Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Окончательный вариант теоремы
о среднем в теории гармонических функций, *Ма-
тем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 351–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1723>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:51:23

ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ В ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. Волчков

§ 1. Введение

Пусть $n \geq 2$ – фиксированное натуральное число, f – локально суммируемая функция на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (будем писать $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$), E – данное множество положительных чисел. Предположим, что при всех $r \in E$ и почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \int_{S(x,r)} f d\sigma, \quad (1)$$

где $S(x,r)$ – сфера с центром x и радиусом r в $\mathbb{R}^n$ с ее нормированной мерой $d\sigma$. При каких E отсюда следует, что (в смысле распределений) $\Delta f = \sum_{m=1}^n \partial^2 f / \partial x_m^2 = 0$? Известная теорема Дельсарта о двух радиусах утверждает, что $\Delta f = 0$, если E состоит из двух чисел r_1, r_2 , отношение которых не является отношением корней целой функции $\eta(z) = 1 - 2^{n/2-1} \Gamma(n/2) J_{n/2-1}(z) / z^{n/2-1}$ ([1], см. также [2]). Простые примеры показывают (см., например, [2]), что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым.

Теорема Дельсарта получила дальнейшее развитие и уточнение во многих работах (см. [2]–[6], а также обзор [7] с обширной библиографией). Особый интерес представляет “локальный” вариант указанной теоремы, а именно, когда f с условием (1) задана в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $R > r_1 + r_2$ ([5], см. также [7]). Отметим, что для функции $f \in C^\infty(B_R)$ с условием (1) имеет место аналог теоремы Дельсарта и для $R = r_1 + r_2$ (см. [5]). В общей ситуации вопрос о гармоничности f при $R \leq r_1 + r_2$ оставался открытым.

В данной работе полностью изучен случай, когда $R \leq r_1 + r_2$. Сформулируем окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = \{\alpha/\beta : \eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0\}$, $E = \{r_1, r_2\}$, $R > \max(r_1, r_2)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и выполнено (1) при всех $r \in E$ и почти всех $x \in B_{R-r}$. Тогда:

1. Если $r_1 + r_2 < R$ и $r_1/r_2 \notin A$, то $\Delta f = 0$.
2. Если $r_1 + r_2 = R$, $r_1/r_2 \notin A$ и $f \in C^\infty(B_R)$, то $\Delta f = 0$.
3. Если $r_1 + r_2 = R$, то для любого целого $s \geq 0$ существует негармоническая функция $f \in C^s(B_R)$, удовлетворяющая условию теоремы.
4. Если $r_1 + r_2 > R$, то существует негармоническая функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая условию теоремы.
5. Если $r_1/r_2 \in A$, то существует негармоническая вещественно-аналитическая в $\mathbb{R}^n$ функция f , для которой условие (1) выполнено при всех $r \in E$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Как уже отмечалось, утверждения 1, 2 и 5 были известны ранее (см [2], [5], [7]). Утверждения 3, 4 являются новыми и доказываются в § 5 данной работы.

§ 2. Основные обозначения

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in S$). Как обычно, $\text{SO}(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара dg . Обозначим $T(g)$ – квазирегулярное представление ($\forall f \in L^2(S)$ $(T(g)f)(\sigma) = f(g^{-1}\sigma)$, где $\sigma \in S$, $g \in \text{SO}(n)$). Как известно, $T(g)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^k(g)$, действующих на пространствах $\mathcal{H}_k$ однородных гармонических полиномов степени k (см. [8, с. 426]). Пусть $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq l \leq a_k$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$ (пространство $\mathcal{H}_k$ рассматривается как подпространство $L^2(S)$, $\{t_{lp}^k(g)\}$ ($1 \leq l, p \leq a_k$) – матрица представления $T^k(g)$, т.е. $Y_l^{(k)}(g^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{lp}^k(g) Y_p^{(k)}(\sigma)$).

Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma),$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (2)$$

Отметим также равенство

$$f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{\text{SO}(n)} f(g^{-1}x) \overline{t_{lp}^k(g)} dg \quad (3)$$

(доказательство см. в [6]). Далее мы используем стандартные обозначения J_λ и N_λ для функций Бесселя и Неймана с индексом λ . Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $[x] = x_1$.

Пусть $r > 0$ — фиксировано. При $R > r$ обозначим $H_r(B_R)$ — множество функций $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, для которых выполнено (1) при почти всех $x \in B_{R-r}$. Положим $H_r^m(B_R) = H_r(B_R) \cap C^m(B_R)$ для целого неотрицательного m .

§ 3. Свойства корней $\eta(z)$

Нам потребуются некоторые результаты о корнях $\eta(z)$, полученные в [6]. Из общих фактов теории целых функций следует, что η имеет бесконечно много корней. При этом все корни, за исключением $z = 0$, простые. Корень $z = 0$ имеет кратность 2. Отметим также, что η не имеет вещественных и чисто мнимых корней, кроме $z = 0$ [6].

Обозначим $\Lambda = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ — последовательность всех корней η в полуплоскости $\text{Re } z > 0$, занумерованных в порядке возрастания модуля (при равенстве модулей нумерация произвольна).

ЛЕММА 1. *Имеют место утверждения:*

- а) $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{q=1}^{\infty} |\nu_q|^{-1-\varepsilon} < \infty$.
- б) Пусть $\rho > 0$, $m \geq 0$. Тогда

$$\rho^{n/2-1} N_{n/2-1}(\nu_q \rho) = O(|\nu_q|^{(n-1)\rho/2}), \quad J_m(\nu_q \rho) = O(|\nu_q|^{(n+1)\rho/2}),$$

причем константы в знаках O не зависят от q и ρ .

- в) При $q \rightarrow \infty$

$$|J_{n/2}(\nu_q)| = \frac{|\nu_q/2|^{n/2-1}}{\pi \Gamma(n/2)} + O(|\nu_q|^{n/2-2}).$$

- г) При $q \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\pi} |\nu_q|^{(n-1)/2} = e^{|\text{Im } \nu_q|} 2^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + O(|\nu_q|^{(n-3)/2}).$$

- д) Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Тогда при всех достаточно больших q

$$|\eta(\alpha \nu_q)| > |\nu_q|^{1-n/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а)–г) доказаны в [6]. Утверждение д) следует из г) и асимптотического разложения бесселевых функций при $z \rightarrow \infty$ (см., например, [9, с. 175]).

Далее, обозначим

$$u_q(t) = \frac{J_{n/2-1}(\nu_q t)}{(\nu_q t)^{n/2-1}},$$

$$v_q(t) = (\nu_q t)^{n/2} (J_{n/2-1}(\nu_q t) N_{n/2-1}(\nu_q) - J_{n/2-1}(\nu_q) N_{n/2-1}(\nu_q t)).$$

Пусть еще $v_0(t) = t - t^n$. Тогда (см. [6])

$$\int_0^1 u_q(t) v_m(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } q \neq m, \\ \frac{1}{\pi} J_{n/2}(\nu_q), & \text{если } q = m. \end{cases} \quad (4)$$

§ 4. Примеры функций класса $H_r(B_R)$

Классическая теорема о среднем для уравнения Гельмгольца (см., например, [10, с. 289]) утверждает, что для того, чтобы функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$ была решением уравнения $\Delta f + \lambda^2 f = 0$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$

$$\int_{S(x,r)} f d\sigma = f(x) (1 - \eta(\lambda r)).$$

В частности, подобное равенство имеет место для функции

$$\psi_\lambda(x) = J_{n/2+k-1}(\lambda \rho) (\lambda \rho)^{1-n/2} Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Таким образом, если $\eta(\lambda r) = 0$, функции $\sin(\lambda[x])$, $\cos(\lambda[x])$, ψ_λ принадлежат $H_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ – финитная радиальная функция, то из указанных выше равенств получаем выражение для свертки функций φ и ψ_λ :

$$(\varphi * \psi_\lambda)(x) = (2\pi)^{n/2} \psi_\lambda(x) \widehat{\varphi}(\lambda), \quad (5)$$

где $\widehat{\varphi}(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(\rho) \rho^{n/2} \lambda^{(2-n)/2} J_{n/2-1}(\lambda \rho) d\rho$ – преобразование Фурье φ (см. [11, с. 176]).

ЛЕММА 2. Для любого $l \in \mathbb{N}$ существует отличная от константы частная функция $h \in C^l(-R, R)$ со следующими свойствами:

1. h является многочленом на $[-r, r]$.
2. $h([x]) \in H_r^l(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m, q \in \mathbb{N}$, $p(t) = t^{2m}(1 - t^2)^m$, $\mu = \sqrt{\pi}2^{n/2-2} \times \Gamma((n-1)/2)$. Из того, что ν_q – простые корни η , следует $J_{n/2}(\nu_q) \neq 0$. Положим

$$c_q = \frac{\pi}{\mu J_{n/2}(\nu_q)} \int_0^1 p(t) v_q(t) dt. \quad (6)$$

Из дифференциального уравнения Бесселя имеем

$$v_q(t) = \left(\frac{n+1}{t^2} v_q(t) \frac{n-1}{t} v_q'(t) - v_q''(t) \right) \nu_q^{-2}.$$

Используя это равенство, проинтегрируем (6) по частям $m-1$ раз. Тогда из оценок леммы 1 и равенств $p^{(s)}(0) = p^{(s)}(1) = 0$, $0 \leq s \leq m-1$, получим при $q \rightarrow \infty$

$$c_q = O(|\nu_q|^{n+2-2m}). \quad (7)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $m > (n+1)R/2 + l + n + 2$. Положим $g(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \cos(\nu_q t) c_q$. Тогда из леммы 1 следует, что $g([x]) \in H_1^l(B_R)$. Из формулы Пуассона (см. [11, с. 174]) получаем

$$\int_0^1 (1-u^2)^{(n-1)/2} g(tu) du \sum_{q=1}^{\infty} \mu c_q u_q(t). \quad (8)$$

Вычисляя c_q из (8) с помощью (4) и сравнивая с (6), из полноты системы $\{v_q\}_{q=0}^{\infty}$ (см. [6]) имеем

$$\int_0^1 (1-u^2)^{(n-1)/2} g(tu) du = p(t) + c,$$

где c – комплексная постоянная. Решая это интегральное уравнение относительно g (см. [12, с. 126]), получим, что g – многочлен ненулевой степени на $[-1, 1]$. Тогда функция $h = g(t/r)$ удовлетворяет требуемым условиям леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 1$ и последовательность $\{c_q\}$ комплексных чисел такова, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} |c_q \nu_q|^{(n+1)\delta/2} < \infty.$$

Тогда, если функция

$$w_k(t) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q J_{n/2+k-1}(\nu_q t) \quad (9)$$

равна нулю на $[0, \delta]$, то все $c_q = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из условия леммы 3 и утверждения б) леммы 1 следует, что ряд (9) сходится равномерно на $[0, \delta]$, так что функция w_k определена корректно. Пусть $0 < \varepsilon < \delta - 1$, φ – радиальная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в B_ε . Из гладкости φ и оценок леммы 1 получаем, что $|\widehat{\varphi}(\nu_q)|$ (см. (5)) убывает при $q \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|\nu_q|$. Обозначим $f(x) = \rho^{1-n/2} w_k(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma)$. Из равномерной сходимости ряда (9) и равенства (5) имеем

$$(f * \varphi)(x) = \sum_{q=1}^{\infty} (2\pi)^{n/2} c_q \widehat{\varphi}(\nu_q) \psi_{\nu_q}(x).$$

Из условия леммы следует, что $(f * \varphi)(x) = 0$ при $x \in B_1$. Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty} c_q \widehat{\varphi}(\nu_q) J_{n/2+k-1}(\nu_q \rho) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (10)$$

Применяя к функции в левой части равенства (10) оператор дифференцирования $(d/\rho \, d\rho)^k \rho^{n/2+k-1}$, понижающий индекс бесселевой функции (см., например, [9, с. 24]), из (10) имеем

$$\sum_{q=1}^{\infty} c_q \widehat{\varphi}(\nu_q) \nu_q^{k+n/2} u_q(\rho) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Отсюда и из (4) следует, что $c_q \widehat{\varphi}(\nu_q) = 0$ при всех q . Тогда из произвольности φ получаем утверждение леммы 3.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Прежде всего отметим, что первое утверждение теоремы 1 легко получить из ее второго утверждения с помощью стандартного метода сглаживания (см., например, [13, с. 409]). Доказательство этих утверждений содержится в [5]. Другое доказательство утверждения 2 можно получить из описания пространства решений (1) при фиксированном r (см. [6]). Далее, если $r_1/r_2 \in A$, то $r_1/r_2 = \alpha/\beta$ при некоторых $\alpha, \beta \in \Lambda$. Полагая $\lambda = \alpha/r_1 = \beta/r_2$, из результатов § 4 имеем, что функция $\sin(\lambda[x])$ удовлетворяет требованиям утверждений 3–5 теоремы 1. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $r_1/r_2 \notin A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Пусть $r_1 + r_2 = R$. Обозначим

$$\alpha_q \int_{S(0, r_2)} \cos\left(\frac{\nu_q[x]}{r_1}\right) d\sigma - 1 = -\eta\left(\frac{\nu_q r_2}{r_1}\right). \quad (11)$$

Из утверждения д) леммы 1 и (11) следует, что $1/\alpha_q = O(|\nu_q|^{n/2-1})$ при $q \rightarrow \infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $m > (n+1)R + s + 4n$. При доказательстве леммы 2 была построена ненулевая функция

$$h([x]) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q \cos\left(\frac{\nu_q[x]}{r_1}\right), \quad c_q = O(|\nu_q|^{n+2-2m}),$$

которая совпадает в B_{r_1} с многочленом. Положим

$$F([x]) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{\alpha_q} \cos\left(\frac{\nu_q[x]}{r_1}\right). \quad (12)$$

Пусть $g \in \text{SO}(n)$. Из (12), (11) и определения h имеем

$$h([g^{-1}x]) = \int_{S(g^{-1}x, r_2)} F d\sigma.$$

Умножая это равенство на $\overline{t_{lp}^{(k)}(g)}$ и интегрируя на $\text{SO}(n)$, получаем

$$\int_{\text{SO}(n)} h([g^{-1}x]) \overline{t_{lp}^{(k)}(g)} dg = \int_{S(x, r_2)} G_k d\sigma, \quad (13)$$

где

$$G_k(x) = \int_{\text{SO}(n)} F([g^{-1}x]) \overline{t_{lp}^{(k)}(g)} dg.$$

Далее, из (12) и поведения c_q и α_q при $q \rightarrow \infty$ следует, что $F([x]) \in H_{r_1}^s(B_R)$. Тогда из определения G_k и (1) получаем $G_k \in H_{r_1}^s(B_R)$. Пусть k больше степени многочлена h в B_{r_1} . При таких k носитель функции в левой части равенства (13) не пересекается с B_{r_1} (это следует из равенств (2), (3) для многочлена h и ортогональности гармоник разных степеней на S [11, с. 161]). Так как $r_1 + r_2 = R$, из (13) получаем, что $G_k \in H_{r_2}^s(B_R)$. Предположим, что $\Delta G_k = 0$. Тогда из определения G_k , (12) и (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{\alpha_q} \nu_q^2 \int_{\text{SO}(n)} \overline{t_{lp}^{(k)}(g)} \cos\left(\frac{\nu_q[g^{-1}x]}{r_1}\right) dg \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q \nu_q^2}{\alpha_q a_k} \int_S \cos\left(\frac{\nu_q[\rho\tau]}{r_1}\right) \overline{Y_l^{(k)}(\tau)} d\tau Y_p^{(k)}(\sigma) \end{aligned}$$

при всех $x = \rho\sigma \in B_R$. При четных k отсюда следует (см. [12, с. 40]), что при $0 \leq \rho < R$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q \nu_q^2}{\alpha_q} J_{n/2+k-1}\left(\frac{\nu_q \rho}{r_1}\right) Y_p^{(k)}(\mathbf{e}) = 0,$$

где $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0) \in S$. Если $Y_p^{(k)}(\mathbf{e}) \neq 0$, то по лемме 3 все $c_q = 0$, что противоречит определению h . Таким образом, при всех достаточно больших четных k при любом $1 \leq l \leq a_k$ и хотя бы одном p (для которого $Y_p^{(k)}(\mathbf{e}) \neq 0$) функция G_k удовлетворяет всем требованиям утверждения 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4. Пусть $r_1 + r_2 = r > R$. Из утверждения 3 следует существование негармонической функции $g \in C^2(B_r)$, удовлетворяющей условию теоремы 1 в B_r . Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi = 0$ вне B_{r-R} . Тогда функция $f = g * \varphi \in C^\infty(B_R)$ и удовлетворяет условию теоремы 1. Осталось заметить, что при подходящей φ функция f не является гармонической, поскольку $\Delta f = (\Delta g) * \varphi$, а $\Delta g \neq 0$.

Донецкий государственный университет

Поступило

19.08.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Flatto L. The converse of Gauss's theorem for harmonic functions // J. Diff. Equat. 1965. V. 1. № 4. P. 483–490.
- [2] Zalcman L. Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87. № 3. P. 161–175.
- [3] Zalcman L. Mean values and differential equations // Isr. J. Math. 1973. V. 14. P. 339–352.
- [4] Berenstein C. A., Zalcman L. Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. Math. Helv. 1980. V. 55. P. 593–621.
- [5] Berenstein C. A., Gay R. A local version of the two-circlear theorem // Isr. J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
- [6] Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 41–49.
- [7] Беренштейн К. А., Струша Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
- [8] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [9] Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
- [10] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [11] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [12] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [13] Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1977.