Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Обратная задача теории интерполяции операторов, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 323–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:10:12

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОПЕРАТОРОВ

Е. И. Бережной

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы о представимости интерполяционных пространств, связанных с линейными операторами, идущие, по-существу, от следующей задачи. Пусть с помощью конструкции F по паре банаховых пространств получено третье пространство $F(A_0, A_1)$. Можно ли с помощью конструкции F получить пространство $F(A_0, A_1)$ из некоторых других пар пространств, обладающих некоторыми дополнительными свойствами? Конкретным примером данной задачи может рассматриваться следующая классическая лемма Шура, которая в нужной нам редакции выглядит так (тест Шура) [1].

Пусть $Kx(t) = \int k(t, s)x(s) ds$, где $k(t, s) \geq 0$ и $1 < p < \infty$. Оператор K является ограниченным в пространстве Лебега L^p тогда и только тогда, когда найдется положительная функция w такая, что оператор K ограничен как оператор из $L^\infty(w^{-q})$ в $L^\infty(w^{-q})$ и из $L^1(w^p)$ в $L^1(w^p)$ ($1/p + 1/q = 1$). Здесь $L^p(w) = \{x : \|x\|_{L^p(w)} = (\int |w(t)x(t)|^p dt)^{1/p} < \infty\}$.

Таким же образом можно переформулировать знаменитую теорему П. Джона [2] о факторизации весов, удовлетворяющих A_p -условию Макенхаупта [3].

Настоящая работа как раз и посвящена обсуждению этой задачи для случая, когда конструкция $F(A_0, A_1)$ есть функтор вещественной интерполяции. А именно, здесь приводятся различные теоремы о необходимых условиях совпадения пространств $F(A_0, A_1) = F(A_0, A_2)$, если A_0, A_1, A_2 являются идеальными пространствами. Наиболее полный ответ удалось получить для согласованных интерполяционных пар (их определение см. ниже). Следствием доказываемых теорем и вводимых понятий является тот факт, что известная теорема Марцинкевича об интерполяции операторов слабого типа не может быть существенно усилена. Отметим, что в теории интерполяции линейных операторов рассматривается обычно другая задача: фиксируют интерполяционную пару (A_0, A_1) и пытаются описать все возможные интерполяционные пространства, которые можно получить из этой пары. Новая постановка задачи, предлагаемая в данной

работе, позволяет с другой позиции посмотреть на эту классическую задачу.

Приведем некоторые сведения из теории интерполяции линейных операторов [4]–[6] и теории идеальных пространств функций [6]–[8].

Пусть $S(\mu) = S(V, \Sigma, \mu)$ – пространство измеримых функций $x: V \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что банахово пространство X называется идеальным, если из выполнения п.в. неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$, и $x \in S(\mu)$, $y \in X$ следует, что $x \in X$ и неравенство $\|x\| \leq \|y\|$. (Символом $\|x\|$ обозначается норма элемента x в пространстве X , $\chi(D)$ – характеристическая функция множества D .) Для $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции $f: \lambda(f, \gamma) = \mu\{t: |f(t)| > \gamma\}$, а через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке $f^*(t) = \inf\{s: \lambda(f, s) < t\}$. Идеальное пространство X называется симметричным, если для $x, y \in X$ из выполнения при всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ неравенства $\lambda(x, \gamma) \leq \lambda(y, \gamma)$ следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. Для симметричного пространства X с помощью равенства $\psi(X, t) = \{\|\chi(D)\|: |D| = t\}$ определена фундаментальная функция. Эта функция не убывает, а $t^{-1}\psi(X, t)$ не возрастает. Теория симметричных пространств функций и последовательностей подробно описана в [6], [8]. Классическими примерами симметричных пространств являются пространства Лебега функций L^p ($p \geq 1$), пространства Лебега последовательностей ℓ^p ($p \geq 1$), пространства Орлича функций и последовательностей L_h, ℓ_h , построенных по N -функции $h(t)$, пространства Лоренца и Марцинкевича функций и последовательностей $\Lambda(\psi)$, $M(\psi)$, построенные по вогнутой функции ψ . В качестве примеров идеальных пространств можно рассмотреть те же пространства с весом.

Напомним некоторые обозначения и факты из теории интерполяции линейных операторов, связанных с вещественным методом интерполяции. Пусть A – некоторое топологическое линейное пространство. Пара (X_0, X_1) банаховых пространств, непрерывно вложенных в A , называется интерполяционной парой. Для интерполяционной пары (X_0, X_1) и $p \geq 1$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$ с помощью формулы

$$K_p(2^i, x; X_0, X_1) = \inf\{(\|x_0\|_{X_0}^p + (2^i\|x_1\|_{X_1})^p)^{1/p}: x = x_0 + x_1\}$$

определен K_p -функционал. Эти функционалы являются нормой на сумме $X_0 + X_1$, и при разных p эти функционалы эквивалентны. Для интерполяционной пары (X_0, X_1) наряду с K_p -функционалом, определенным на $X_0 + X_1$, на $X_0 \cap X_1$ определен J -функционал

$$J(2^i, x; X_0, X_1) = \max\{\|x\|_{X_0}, 2^i\|x\|_{X_1}\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Пусть Φ – идеальное пространство последовательностей, $\{e^i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ – стандартный базис в пространстве последовательностей. Интерполяционное

пространство $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма

$$\|x \mid (X_0, X_1)_{K, \Phi}\| = \left\| \sum e^i K(2^i, x; X_0, X_1) \mid \Phi \right\|.$$

Хорошо известно, что пространство $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ нетривиально тогда и только тогда, когда $\min(1, 2^i) \in \Phi$. Интерполяционное пространство $(X_0, X_1)_{J, \Phi}$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для каждого из которых существует разложение $x = \sum x_i$ ($x_i \in X_0 \cap X_1$, ряд сходится в $X_0 + X_1$) такое, что

$$c = \left\| \sum e^i J(2^i, x_i; X_0, X_1) \mid \Phi \right\| < \infty. \quad (1)$$

Точная нижняя грань в (1) по всем разложениям x , является нормой на $(X_0, X_1)_{J, \Phi}$. Известно, что если в Φ ограничен оператор

$$\left\{ T \left(\sum a_i e^i \right) \right\}_j = \sum_{-\infty}^j a_i + 2^j \sum_{j+1}^{\infty} a_i 2^{-i}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

то с точностью до эквивалентных норм верно равенство $(X_0, X_1)_{J, \Phi} = (X_0, X_1)_{K, \Phi}$. В теории интерполяции наиболее употребим случай $\Phi = \ell^{\eta, q}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \eta \leq 1$), где $\ell^{\eta, q}$ состоит из тех последовательностей $\{a_i\}_{-\infty}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|\{a_i\} \mid \ell^{\eta, q}\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_i 2^{-i\eta}|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Из неравенства Харди [9] следует, что в пространстве $\ell^{\eta, q}$ ($0 < \eta < 1$) ограничен оператор T , и поэтому пространства $(X_0, X_1)_{J, \Phi}$ или $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ обычно обозначают через $(X_0, X_1)_{\eta, q}$.

Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара идеальных пространств. Наряду с обычным функционалом $K_p(2^i, x; X_0, X_1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) можно рассмотреть определенный на $X_0 + X_1$ следующий функционал

$$\begin{aligned} & K_{pd}(2^i, x; X_0, X_1) \\ &= \inf \{ (\|x_0 \mid X_0\|^p + (2^i \|x_1 \mid X_1\|)^p)^{1/p} : x = x_0 + x_1, x_0 dx_1 \} \end{aligned}$$

(символ $x_0 dx_1$ означает, что элементы x_0 и x_1 дизъюнкты, т.е. носители их не пересекаются).

Нам потребуется несколько предварительных утверждений.

ЛЕММА 1 [10], [11]. Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара идеальных пространств. Тогда для любого $x \in X_0 + X_1$ и $i \in \mathbb{Z}$ верны неравенства

$$K_p(2^i, x; X_0, X_1) \leq K_{pd}(2^i, x; X_0, X_1) \leq 2K_p(2^i, x; X_0, X_1).$$

Из этой леммы следует, что пространства вещественного метода, построенного с помощью обычного $K_p(2^i, x; X_0, X_1)$ функционала и функционала $K_{pd}(2^i, x; X_0, X_1)$, совпадают.

ЛЕММА 2. Пусть X_0, X_1, X_2 три идеальных пространства в $S(\mu)$. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X_0 \cap X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство

$$\sup_D \frac{\|x\chi(D) \mid X_2\|}{\|x\chi(D) \mid X_1\|} \leq 2^{-n}. \quad (3)$$

Тогда верно неравенство

$$K_{pd}(2^i, x; X_0, X_2) \leq K_{pd}(2^{i-n}, x; X_0, X_1). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой пары дизъюнктивных множеств D_0 и D_1 с условием $\text{supp } x = D_0 \cup D_1$ из неравенства

$$K_{pd}(2^i, x; X_0, X_1) \leq \{\|x\chi(D_0) \mid X_0\|^p + (2^i\|x\chi(D_1) \mid X_2\|)^p\}^{1/p}$$

и условия (3) получим неравенство

$$\begin{aligned} K_{pd}(2^i, x; X_0, X_2) &\leq \{\|x\chi(D_0) \mid X_0\|^p + (2^i\|x\chi(D_1) \mid X_2\|)^p\}^{1/p} \\ &\leq \{\|x\chi(D_0) \mid X_0\|^p + (2^{i-n}\|x\chi(D_1) \mid X_1\|)^p\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к нижней грани по D_0 и D_1 , и пользуясь леммой 1, получим (4). Лемма доказана.

Обозначим через σ_n оператор сдвига

$$\sigma_n \{a_i\}_{-\infty}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^i a_{i-n}.$$

Теперь мы можем сформулировать первую теорему о представлении для пространств вещественного метода интерполяции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X_0, X_1, X_2 три идеальных пространства в $S(\mu)$. Пусть выполнено соотношение

$$\inf_{x \in X_0 \cap X_1 \cap X_2} \sup_D \frac{\|x\chi(D) \mid X_2\|}{\|x\chi(D) \mid X_1\|} = 0. \quad (5)$$

Пусть Φ – идеальное пространство на $\mathbb{Z}$, содержащее функцию $\min(1, 2^i)$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n \mid \Phi \rightarrow \Phi\| = 0 \quad (6)$$

($\|\sigma_n \mid \Phi \rightarrow \Phi\|$ – норма оператора σ_n из Φ в Φ).

Тогда пространства $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ и $(X_0, X_2)_{K, \Phi}$ имеют неэквивалентные нормы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и выберем согласно (5) элемент $x_n \in X_0 \cap X_1 \cap X_2$ так, чтобы выполнялось (3). Сразу же отметим, что так как $\min(1, 2^i) \in \Phi$, то $x_n \in (X_0, X_1)_{K, \Phi}$ и $x_n \in (X_0, X_2)_{K, \Phi}$. Применяя лемму 2 к x_n , получим неравенство

$$\begin{aligned} \|K_{1d}(2^i, x_n; X_0, X_2) \mid \Phi\| &\leq \|K_{1d}(2^{i-n}, x_n; X_0, X_1) \mid \Phi\| \\ &\leq \|\sigma_n K_{1d}(2^i, x_n; X_0, X_1) \mid \Phi\| \\ &\leq \|\sigma_n \mid \Phi \rightarrow \Phi\| \cdot \|K_{1d}(2^i, x_n; X_0, X_1) \mid \Phi\| \\ &\leq 2\|\sigma_n \mid \Phi \rightarrow \Phi\| \cdot \|x_n \mid (X_0, X_1)_{K, \Phi}\|. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (6), нормы x_n в пространствах $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ и $(X_0, X_2)_{K, \Phi}$ неэквивалентны. Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему примером. Пусть $\Phi = \ell^{\eta, q}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \eta \leq 1$). Тогда при $0 < \eta < 1$ для пространства $\ell^{\eta, q}$ верно равенство $\|\sigma_n \mid \ell^{\eta, q} \rightarrow \ell^{\eta, q}\| = 2^{-n\eta}$ и, следовательно, соотношение (6) выполнено. Поэтому, если $L^{\infty, \text{loc}} \subset X_0$, то пространства $(X_0, L^{p_0})_{\eta, q}$ и $(X_0, L^{p_1})_{\eta, q}$ при $p_0 \neq p_1$ неизоморфны. Это следует из того, что для функции $\chi(D)$ верно равенство

$$\|\chi(D) \mid L^p\| = |D|^{1/p}.$$

Последнее равенство показывает, что вместо пространств L^{p_0} и L^{p_1} можно поставить любую пару Y_0, Y_1 симметричных пространств с разным поведением фундаментальных функций в нуле, и все равно пространства $(X_0, Y_0)_{\eta, q}$ и $(X_0, Y_1)_{\eta, q}$ будут неизоморфны.

Следующая теорема о представлении значительно тоньше теоремы 1, но относится к значительно более узкому классу пространств. Одним из следствий обсуждаемой теоремы будет тот факт, что известную теорему Марцинкевича об интерполяции линейных операторов слабого типа нельзя существенно улучшить.

Нам понадобятся некоторые предварительные построения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что *интерполяционная пара идеальных пространств согласована*, если для любого $x \in X_0 + X_1$ найдутся множества $\cdots \subset D(i-1) \subset D(i) \subset D(i+1) \subset \cdots \subset V$ такие, что выполняются условия

$$2K_{\infty,d}(2^i, x; X_0, X_1) \geq \max\{\|x\chi(D(i))\|_{X_0}, 2^i\|x\chi(V \setminus D(i))\|_{X_1}\}.$$

Неформально говоря, согласованность пары (X_0, X_1) означает, что при вычислении $K_{\infty,d}(2^i, x; X_0, X_1)$ при различных i можно считать, что соответствующие множества, на которых почти реализуется $K_{\infty,d}$ -функционал, всегда вложены одно в другое. Сейчас мы приведем основной пример согласованной пары.

ЛЕММА 3. *Пара (L_v^∞, X) согласована.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы $x \in X + L_v^\infty$ и $i \in \mathbb{Z}$. Обозначим $a(i) = K_{\infty,d}(2^i, x; L_v^\infty, X)$ и положим $D(i) = \{s : |x(s)| \leq a(i)/v(s)\}$. Тогда

$$a(i) = \max\{\|x\chi(D(i))\|_{L_v^\infty}, 2^i\|x\chi(V \setminus D(i))\|_X\}.$$

Пусть теперь $i > j$. Очевидно, что $a(i) \geq a(j)$. Поэтому $D(j) \subset D(i)$. Лемма доказана.

Наряду с пространствами $(X_0, X_1)_{K,\Phi}$ и $(X_0, X_1)_{J,\Phi}$ для интерполяционной пары идеальных пространств можно ввести следующий класс. Пусть Φ – идеальное пространство на $\mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара идеальных пространств. Класс $(X_0, X_1)_{J,\Phi}^d$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для каждого из которых найдется разбиение $V = \bigcup U(i)$ с $U(i) \cap U(j) = \emptyset$ для $i \neq j$, для которого

$$C = \left\| \sum e^i J(2^i, x\chi(U(i)), X_0, X_1) \right\|_{\Phi} < \infty. \quad (7)$$

Нижнюю грань чисел C по всем разбиениям V в (7) будем обозначать так

$$\inf\{C : V = \bigcup U(i)\} = \|x\|_{(X_0, X_1)_{J,\Phi}^d}. \quad (8)$$

Класс $(X_0, X_1)_{J,\Phi}^d$ не всегда является линейным пространством и, следовательно, функционал в (8) не всегда является нормой, но он обладает свойством однородности. Следующая лемма дает многочисленные примеры, когда класс $(X_0, X_1)_{J,\Phi}^d$ совпадает с пространством $(X_0, X_1)_{J,\Phi}$.

ЛЕММА 4. Пусть интерполяционная пара идеальных пространств (X_0, X_1) согласована. Пусть Φ – идеальное пространство на $\mathbb{Z}$, в котором ограничен оператор T из (2). Тогда пространство $(X_0, X_1)_{J, \Phi}$ и класс $(X_0, X_1)_{J, \Phi}^d$ совпадают по запасу элементов и верны неравенства

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}^d} \leq c \|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}}, \quad (9)$$

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}} \leq c \|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}^d}, \quad (10)$$

с константой, не зависящей от $x \in (X_0, X_1)_{J, \Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение

$$(X_0, X_1)_{J, \Phi}^d \subset (X_0, X_1)_{J, \Phi}$$

и неравенство (10) очевидны.

Из того, что в Φ ограничен оператор T согласно [4] следует, что нормы в $(X_0, X_1)_{J, \Phi}$ и в $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ эквивалентны. Для окончания доказательства леммы достаточно проверить вложение

$$(X_0, X_1)_{K, \Phi} \subset (X_0, X_1)_{J, \Phi}^d$$

с соответствующим неравенством для норм. Его мы и будем проверять. Пусть $x \in (X_0, X_1)_{K, \Phi}$. Для каждого i выберем множество $U(i)$ так, чтобы

$$2K_{\infty, d}(2^i, x; X_0, X_1) \geq \max\{\|x\chi(U(i))\|_{X_0}, 2^i\|x\chi(V \setminus U(i))\|_{X_1}\}.$$

Из согласованности пары (X_0, X_1) следует, что можно считать верным при всех i включение $U(i) \subset U(i+1)$. Положим

$$x_i = x\chi(U(i+1)) - x\chi(U(i)) = x\chi(U(i+1) \setminus U(i)).$$

Тогда из того, что в Φ ограничен оператор T следует, что $K_{\infty, d}(2^i, x; X_0, X_1) \min(1, 2^{-i}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ или $i \rightarrow -\infty$. Поэтому справедливо равенство $x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i$ (ряд сходится в $X_0 + X_1$), а неравенство (9) доказывается ниже, как в теореме эквивалентности [4, теорема 3.11.3]. Теорема доказана.

Применяя лемму 3, придем к следующему факту.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в Φ ограничен оператор T . Тогда по запасу элементов верно равенство

$$(L_v^\infty, X)_{J, \Phi}^d = (L_v^\infty, X)_{J, \Phi},$$

а функционалы $\|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}^d}$ и $\|x\|_{(X_0, X_1)_{J, \Phi}}$ эквивалентны.

Теперь у нас все готово для формулировки следующей теоремы о представлении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для идеальных пространств $X, Y \subset S(\mu)$ с точностью до эквивалентных норм верно равенство

$$(L_v^\infty, X)_{J, \Phi} = (L_v^\infty, Y)_{J, \Phi},$$

причем для идеального пространства Φ выполнены следующие ограничения:

в Φ ограничен оператор T ;

существует константа c_0 такая, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ верно неравенство

$$\inf_i \left\{ \left\| \sum_{-i}^{\infty} 2^j \alpha_j e^j \mid \Phi \right\| : \sum_{-i}^{\infty} \alpha_j \geq 2^i, \alpha_j \geq 0 \right\} \geq c_0 \|e^{-i} \mid \Phi\|; \quad (11)$$

выполнено соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_i \frac{\|e^i \mid \Phi\|}{\|e^{i+k} \mid \Phi\|} = \infty; \quad (12)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sup_i \frac{\|e^i \mid \Phi\|}{\|e^{i+k} \mid \Phi\|} < \infty. \quad (13)$$

Тогда для любого $D \subset V$ выполнены неравенства

$$c^{-1} \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid X \right\| \leq \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid Y \right\| \leq c \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid X \right\|,$$

с константой, не зависящей от $D \subset V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) следует, что для некоторой константы c_1 при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|e^i | \Phi\| \geq c_1 \|e^{i+k} | \Phi\|. \quad (14)$$

Положим $c_2 = \min(c_0, c_1)$,

$$a = \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} | X \right\|, \quad i(a) = [\log_2 a], \quad b = \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} | Y \right\|, \quad i(b) = [\log_2 b]. \quad (15)$$

Убедимся, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c_2 \|e^{-i(a)} | \Phi\| &\leq \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} | (L_v^\infty, X)_{J, \Phi}^d \right\| \leq 2 \|e^{-i(a)} | \Phi\|, \\ c_2 \|e^{-i(b)} | \Phi\| &\leq \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} | (L_v^\infty, Y)_{J, \Phi}^d \right\| \leq 2 \|e^{-i(b)} | \Phi\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Докажем, например, первое неравенство в (16). Правое неравенство следует из того, что можно положить $D(-i(a)) = D$, $D(i) = \emptyset$ ($i \neq -i(a)$). Тогда $J(2^{-i(a)}, \chi(D)/v(t), L_v^\infty, X) \leq 2$. Докажем левое неравенство. Пусть $D = \bigcup D(i)$. Если найдется $i \leq -i(a)$, для которого $D(i) \neq \emptyset$, то согласно (14) будем иметь

$$\left\| \sum e^i J\left(2^i, \frac{\chi(D(i))}{v(t)}, L_v^\infty, X\right) | \Phi \right\| \geq \|e^i | \Phi\| \geq c_1 \|e^{-i(a)} | \Phi\|.$$

Если же для всех $i \leq -i(a)$ выполнено соотношение $D(i) = \emptyset$, то из неравенства $J(2^i, x, L_v^\infty, X) \geq 2^i \|x | X\|$ следует соотношение

$$\begin{aligned} \left\| \sum e^i J\left(2^i, \frac{\chi(D(i))}{v(t)}, L_v^\infty, X\right) | \Phi \right\| \\ \geq \left\| \sum_{i > -i(a)} e^i 2^i \left\| \frac{\chi(D(i))}{v(t)} | X \right\| | \Phi \right\|. \end{aligned}$$

Из (15) получим

$$\sum_{i > -i(a)} \left\| \frac{\chi(D(i))}{v(t)} | X \right\| \geq \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} | X \right\| \geq 2^{i(a)}.$$

Поэтому из условия (11) следует неравенство

$$\left\| \sum_{i > -i(a)} e^i 2^i \left\| \frac{\chi(D(i))}{v(t)} | X \right\| | \Phi \right\| \geq c_0 \|e^{-i(a)} | \Phi\|.$$

Таким образом и левое неравенство в (16) доказано. Доказательство второго неравенства в (16) проводится аналогично.

Закончить доказательство теоремы можно следующим образом. Из леммы 3 следует, что пары (L_v^∞, X) , (L_v^∞, Y) согласованы. Поэтому из следствия к лемме 4 и (16) следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid (L_v^\infty, X)_{J, \Phi}^d \right\| &\cong \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid (L_v^\infty, X)_{J, \Phi} \right\| \cong \|e^{-i(a)} \mid \Phi\|, \\ \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid (L_v^\infty, Y)_{J, \Phi}^d \right\| &\cong \left\| \frac{\chi(D)}{v(t)} \mid (L_v^\infty, Y)_{J, \Phi} \right\| \cong \|e^{-i(b)} \mid \Phi\|. \end{aligned}$$

Применяя (12) получим, что $|i(a) - i(b)| \leq \text{const}$. Поэтому из (13) и (15) следует, что $\|\chi(D)/v(t) \mid X\| \cong \|\chi(D)/v(t) \mid Y\|$.

Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему 2 следующим примером. Для $0 < \eta < 1$ и $q \geq 1$ из неравенства Харди [9] следует, что в $\ell^{\eta, q}$ ограничен оператор T и, следовательно, для применимости теоремы 2 достаточно проверить выполнение условий (11)–(13). Из неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} 2^i &= \sum_{-i}^{\infty} \lambda_j = \sum_{-i}^{\infty} \lambda_j 2^j 2^{-j} 2^{-j\eta} 2^{j\eta} \\ &\leq \left(\sum_{-i}^{\infty} |\lambda_j 2^j 2^{-j\eta}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{-i}^{\infty} 2^{j(\eta-1)p} \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \end{aligned}$$

и очевидного равенства

$$\sum_{-i}^{\infty} 2^{j(\eta-1)p} = \frac{2^{-i(\eta-1)p}}{1 - 2^{(\eta-1)p}}$$

следует, что при $0 < \eta < 1$ условие (11) выполнено с константой $c_0 = (1 - 2^{(\eta-1)p})^{1/p}$. Легко проверить также, что выполнено (12) и (13).

Как обычно, через $L^{p,r}$ обозначим пространство Лоренца:

$$\|f \mid L^{p,r}\| = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^r t^{-1} dt \right)^{1/r} & \text{при } 1 \leq r < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{при } r = \infty. \end{cases}$$

Сразу же отметим, что для фундаментальных функций пространств Лоренца $L^{p,r}$ верно равенство $\psi(L^{p,r}, t) = (pr^{-1}t)^{1/r}$. Кроме того, $L^{p,p} = L^p$,

а пространство $L^{p,\infty}$ есть пространство Марцинкевича. Для пространства Лоренца справедливо с точностью до эквивалентных норм равенство [4]:

$$(L^{p_0, r_0}, L^{p_1, r_1})_{K, \ell^{\eta, q}} = L^{p, q} \left(\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}, \quad p_0 \neq p_1, \quad 0 < \eta < 1 \right). \quad (17)$$

Это равенство показывает, что изменение индексов r_0 и r_1 у пространств Лоренца в левой части равенства не приводит к изменению правой части. С другой стороны, из теоремы 2 получим, что если X – симметричное пространство и с точностью до эквивалентных норм верно равенство

$$(L^\infty, X)_{K, \ell^{\eta, q}} = (L^\infty, L^p)_{K, \ell^{\eta, q}},$$

то фундаментальная функция X эквивалентна $t^{1/p}$. В этом смысле теореме Марцинкевича об интерполяции операторов слабого типа, содержащуюся в равенстве (17), нельзя усилить.

Ярославский государственный университет

Поступило

25.05.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
- [2] Jones P. Factorization of A_p -weights // Ann. Math. 1980. V. 111. № 3. P. 511–530.
- [3] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
- [4] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [5] Brudniy Yu., Kruglyak N. Interpolation functions and interpolation spaces. Amsterdam: North Holland Press, 1991.
- [6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [8] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. V. I, II. Berlin: Springer, 1973, 1979.
- [9] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [10] Бережной Е. И., Забрейко П. П. Интерполяция частично аддитивных операторов // Докл. АН БССР. 1986. Т. XXX. № 2. С. 108–111.
- [11] Berezhnoi E. I., Zabreico P. P. Some intherpolation theory for nonlinear operators // Nonlinear Analysis. 1988. V. 12. № 2. P. 155–170.