с уравнениями Кодацци (8), получим уравнения (9'), из которых следует условие (9) постоянства средней кривизны поверхности. Таким образом, из гармоничности отображения $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ вытекает, что поверхность M^2 имеет постоянную среднюю кривизну в S^3 , что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично тому, как проведено доказательство теоремы 1, можно получить следующую формулу для лапласиана от вектора нормали n : $\Delta_M n = 2HX - 2e(n)n$, где H – средняя кривизна поверхности $X(u, v) \subset S^3$. Из этой формулы также следует упомянутое во введении утверждение о гармоничности грасманова отображения $n: M^2 \rightarrow S^3$ для минимальных поверхностей в S^3 , которое, конечно, отличается от отображения $g(n): M^2 \rightarrow S^2$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим поверхность вращения в S^3 , изометричную двумерному плоскому тору

$$X(u, v) = \left(a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, b \cos \frac{v}{b}, b \sin \frac{v}{b} \right),$$

где $a^2 + b^2 = 1$ и переменные u и v меняются в пределах $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$. Средняя кривизна этой поверхности в S^3 постоянна и равна

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right).$$

Гауссово отображение $g(n)$ этой поверхности, вычисленное по формуле (4), имеет вид

$$g(n) = \left(0, -\cos \left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b} \right), \sin \left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b} \right) \right).$$

Плотность энергии отображения $g(n)$ равна

$$e(g(n)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Поскольку метрика поверхности $X(u, v)$ есть $ds^2 = du^2 + dv^2$, то

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

и нетрудно непосредственно проверить условие гармоничности отображения $g(n)$:

$$\Delta g^i(n) = -2e(g(n))g^i(n), \quad i = 1, 2, 3.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим следующую линейчатую минимальную поверхность (сферический геликоид) в S^3 , впервые указанную Лоусоном [6, предложение 7.1]:

$$\Psi(u, v) = (\cos \alpha u \cos v, \sin \alpha u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и переменные $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Если число α рациональное, то поверхность представляет собой погружение тора в виде компактной минимальной поверхности с самопересечениями. Если же число α иррационально, то, поскольку имеется периодичность по переменной v , можно себе представлять $\Psi(u, v)$ как погружение некокомпактного минимального цилиндра в S^3 . Метрика сферического геликоида неплоская и равна

$$ds^2 = (\alpha^2 \cos^2 v + \sin^2 v) du^2 + dv^2.$$

Вычисления гауссова отображения поверхности $g(n): \Psi \rightarrow S^2$ дают следующие координатные функции на S^2 :

$$\begin{aligned} g^1(n) &= \frac{(\alpha + 1) \sin v \cos v}{\sqrt{\sin^2 v + \alpha^2 \cos^2 v}}, \\ g^2(n) &= \frac{\sin((\alpha - 1)u)(\sin^2 v - \alpha \cos^2 v)}{\sqrt{\sin^2 v + \alpha^2 \cos^2 v}}, \\ g^3(n) &= \frac{\cos((\alpha - 1)u)(\sin^2 v - \alpha \cos^2 v)}{\sqrt{\sin^2 v + \alpha^2 \cos^2 v}}. \end{aligned}$$

Можно и в этом примере непосредственно убедиться в гармоничности отображения $g(n): \Psi \rightarrow S^2$, хотя расчеты осложняются из-за того, что метрика не является конформно-евклидовой. Отметим только, что $g(n)$ накрывает всю сферу счетное число раз.

3. Теперь изучим некоторые геометрические свойства отображения $g(n)$. Прежде всего выясним, как меняется гауссово отображение при движении поверхности M^2 в S^3 . Пусть $X(u, v) = X^i(u, v)$, $i = 0, 1, 2, 3$, – уравнения поверхности. Тогда если матрица $C \in SO(4)$, то преобразованная поверхность $Y(u, v) = CX(u, v)$ может быть представлена в кватернионной записи в виде $Y = q_1 X q_2$, где q_1 и q_2 – некоторые кватернионы, норма которых равна единице [7, с. 95]. При этом, поскольку $Y_u = CX_u$, $Y_v = CX_v$, $n(Y) = Cn(X)$, то $n(Y) = q_1 n(X) q_2$. Тогда для гауссова отображения поверхности $Y(u, v)$ имеем

$$\begin{aligned} g(n(Y)) &= dL_{Y^{-1}} n(Y) = \varphi(Y^{-1}) \varphi(n(Y)) = \varphi((q_1 X q_2)^{-1}) \varphi(q_1 n(X) q_2) \\ &= \varphi(q_2^{-1}) \varphi(X^{-1}) \varphi(n(X)) \varphi(q_2) = \varphi(q_2^{-1}) g(X) \varphi(q_2). \end{aligned} \quad (20)$$

В частности, если поверхность $Y(u, v)$ получается из $X(u, v)$ левым сдвигом $Y = q_1 X$, то их гауссовы отображения совпадают: $g(n(X)) = g(n(Y))$.

Выясним теперь, когда отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ будет конформным. Напомним, что классическое гауссово отображение поверхности в $\mathbb{R}^3$ является конформным, если поверхность омбилическая или минимальная. То же справедливо и для грассманова отображения $n: M^2 \rightarrow S^3$ поверхности в S^3 [6, предложение 10.1].

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть поверхность M^2 погружена в S^3 и ее первая и вторая фундаментальные формы имеют вид (4) и (5). Тогда метрическая форма S^2 , индуцированная гауссовым отображением $g(n)$, равна

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= (e^{-2\omega}(L^2 + M^2) + e^{2\omega} - 2M) du^2 + 2(e^{-2\omega} M(L + N) + L - N) du dv \\ &\quad + (e^{-2\omega}(N^2 + M^2) + e^{2\omega} + 2M) dv^2. \end{aligned} \quad (21)$$

б) Гауссово отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ конформно тогда и только тогда, когда поверхность M^2 вполне омбилическая в S^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метрические коэффициенты

$$g_{11} = \left| \frac{\partial g(n)}{\partial u} \right|^2, \quad g_{22} = \left| \frac{\partial g(n)}{\partial v} \right|^2$$

были найдены при вычислении плотности распределения отображения $g(n)$ и определяются формулами (14) и (15). Вычислим средний коэффициент g_{12} :

$$\begin{aligned} g_{12} &= \left\langle \frac{\partial g(n)}{\partial u}, \frac{\partial g(n)}{\partial v} \right\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 (-e^{-2\omega} (L\langle X_u, J_i X \rangle + M\langle X_v, J_i X \rangle) + \langle n, J_i X_u \rangle), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^3 (-e^{-2\omega} (M\langle X_u, J_i X \rangle + N\langle X_v, J_i X \rangle) + \langle n, J_i X_v \rangle) \right) \\ &= e^{-4\omega} \left(LM \sum_{i=1}^3 \langle X_u, J_i X \rangle^2 + M^2 \langle X_u, J_i X \rangle \langle X, J_i X \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 NM \langle X_v, J_i X \rangle^2 + LN \langle X_v, J_i X \rangle \langle X_u, J_i X \rangle \right) \\ &\quad - e^{-2\omega} \left(\sum M \langle X_u, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle + N \langle X_v, J_i X \rangle \langle n, J_i X_u \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum L \langle X_u, J_i X \rangle \langle n, J_i X_v \rangle + M \langle X_v, J_i X \rangle \langle n, J_i X_v \rangle \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \langle n, J_i X_u \rangle \langle n, J_i X_v \rangle. \end{aligned}$$

С помощью уравнений (12), (13) так же, как и при доказательстве теоремы 1, после упрощений получим, что

$$g_{12} = e^{-2\omega} M(L + N) + L - N.$$

Для доказательства утверждения b) теоремы надо сравнить метрики поверхности (5) и ее гауссова образа (21). Тогда получается система из двух уравнений: $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$, которые имеют вид

$$(L^2 - N^2)e^{2\omega} = 4M, \quad M(L + N)e^{-2\omega} + L - N = 0.$$

Анализ системы показывает, что обязательно $M = 0$; тогда получается, что $L = N$, т.е. поверхность вполне омбилическая.

СЛЕДСТВИЕ 1. Поверхность M^2 имеет вырожденный гауссов образ тогда и только тогда, когда ее внутренняя кривизна

$$K_{\text{int}} = -\frac{\Delta\omega}{e^{2\omega}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гауссов образ $g(M^2)$ будет вырожден тогда и только тогда, когда дискриминант D метрики (21) равен нулю. Поскольку вычисления дают

$$\begin{aligned} D &= ((L^2 + M^2)e^{-2\omega} + e^{2\omega} - 2M)((M^2 + N^2)e^{-2\omega} + e^{2\omega} + 2M) \\ &\quad - (e^{-2\omega}M(L + N) + L - N)^2 \\ &= (e^{-2\omega}(LN - M^2) + e^{2\omega})^2 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

условие вырождения можно записать в виде

$$e^{4\omega} + LN - M^2 = 0.$$

Из уравнения Гаусса $K_{\text{int}} = 1 + K_{\text{ext}}$, которое для поверхности с фундаментальными формами (5), (6) имеет вид

$$-\frac{\Delta\omega}{e^{2\omega}} = 1 + \frac{LN - M^2}{e^{4\omega}},$$

и вытекает утверждение следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Если внешняя кривизна поверхности находится в пределах $-2 \leq K_{\text{ext}} \leq 0$, то для любой области $D \subset M^2$ выполнено неравенство

$$\text{Area}(g(D)) < \text{Area}(D).$$

2) Если внешняя кривизна поверхности лежит в пределах $K_{\text{ext}} < -2$ или $K_{\text{ext}} > 0$, то $\text{Area}(g(D)) > \text{Area}(D)$.

3) Если $K_{\text{ext}} = 0$, то $\text{Area}(g(D)) = \text{Area}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (22) следует, что элемент площади на сфере в метрике (21) имеет вид

$$d\sigma_g = |e^{-2\omega}(LN - M^2) + e^{2\omega}| du dv = |K_{\text{ext}} + 1|e^{2\omega} du dv,$$

а элемент площади метрики (5) есть $e^{2\omega} du dv$, откуда и следует утверждение леммы.

4. Как известно, Р. Оссерман доказал, что гауссово изображение минимальной неплюской поверхности в $\mathbb{R}^3$ образует всюду плотное множество на сфере S^2 , а позднее Фуджимото установил [8], что оно может выпускать не более четырех различных точек. В связи с этим интересно изучить аналогичный вопрос для отображения $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ в случае, когда M^2 есть поверхность постоянной средней кривизны в S^3 . В дальнейшем изложении под M^2 мы понимаем исключительно поверхность постоянной средней кривизны H . В этом случае [9, с. 7], поскольку функция $L - N - 2iM$ является голоморфной от переменной $z = u + iv$, вторая фундаментальная форма поверхности может быть приведена к виду (6), где

$$L = 2He^{2\omega} + C, \quad M = 0, \quad N = 2He^{2\omega} - C,$$

и C — некоторая постоянная.

ЛЕММА. Отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ регулярной поверхности постоянной средней кривизны $M^2 \subset S^3$ не может быть постоянным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что регулярная поверхность $X(u, v)$ в S^3 имеет постоянное гауссово отображение $g(n) \equiv (c^1, c^2, c^3)$. Без ограничения общности мы можем считать, что $(c^1, c^2, c^3) = (1, 0, 0)$, поскольку, как следует из формулы (20), существует движение $C \in SO(4)$ такое, что $g(n(CX)) = (1, 0, 0)$. Так как векторы X, J_1X, J_2X, J_3X образуют ортонормированный базис и $g^i = \langle J_iX, n \rangle$, то

$$n = \sum_{i=1}^3 \langle J_iX, n \rangle J_iX = J_1X. \quad (23)$$

Умножая дериационную формулу для нормали $n_u = -Le^{-2\omega}X_u$ скалярно на вектор X_u , получим $-L = \langle n_u, X_u \rangle = \langle J_1X_u, X_u \rangle = 0$. Аналогично из дериационной формулы для n_v следует, что $N = 0$. Следовательно, вторая фундаментальная форма (6) равна нулю и поверхность является большой сферой, вектор нормали к которой постоянен $n = (n_0^1, n_0^2, n_0^3)$. Тогда из (23) следует, что $X(u, v) = -J_1n = \text{const}$, что противоречит предположению о регулярности поверхности $X(u, v)$.

Как известно (см., например, [10, теорема 1]), гармоническое отображение из компактного многообразия в открытую полусферу всегда является постоянным. Поэтому из леммы и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Гауссово отображение $g(n): M^2 \rightarrow S^2$ всякой компактной поверхности постоянной средней кривизны в S^3 пересекается со всякой большой окружностью $\Sigma \subset S^2$.*

ТЕОРЕМА 3. *Гауссов образ $g(n(M^2))$ поверхности M^2 постоянной средней кривизны в S^3 вырожден тогда и только тогда, когда M^2 есть поверхность вращения, изометричная поверхности*

$$X(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v),$$

где $a^2 + b^2 = 1$. При этом $g(M^2)$ представляет собой большую окружность на S^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M^2 – поверхность постоянной средней кривизны H в S^3 с вырожденным гауссовым образом. Тогда дискриминант D индуцированной сферической метрики (21) должен равняться нулю и по формуле (22) имеем

$$D = ((4H^2 + 1)e^{2\omega} - C^2e^{-2\omega})^2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что $e^{2\omega} = C(4H^2 + 1)^{-1/2} = \text{const}$. Тогда дериационные формулы (7) приобретают вид

$$\begin{aligned} X_{uu} &= C(2H(4H^2 + 1)^{-1/2} + 1)n - C(4H^2 + 1)^{-1/2}X, \\ X_{uv} &= 0, \\ X_{vv} &= C(2H(4H^2 + 1)^{-1/2} - 1)n - C(4H^2 + 1)^{-1/2}X, \end{aligned} \quad (24)$$

Из второй из формул (24) следует, что

$$X(u, v) = \overline{\Phi}(u) + \overline{\Psi}(v),$$

где $\overline{\Phi}(u) = (\Phi^i(u))$, $\overline{\Psi} = (\Psi^i(v))$, $i = 1, 2, 3, 4$, соответственно функции от переменных u и v . Умножая первое из уравнений (22) на $(1 - 2H(4H^2 + 1)^{-1/2})$, а третье на $(1 + 2H(4H^2 + 1)^{-1/2})$ и складывая их, получим

$$((4H^2 + 1)^{1/2} - 2H)X_{uu} + ((4H^2 + 1)^{1/2} + 2H)X_{vv} + 2C^2X = 0.$$

Разделяя переменные u и v , приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для $\overline{\Phi}(u)$ и $\overline{\Psi}(v)$:

$$\begin{aligned} ((4H^2 + 1)^{1/2} - 2H) \frac{d^2 \overline{\Phi}(u)}{du^2} + 2C^2 \overline{\Phi}(u) &= \overline{c}_0, \\ ((4H^2 + 1)^{1/2} + 2H) \frac{d^2 \overline{\Psi}(v)}{dv^2} + 2C^2 \overline{\Psi}(v) &= -\overline{c}_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\overline{c}_0 \in \mathbb{R}^4$ – некоторый постоянный вектор. Обозначим постоянные

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}C}{(4H^2 + 1)^{1/2} - 2H}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2}C}{(4H^2 + 1)^{1/2} + 2H}$$

и запишем общие решения уравнений (23):

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(u) &= \overline{a}_1 \cos k_1 u + \overline{a}_2 \sin k_1 u + \frac{\overline{c}_0}{k_1^2}, \\ \overline{\Psi}(v) &= \overline{a}_3 \cos k_2 v + \overline{a}_4 \sin k_2 v - \frac{\overline{c}_0}{k_2^2}, \end{aligned}$$

где $\overline{a}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, – некоторые постоянные векторы из $\mathbb{R}^4$. Следовательно, искомая поверхность имеет уравнение

$$X(u, v) = \overline{a}_1 \cos k_2 u + \overline{a}_2 \sin k_1 u + \overline{a}_3 \cos k_2 v + \overline{a}_4 \sin k_2 v.$$

Найдем постоянные векторы $\overline{a}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Поскольку

$$\begin{aligned} |X_u|^2 &= |\overline{\Phi}_u|^2 = k_1^2(|\overline{a}_1|^2 - |\overline{a}_2|^2) \cos 2k_1 u + k_1^2 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle \sin 2k_1 u + k_1^2 |\overline{a}_2|^2 \\ &= \frac{C}{(4H^2 + 1)^{1/2}} = \text{const}, \end{aligned}$$

то $\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle = 0$ и

$$|\overline{a}_1|^2 = |\overline{a}_2|^2 = \frac{C}{(4H^2 + 1)^{1/2} k_1^2}.$$

Аналогично из того, что

$$|X_v|^2 = |\overline{\Psi}_v|^2 = \frac{C}{(4H^2 + 1)^{1/2}}$$

следует, что $\langle \overline{a}_3, \overline{a}_4 \rangle = 0$ и

$$|\overline{a}_3|^2 = |\overline{a}_4|^2 = \frac{C}{(4H^2 + 1)^{1/2} k_2^2}.$$

Условие $\langle X_u, X_v \rangle = \langle \overline{\Phi}_u, \overline{\Psi}_v \rangle = 0$ дает, что $\langle \overline{a}_i, \overline{a}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Далее из условия $|X(u, v)|^2 = |\overline{a}_1|^2 + |\overline{a}_3|^2 = 1$ можно определить постоянную $C = 1$. Наконец, выбрав базис из векторов $(\overline{a}_i / |\overline{a}_i|)$, $i = 1, 2, 3, 4$, и вводя новые переменные $u_1 = k_1 u$, $v_1 = k_2 v$, получим именно ту параметризацию поверхности, которая указана в формулировке теоремы.

Доказательство обратного утверждения составляет содержание примера 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ruh E. A., Vilms J. The tension field of the Gauss map // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 199. P. 569–573.
- [2] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46. С. 41–83.
- [3] Liu Xiabo. Rigidity of the Gauss map in compact Lie group // Duke Math. J. 1995. V. 77. № 2. P. 447–480.
- [4] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967.
- [5] Urakawa H. Calculus of Variations and Harmonic Maps. Transl. Math. Monographs. V. 132. Providence: Amer. Math. Soc., 1993.
- [6] Lawson H. B. Complete minimal surfaces in S^3 // Ann. Math. 1970. V. 92. P. 335–374.
- [7] Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
- [8] Fujimoto H. Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces // J. Diff. Geom. 1989. V. 29. P. 245–262.
- [9] Wente H. C. Constant Mean Curvature Immersions of Enneper Type. Memoirs of Amer. Math. Soc.. V. 478. Providence: Amer. Math. Soc., 1992.
- [10] Solomon B. Harmonic maps to spheres // J. Diff. Geom. 1985. V. 21. № 2. P. 151–162.

Харьковский национальный университет им. В. Каразина, Украина
E-mail: masaltsev@univer.kharkov.ua

Поступило
22.06.2001