Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Е. Вейц, Простые доказательства теорем типа теоремы Олевского, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 343–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:28:45

ПРОСТЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ТИПА ТЕОРЕМЫ ОЛЕВСКОГО

Б. Е. Вейц

В 1960 г. П. Л. Ульянов высказал следующую гипотезу: никакая ортонормированная система функций из $C([0; 1])$ не может быть базисом этого пространства, если эта система состоит из равномерно ограниченных функций. В 1965 г. А. М. Олевский подтвердил справедливость этой гипотезы в работах [1], [2]. Теорема Олевского следовала из следующей доказанной им теоремы.

Если (e_n) – ортонормированная система, состоящая из равномерно ограниченных функций, то если для числовой последовательности (c_n)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2 > 0,$$

то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k e_k(t) \right| dt = \pm \infty.$$

Развивая метод доказательства этой теоремы, А. М. Олевский получил следующий более общий результат (см., например, [3]). Для любой равномерно ограниченной (числом M) ОНС и любой числовой последовательности (c_n) , для которой $|c_n| \leq M$ при всех n , справедливо неравенство

$$\max_{1 \leq m \leq N} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m c_n e_n(t) \right| dt \geq C(M) \frac{\log N}{N} \sum_{n=1}^N c_n^2,$$

где постоянная $C(M) > 0$ зависит лишь от M .

Последнее неравенство усиливалось, а его доказательство совершенствовалось, иногда упрощалось, в работах советских и зарубежных математиков – С. В. Бочкарева, Б. С. Кашина, С. Кwapenia и С. Шарека и др. [4]–[6]. В работе [6] Кwapenia и Шарека доказано, что и в пространстве

$C([0; 1])$ и в пространстве $L^1([0; 1])$ не существует *нормированных базисов*, состоящих из равномерно ограниченных функций и тем самым получены результаты, обобщающие теорему Олевского. Но при этом указанные результаты доказаны для бесконечномерных пространств $L^1(S, \mathfrak{B}, \mu)$ (где $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ – пространства с мерой) и пространств $C(S)$ (в которых S – метрический бесконечномерный компакт).

Возникает естественный вопрос: в какой мере теорема Олевского может быть перенесена на более широкий класс сепарабельных банаховых пространств? В представляемой работе делается первый шаг в решении этого вопроса, а именно теорема Олевского и одно из ее обобщений доказывается методами функционального анализа.

ЛЕММА 1. Пусть

- 1) (x_n) – полная минимальная система в $C([0; 1])$,
- 2) система (x_n) и биортогональная к ней система (y_n) равномерно ограничены: $\|x_n\|_\infty \leq M_1$, $\|y_n\| \leq M_1$, $n = 1, 2, \dots$,
- 3) последовательность $(\sum_{k=1}^n c_k x_k)_{n=1}^\infty$ ограничена в L^1 :

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 \leq M_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для того чтобы оператор $T: L^1 \rightarrow c_0$,

$$Tx = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \langle x, y_k \rangle \right)_{n=1}^\infty,$$

был компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из условий 1) и 2) леммы следует, что для всех $x \in C([0; 1])$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle = 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ и $x \in L^1$ найдется $\tilde{x} \in C([0; 1])$ такое, что $\|x - \tilde{x}\|_1 < \varepsilon/2 M_1$ и найдется n_ε такое, что при $n > n_\varepsilon$ $|\langle \tilde{x}, y_n \rangle| < \varepsilon/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\langle x, y_n \rangle| &\leq |\langle x - \tilde{x}, y_n \rangle| + |\langle \tilde{x}, y_n \rangle| \\ &\leq \|x - \tilde{x}\|_1 \|y_n\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2 M_1} M_1 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\forall x \in L^1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle = 0.$$

Для любого натурального k

$$c_k = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i x_i, y_k \right\rangle$$

при $n > k$. Поэтому из условия 3) следует, что для всех k

$$|c_k| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|_1 \|y_k\|_\infty \leq M_2 M_1.$$

Следовательно, для всех $x \in L^1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \langle x, y_k \rangle = 0.$$

Произведем теперь компактификацию множества $\mathbb{N}$ по Александрову, полагая $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда множество

$$\{Tx \mid x \in B(L^1)\},$$

где $B(L^1)$ — единичный шар в L^1 , является множеством равномерно ограниченных непрерывных на компакте $\mathbb{N}^*$ функций:

$$\begin{aligned} |Tx(n)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \langle x, y_k \rangle \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |c_k| |\langle x, y_k \rangle| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |c_k| \|x\|_1 \|y_k\|_\infty \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_1 M_2 \cdot 1 \cdot M_1 = M_1^2 M_2 \end{aligned}$$

и, значит, для любых $x \in L^1$

$$|Tx(n)| \leq M_1^2 M_2 \|x\|_1.$$

Поэтому

$$\|Tx\|_{c_0} = \sup_n |Tx(n)| \leq M_1^2 M_2 \|x\|_1.$$

Отсюда следует ограниченность оператора $T: L^1 \rightarrow c_0$ и, если он компактен, то по теореме Асколи множество

$$\{Tx \mid x \in B(L^1)\}$$

равностепенно непрерывно в ∞ , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_ε такое, что при $n > n_\varepsilon$ $|Tx(n)| < \varepsilon$ для всех $x \in B(L^1)$, или, что то же,

$$|Tx(n)| < \varepsilon \|x\|_1.$$

При $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$

$$Tx(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \left\langle \sum_{i=1}^n c_i x_i y_k \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2$$

и, значит,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2 < \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|_1 < M_2 \varepsilon,$$

откуда и следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2 = 0. \quad (1)$$

Достаточность. Если выполняется равенство (1), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что при $n > n_\varepsilon$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M_1^2}$$

и для $x \in L^1$, согласно неравенству Коши,

$$\begin{aligned} |Tx(n)| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k \langle x, y_k \rangle \right| \leq \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n c_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\langle x, y_k \rangle|^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k^2} \sqrt{\frac{1}{n} \|x\|_1^2 \sum_{k=1}^n \|y_k\|_\infty^2} < \frac{\varepsilon}{M_1} M_1 \|x\|_1 = \varepsilon \|x\|_1. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства и следует компактность оператора T .

ЛЕММА 2. Пусть

- 1) (x_n) — полная минимальная система в $C([0; 1])$,
- 2) система (x_n) и биортонормальная к ней система (y_n) равномерно ограничены: $\|x_n\|_\infty \leq M_1$, $\|y_n\|_\infty \leq M_2$, $n = 1, 2, \dots$,
- 3) последовательность $(\sum_{k=1}^n c_k x_k)_{n=1}^\infty$ ограничена в L^1 :

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 \leq M_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда оператор $T: L^1 \rightarrow c_0$,

$$Tx = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \langle x, y_k \rangle \right)_{n=1}^{\infty},$$

компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем следующую известную теорему (см. [7]).

Пусть $T: E \rightarrow F$ – непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное пространство E в сепарабельное пространство F . Для того чтобы оператор T был компактным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный оператор $T': F' \rightarrow E'$ переводил $*$ -слабо сходящуюся к нулю последовательность (f_n) , $f_n \in F'$, $n = 1, 2, \dots$ в последовательность $(T'f_n)$, сходящуюся к нулю по норме пространства E' .

В рассматриваемом нами случае $T': \ell^1 \rightarrow L^\infty$. Итак, пусть последовательность $(f^{(k)})$ из ℓ^1 $*$ -слабо сходится к нулю, т.е. для любого $h \in c_0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^{(k)}, h \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f^{(k)}(n)h(n) = 0.$$

Оценим норму $\|T'f^{(k)}\|_\infty$.

$$T'f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(k)}(n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i x_i. \quad (2)$$

Докажем абсолютную, а значит, и безусловную сходимость ряда (2). Учитывая, что

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|x_i\|_\infty \leq n M_1^2 M_2,$$

и что для каждого k ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f^{(k)}(n)|$ сходится, получим

$$\begin{aligned} \|T'f^{(k)}\|_\infty &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f^{(k)}(n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f^{(k)}(n)| \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|_\infty \\ &\leq M_1^2 M_2 \sum_{n=1}^{\infty} |f^{(k)}(n)| \leq M_1^2 M_2 \|f^{(k)}\|_{\ell^1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно, ряд (2) сходится абсолютно. Преобразуем его следующим образом:

$$T'f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{n} f^{(k)}(n) + \frac{1}{n+1} f^{(k)}(n+1) + \dots \right) x_n.$$

Следовательно,

$$\|T'f^{(k)}\|_{\infty} \leq M_1^2 M_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} f^{(k)}(n) + \frac{1}{n+1} f^{(k)}(n+1) + \dots \right|. \quad (4)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} f^{(k)}(n) + \frac{1}{n+1} f^{(k)}(n+1) + \dots \right| \quad (5)$$

и докажем непрерывность функции φ на компакте $\mathbb{N}^*$. Для этого достаточно доказать существование конечного предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k).$$

Из *-слабой сходимости последовательности $(f^{(k)})$ следует ее ограниченность, а значит, и ограниченность функции φ . По лемме Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность

$$\begin{aligned} (\psi(m)) &\stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(k_m)). \\ \psi(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} f^{(k_m)}(n) + \frac{1}{n+1} f^{(k_m)}(n+1) + \dots \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, функция ψ непрерывна на $\mathbb{N}^*$, частные суммы $S_n^{(m)}$ ряда (6) также непрерывны на $\mathbb{N}^*$ и возрастают. Поэтому разности $\psi(m) - S_n^{(m)}$ неотрицательны, непрерывны, убывают и стремятся к нулю на $\mathbb{N}^*$. Следовательно, по теореме Дини ряд (6) сходится равномерно на компакте $\mathbb{N}^*$. Поэтому можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$ в равенстве (6) и так как по предположению

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} f^{(k_m)}(n) + \frac{1}{n+1} f^{(k_m)}(n+1) + \dots \right) = 0,$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(m) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|T'f^{(k_m)}\|_{\infty} = 0.$$

Убедимся, что и ряд справа в равенстве (5) сходится к нулю и, значит,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T'f^{(k)}\|_{\infty} = 0.$$

Если бы это было не так, то нашлась бы подпоследовательность $(f^{(k_m)})$ последовательности $(f^{(k)})$, для которой

$$\|T'f^{(k_m)}\|_{\infty} \geq r > 0 \quad (7)$$

для всех m . Но тогда, как и ранее, нашлась бы ее подпоследовательность $(f^{(k_{ms})})$, для которой

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|T'f^{(k_{ms})}\|_{\infty} = 0,$$

что противоречит неравенству (7).

ТЕОРЕМА 1. *В пространстве $C([0; 1])$ не существует нормированного базиса, для которого биортогональная система состоит из равномерно ограниченных функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что в пространстве $C([0; 1])$ существует нормированный базис (x_n) : $\forall n (\|x_n\|_\infty = 1)$ и $\forall n (\|y_n\|_\infty \leq M_1)$, где (y_n) – биортогональная система (равномерно ограниченных функций). Тогда для всех $x \in C([0; 1])$

$$S_n x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \langle x, y_k \rangle x_k,$$

и существует число $M_2 > 0$ такое, что

$$\|S_n\|_{B(C)} = \sup_{s \in [0; 1]} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n y_k(s) x_k(t) \right| dt \leq M_2,$$

где $B(C)$ – единичный шар в C , т.е. для всех $s \in [0; 1]$

$$\left\| \sum_{k=1}^n y_k(s) x_k \right\|_1 \leq M_2.$$

По лемме 2 для каждого фиксированного $s \in [0; 1]$ оператор T :

$$Tx = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k(s) \langle x, y_k \rangle \right)_{n=1}^\infty,$$

отображающий L^1 в c_0 , компактен. Поэтому по лемме 1

$$\forall s \in [0; 1] \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(s) = 0 \right).$$

Следовательно, учитывая равномерную ограниченность последовательности $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(s) \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^1 y_k^2(s) ds = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|y_k\|_2^2 = 0. \quad (8)$$

Заметив, что для всех $n = 1, 2, \dots$

$$1 = |\langle x_n, y_n \rangle| \leq \|x_n\|_\infty \|y_n\|_1 \leq M_1 \|y_n\|_1,$$

получим

$$\forall n \quad \|y_n\|_1 \geq \frac{1}{M_1}$$

и, значит,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|y_k\|_2^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|y_k\|_1^2 \geq \frac{1}{M_1^2},$$

что противоречит равенству (8).

Аналогично, с естественными изменениями, доказываются обобщения Кwapеня и Шарека теоремы Олевского, в частности, следующая теорема о базисах в $L^1([0; 1])$.

ТЕОРЕМА 2. *В пространстве $L^1([0; 1])$ не существует нормированного базиса, состоящего из равномерно ограниченных функций.*

Мурманский государственный
педагогический институт

Поступило
08.08.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Олевский А. М. Обобщение теоремы Дюбуа–Реймона на ограниченные ортонормальные системы функций // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. С. 1069–1072.
- [2] Олевский А. М. Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормированным системам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 2. С. 387–452.
- [3] Олевский А. М. Fourier series with Respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.
- [4] Бочкарев С. В. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 436–439.
- [5] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [6] Kwapien S. K., Szarek S. J. A estimation of the Lebesgue function // Studia Math. 1979. V. LXV. P. 185–200.
- [7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.