Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Буслаев, О методе Лагранжа в нелинейном анализе, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 334–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:30:01

О МЕТОДЕ ЛАГРАНЖА В НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛИЗЕ

А. П. Буслаев

0. В работе рассматриваются качественные вопросы исследования спектра решений системы

$$\begin{aligned} A^T(Ax)_{(q)} &= \lambda^q(x)_{(p)}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} \left\| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right\|^{q-1} \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) &= \|x_i\|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_i) \end{aligned}$$

и их связи с поперечниками $d_n(AB_p^m, l_q^k)$ A -образа B_p^m -эллипсоида для широкого класса квадратных матриц A , $1 \leq p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} B_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\|_{l_p^m} \leq 1\}, \\ \partial B_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\|_{l_p^m} = 1\}. \end{aligned}$$

Эта задача, с одной стороны, является классической задачей спектрального анализа сингулярных чисел A при $p = q = 2$ [1], [2], с другой стороны, для вполне положительных матриц (матриц, у которых все миноры всех порядков положительны) исследовалась по параметрам $1 < p, q < \infty$ [3]–[5]. При этом использовалась композиция метода Кэллога и теоремы Борсука.

Переход к более широкому классу матриц требует новых подходов. В данной работе в качестве такого подхода предлагается метод Лагранжа, использованный им при решении одной задачи устойчивости механической системы (колонны) в 1770 году [6].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00237, и Международным научным фондом, грант МР1000.

1. Обобщенная задача о сингулярных числах. Пусть

$$w_0, w_1 \in \mathbb{R}_+^m, \quad w_i = \{w_{ik}\}_{k=1}^m, \\ E_{w_i} = \{w_{ik} \delta_{kj}\}_{k,j=1}^m, \quad i = 0, 1, \quad E = \{\delta_{kj}\}_{k,j=1}^m,$$

A – матрица $m \times m$, δ_{kj} – символ Кронекера.

Рассмотрим следующую задачу

$$A^T E_{w_1} (Ax) = \lambda^2 E_{w_0} x, \quad (1)$$

которая при $w_0 = w_1 = (1, \dots, 1)$ есть задача о сингулярных числах матрицы A [1], [2].

Ясно, что при $w_0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$ существует m сингулярных чисел – решений векового уравнения

$$|A^T E_{w_1} A - \lambda^2 E_{w_0}| = 0 \iff |A^T E_{w_1} A E_{w_0}^{-1} - \lambda^2 E| = 0, \quad w_0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^m, \quad (2)$$

где $w_0^{-1} = \{w_{0k}^{-1}\}_{k=1}^m$.

Обозначим их в порядке убывания

$$\lambda_1(w_0, w_1) \geq \lambda_2(w_0, w_1) \geq \dots \geq \lambda_m(w_0, w_1) \geq 0. \quad (3)$$

При этом каждому λ_i соответствует собственный вектор X_i , единственный с точностью до нормировки, если в (3) все неравенства строгие. В силу непрерывной зависимости нулей многочлена (2) от своих коэффициентов множество $O = \{w_0, w_1\} \in \mathbb{R}_+^{2m}$ таких точек (общего положения) открыто.

На этом множестве O определим отображения

$$F_i: (w_0, w_1) \rightarrow \lambda_i(w_0, w_1) \in \mathbb{R}_+, \quad 1 \leq i \leq m, \\ G_i: (w_0, w_1) \rightarrow X_i(w_0, w_1), \quad \|X_i\|_{l_2^m} = 1, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4)$$

Легко видеть, что на множестве O отображения F_i, G_i непрерывны, причем G_i – двузначное отображение. Договоримся теперь о том, как определить F_i, G_i за пределами O .

Во-первых, если w_0 выходит на границу $\mathbb{R}_+^m$, т.е. некоторые координаты $w_{0j}, j = j_1, j_2, \dots, j_k$, стремятся к нулю, то сингулярные числа

$$\lambda_1(w_0, w_1), \lambda_2(w_0, w_1), \dots, \lambda_k(w_0, w_1)$$

в предельной точке $\hat{w}_0$ равны бесконечности, а линейная оболочка соответствующих собственных векторов в пределе переходит в “особое” линейное подпространство

$$L_k = \{x = (x_1, \dots, x_m), x_j = 0, j \neq \{j_1, \dots, j_k\}\}.$$

В этом случае $X_k = L_k \cap \partial B_2^m$.

Во-вторых, если в неравенствах (3) некоторые соотношения суть равенства

$$\lambda_{i-1}(w_0, w_1) > \lambda_i(w_0, w_1) = \dots = \lambda_{i+j}(w_0, w_1) \geq \lambda_{i+j+1}(w_0, w_1),$$

то отображения $G_k, i \leq k \leq i+j$ многозначны

$$G_k: (w_0, w_1) \rightarrow x \in \text{lin}\{X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+j}\} \cap \partial B_2^m. \quad (5)$$

В-третьих, если некоторые компоненты w_{0j} равны бесконечности, то это означает, что в (1) $x_j = 0$. Если же обращается в бесконечность w_{1j} , то $(Ax)_j = 0$.

Таким образом, спектральная задача (1) определена для всех наборов весов $w_0, w_1 \in \bar{\mathbb{R}}_+^m$, кроме тех тривиальных случаев, когда оба вектора имеют все нулевые или бесконечные координаты.

2. Конструкция общего отображения Лагранжа. Пусть $W_i \in \bar{\mathbb{R}}_+^m, i = 0, 1$ – множества, гомеоморфные $\partial B_2^m \cap \mathbb{R}_+^m$. Обозначим через $|X_i(w_0, w_1)|$ вектор, координаты которого равны модулям соответствующих координат $X_i(w_0, w_1)$; при этом отображение $X_i \rightarrow |X_i|$ обозначается через M .

Далее, пусть $P = (P_0, P_1)$ – гомеоморфизм,

$$(\mathbb{R}_+^m \cap \partial B_2^m, \mathbb{R}_+^m \cap \partial B_2^m) \quad \text{и} \quad B := (W_0, W_1), \\ P_0: \mathbb{R}_+^m \cap \partial B_2^m \leftrightarrow W_0, \quad P_1: \mathbb{R}_+^m \cap \partial B_2^m \leftrightarrow W_1.$$

Для фиксированного $k, 1 \leq k \leq m$, определим отображение (вообще говоря, многозначное) $H_k = PMG_k$, где

$$G_k: (w_0, w_1) \in B \rightarrow X_k(w_0, w_1), \\ M: X_k(w_0, w_1) \rightarrow |X_k(w_0, w_1)|, \\ P: |X_k(w_0, w_1)| \rightarrow (\hat{w}_0, \hat{w}_1) \in B,$$

где под $X_k(w_0, w_1)$ понимаем нормированный с точностью до знака вектор (4) или множество (5).

Если X_k содержит более одного вектора, то оператор P отражает в $\mathbb{R}_+^m$ каждый элемент X_k . Непосредственно из определения ясно, что H_k – непрерывное сверху многозначное отображение $B \rightarrow B$ [7, с. 109].

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $k, 1 \leq k \leq m$, существует неподвижная точка отображения H_k .*

Утверждение теоремы получается из следующей конструкции. Далее X – полное метрическое пространство, $d(x, y)$ – расстояние, F – многозначное отображение $X \rightarrow X, F(x) \neq \emptyset \forall x \in X$. Движением называется бесконечная последовательность $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ такая, что $x_{n+1} \in F(x_n) \forall n$.

ТЕОРЕМА А [7, с. 235]. Пусть существует неотрицательная функция $U: X \rightarrow \mathbb{R} \cup (+\infty)$ такая, что $\forall x \in X, y \in F(x)$

$$U(y) + d(x, y) \leq U(x). \quad (6)$$

Тогда для любого $x: U(x) < \infty$ существует движение $x_n(x)$, $x_0 = x$, $x_n \rightarrow \bar{x}$. Если график F замкнут, то $\bar{x}$ – неподвижная точка этого отображения.

ТЕОРЕМА Б [7, с. 237]. Пусть F – многозначное отображение из X в X такое, что $\forall x \in X$

$$U_F(x) := \inf_{\{x_n\} | x_0=x} \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}).$$

Если F полунепрерывно сверху и имеет компактные значения, то U_F удовлетворяет (6) $\forall x \in X, y \in F(x)$, а также

$$U_F(x) \geq U_F(y) + d(x, y).$$

Кроме того, если U – произвольная функция, удовлетворяющая (6), то $\forall x \in X$

$$U_F(x) \leq U(x).$$

3. (p, q) -спектры. Пусть p, q – вещественные числа, $1 < p, q < \infty$,

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (x)_{(p)} := (|x_1|^{p-1} \operatorname{sgn} x_1, \dots, |x_m|^{p-1} \operatorname{sgn} x_m).$$

Система уравнений

$$A^T(Ax)_{(q)} = \lambda^q(x)_{(p)} \quad (7)$$

при $p = q = 2$ является линейной системой для определения сингулярных чисел матрицы A , которые упорядочены в соответствии с (3), и при этом каждому числу λ_i соответствует не менее одного собственного вектора. В том случае, когда

$$(p-2)^2 + (q-2)^2 \neq 0, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,$$

ее решения исследованы для вполне положительных матриц A [3]–[5].

В частности, в [5] установлено существование спектра (λ_k, X_k) с k переменными знака координат вектора $X_k = (X_{k1}, \dots, X_{km})$ для любого k , $1 \leq k \leq m$. При этом

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_m > 0.$$

Для невырожденных матриц A , которые не являются вполне положительными, из теории Люстерника–Шнирельмана следует лишь существование m решений системы (7).

Качественное описание этих решений остается за пределами упомянутой общей теории, поскольку, как отмечалось самим Л. А. Люстерником [8], [9], вычисление категории множества вообще (в частности, линии уровня отношения Релея $\|Ax\|_{l_q^m} / \|x\|_{l_p^m}$) является очень трудной задачей.

Перейдем к конкретизации метода Лагранжа. Пусть

$$\begin{aligned} 1 < p, q < \infty, \quad p \neq 2, \quad q \neq 2, \\ s = s(p) = \frac{p}{p-2}, \quad r = r(q) = \frac{q}{q-2}, \\ W_0 = \{w_0 \in \mathbb{R}_+^m, \|w_0\|_{l_s^m} = 1\}, \\ W_1 = \{w_1 \in \mathbb{R}_+^m, \|w_1\|_{l_r^m} = 1\}, \end{aligned}$$

A – невырожденная квадратная матрица, $B = (W_0, W_1)$. Каждой паре $(w_0, w_1) \in B$ сопоставим спектральную пару (1)

$$(\lambda_k(w_0, w_1), X_k(w_0, w_1)),$$

где X_k – собственное подпространство, пересеченное с ∂B_2^m .

Каждый вектор x_k из X_k отображается в (w_0, w_1) следующим образом

$$\begin{cases} \bar{w}_0 = \gamma_0 |x_k|^{p-2}, \\ \bar{w}_1 = \gamma_1 |Ax_k|^{q-2}, \end{cases}$$

где γ_0 и γ_1 – нормировочные константы:

$$\begin{aligned} \|\bar{w}_0\|_s &= \|\bar{w}_0\|_{p/(p-2)} = \gamma_0 \|x_k\|_p^{p-2} = 1, \\ \|\bar{w}_1\|_r &= \|\bar{w}_1\|_{q/(q-2)} = \gamma_1 \|Ax_k\|_q^{q-2} = 1. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 существует неподвижная точка построенного отображения ($p > 2, q > 2$)

$$w_0^k = \bar{w}_0^k, \quad w_1^k = \bar{w}_1^k,$$

т.е.

$$\begin{aligned} w_0^k = \gamma_0 |x_k|^{p-2}, \quad w_1^k = \gamma_1 |Ax_k|^{q-2} &\iff (A^T E_{w_1^k}(Ax_k) = \lambda^2 E_{w_0^k} x_k) \\ &\iff A^T (Ax_k)_{(q)} = \lambda_k^q (x_k)_{(p)}. \end{aligned}$$

Если же $p < 2$ или (и) $q < 2$, то построенное отображение дополним радиальной проекцией $W' \leftrightarrow W_0$, $W_1 \leftrightarrow W'$, где $W' = \{\omega \in \mathbb{R}_+^m, \|\omega\|_{l_2^m} = 1\}$, и далее аналогично.

Обозначим через

$$\Lambda_k = \Lambda_k(A, p, q)$$

множество тех $\lambda \geq 0$, для которых

- а) система (7) имеет нетривиальное решение $x \neq 0$, т.е. (λ, x) – спектральная пара,
- б) вектор $x \in X_k(w_0, w_1)$, где

$$w_1 = \gamma_1 |Ax|^{q-2}, \quad w_0 = \gamma_0 |x|^{p-2},$$

и константы $\gamma_1 > 0$, $\gamma_0 > 0$ выбраны таким образом, чтобы

$$w_1 \in \partial B_{(q/2)'}^m, \quad w_0 \in \partial B_{(p/2)'}^m,$$

$$\text{т.е. } (a^{-1} + a'^{-1}) = 1,$$

$$\|w_1\|_{l_{q/(q-2)}^m} = 1, \quad \|w_0\|_{l_{p/(p-2)}^m} = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Множество нетривиальных решений системы (7) непусто для любой квадратной матрицы $A \neq 0$. Если каждое решение (λ^*, x^*) (7) неособое, т.е.*

$$(A^T(Ax)_{(q)} - \lambda(x)_{(p)})|_{x=x^*, \lambda=\lambda^*}$$

невыврождена, то для любого k , $1 \leq k \leq m$, $X_k \neq 0$ и $\Lambda_k \cap \Lambda_j = \emptyset$ $\forall k, j, k \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота множества нетривиальных решений (7) следует из того, что в экстремальной задаче

$$\frac{\|Ax\|_{l_q^m}}{\|x\|_{l_p^m}} \rightarrow \max,$$

максимум достигается на решении (7).

В силу теоремы 1 каждое множество Λ_k , $1 \leq k \leq m$, непусто. Из-за условия теоремы 2

$$X_k \cap X_j = \emptyset.$$

Следовательно, для любого k (7) имеет решение $x^{(k)} \in X_k$ и

$$x^{(k)} \notin X_j \quad \forall j \neq k.$$

4. Метод Лагранжа. Рассмотрим следующий класс задач на экстремум

$$\Lambda_k(w_0, w_1) \xrightarrow{(w_0, w_1)} \text{extr}, \quad (8)$$

где

$$\|w_0\|_{l_{p/(p-2)}^m} = \|w_1\|_{l_{q/(q-2)}^m} = 1, \quad (w_0, w_1) \in M_1 \subset \mathbb{R}_+^{2m}, \quad (9)$$

M_1 – некоторое подмножество.

Бесконечномерные частные случаи задачи (8), (9), когда A – оператор интегрирования, а x – вещественнозначная функция, определенная на отрезке, исследовались в огромном числе работ. Большая часть этих исследований связана с механическими приложениями и относится к старшим точкам спектра ($k = 1 \vee 2$). Отметим среди них работы [10]–[15].

Пусть

$$B_{l_{p(w_0)}^m}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\|_{l_{p(w_0)}^m} \leq 1\}, \quad \|x\|_{l_{p(w_0)}^m} = \left(\sum_{i=1}^m x_i^p w_0 i \right)^{1/p}.$$

Хорошо известно [3], [4], что колмогоровский поперечник $AB_{2(w_0)}^m$ в $l_{2(w_1)}^m$ совпадает со спектром $\lambda_k(w_0, w_1)$

$$d_k(AB_{2(w_0)}^m, l_{2(w_1)}^m) = \lambda_k(w_0, w_1), \quad (10)$$

где

$$d_k(AB_{p(w_1)}^m, l_{q(w_0)}^m) = \min_{L_{k-1}} \sup_x \min_{y \in L_{k-1}} \frac{\|Ax - y\|_{l_{q(w_1)}}}{\|x\|_{l_{p(w_0)}}}.$$

Предположим, что $q > 2, p < 2$. Оценим

$$\sup_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = 1} \sup_{\|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \lambda_k(w_0, w_1).$$

В силу (10)

$$\begin{aligned} & \sup_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = 1} \sup_{\|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \lambda_k(w_0, w_1) \\ &= \sup_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = \|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \min_{L_{k-1}} \sup_x \min_{y \in L_{k-1}} \frac{\|Ax - y\|_{l_{2(w_1)}}}{\|x\|_{l_{2(w_0)}}} \\ &\leq \min_{L_{k-1}} \sup_x \min_{y \in L_{k-1}} \frac{\sup_{\|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \|Ax - y\|_{l_{2(w_1)}}}{\sup_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = 1} \|x\|_{l_{2(w_0)}}} \\ &= \min_{L_{k-1}} \sup_x \min_{y \in L_{k-1}} \frac{\|Ax - y\|_{l_q}}{\|x\|_{l_p}} = d_k(AB_p^m, l_q^m). \end{aligned}$$

В случае $q < 2, p > 2$ аналогичные рассуждения приводят к неравенству

$$\inf_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = \|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \lambda_k(w_0, w_1) \geq d_k(AB_p^m, l_q^m).$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Для любой квадратной матрицы A , $1 \leq k \leq m$, имеют место следующие оценки $\Lambda_k(A, p, q)$:

а) если $\infty > q > 2 > p > 1$, то

$$(\sup \lambda, \lambda \in \Lambda_k(A, p, q)) \leq d_k(AB_p^m, l_q^m);$$

б) если $1 < q < 2 < p < \infty$, то

$$(\inf \lambda, \lambda \in \Lambda_k(A, p, q)) \geq d_k(AB_p^m, l_q^m). \quad (11)$$

Остановимся теперь на анализе неравенства (11).

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3б) и в предположении о невырожденности $\check{\lambda}_k(A, p, q)$ – минимального собственного значения из $\Lambda_k(A, p, q)$,

$$\check{\lambda}_k(A, p, q) = \inf_{\|w_0\|_{l_{s(p)}^m} = \|w_1\|_{l_{r(q)}^m} = 1} \lambda_k(A, l_{2(w_1)}^m, l_{2(w_0)}^m) = d_k(AB_p^m, l_q^m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из того, что функция $\lambda_k(A, l_{2(w_1)}^m, l_{2(w_0)}^m)$ непрерывна на ограниченном множестве.

Для любого линейного пространства размерности k $L_k \in \mathbb{R}_+^m$, найдутся

$$w_1, w_0 \in \mathbb{R}_+^m, \quad w_0 \in \partial B_{r(q)}^m, w_1 \in \partial B_{s(p)}^m$$

такие, что

$$L_k = \text{lin}\{x_{2(w_1)2(w_0)}^{(1)}, \dots, x_{2(w_1)2(w_0)}^{(k)}\},$$

где $(\lambda_{i(2(w_1)2(w_0))}, x_{2(w_1)2(w_0)}^{(i)})$ – спектральные пары, $1 \leq i \leq k$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \min_{x \in L_k} \frac{\|Az(s)\|_{l_q}}{\|z(s)\|_{l_p}}, \quad (12)$$

где $z(s)$ – последовательность векторов, определенная по системе $s = 1, 2, \dots, z(0) = x$,

$$A^T(Az(s-1))_{(2(w_0))} = \mu_s(z(s))_{(2(w_0))},$$

μ_s определяется из условия нормировки.

При фиксированном x

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\|Az(s)\|_{l_q}}{\|z(s)\|_{l_p}}$$

сходится со скоростью геометрической прогрессии. Поэтому значение задачи (12) равно

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq l \leq k} \frac{\|Ax^{(l)}\|_{2(w_1)2(w_0)}}{\|x^{(l)}\|_{2(w_1)2(w_0)}\|p\|} &\geq \min_{1 \leq l \leq m} \frac{\|Ax^{(l)}\|_{2(w_1)}\|w_1\|_{r(q)}}{\|x^{(l)}\|_{2(w_0)}\|w_0\|_{s(p)}} \\ &= \min_{1 \leq l \leq k} \lambda_l(2(w_1)2(w_0)) = \lambda_k(2(w_1)2(w_0)). \end{aligned}$$

Поскольку (12) оценивает колмогоровский поперечник снизу [5], то получаем неравенство, обратное (11).

Московский автодорожный институт

E-mail: busl@madi.msk.su

Поступило

03.03.94

Исправленный вариант

23.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1987.
- [2] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехиздат, 1953.
- [3] Тихомиров В. М. Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 14. М.: ВИНТИ, 1987.
- [4] Pinkus A. Some extremal problems for strictly totally positive matrices // Linear Algebra and its Appl. 1985. V. 64. P. 141–156.
- [5] Буслаев А. П. О вариационном описании спектра вполне положительных матриц и экстремальных задачах теории приближений // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 39–46.
- [6] Lagrange G. L. *Eurves*. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1868.
- [7] Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [8] Люстерник Л. А. Топологические основы общей теории собственных значений // УМН. 1970. Т. 25. № 4 (154).
- [9] Люстерник Л. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа // УМН 1956. Т. 11. № 6 (72). С. 145–168.
- [10] Сейранян А. П. Об одной задаче Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 101–111.
- [11] Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981.
- [12] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля // УМН. 1984. Т. 39. № 2 (236). С. 151–152.
- [13] Keller J. The shape of the strongest column // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. № 5. P. 275–285.
- [14] Tadjbaksh I., Keller J. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 159–164.
- [15] Cox S. J. The Shape of the Ideal Column // The Mathematical Intelligencer. 1992. V. 14. № 1. P. 16–24.