Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Знаменский, Л. Н. Знаменская, Спиральная связность сечений и проекций $\mathbb{C}$ -выпуклых множеств, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 359–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:51:03

СПИРАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ СЕЧЕНИЙ И ПРОЕКЦИЙ С-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

С. В. Знаменский, Л. Н. Знаменская

С-выпуклость. *Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ определяется как множество линейных одномерных подпространств в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Будем обозначать буквой p каноническое отображение $\mathbb{C}^{n+1}$ на $\mathbb{CP}^n$. Аналогичное отображение пространства $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ линейных функционалов на $\mathbb{C}^{n+1}$ на *дуальное проективное пространство $\mathbb{CP}^{n*}$* будем обозначать той же буквой.*

Комплексная билинейная форма $\langle z, w \rangle = w(z)$ на $\mathbb{C}^{n+1} \times (\mathbb{C}^{n+1})^*$ устанавливает по обычному правилу

$$l^\perp = \{z : \langle z, w \rangle = 0 \quad \forall w \in l\}$$

взаимно однозначное *отношение ортогональности* между линейными подпространствами дополнительной размерности в $\mathbb{C}^{n+1}$ и $(\mathbb{C}^{n+1})^*$. Отсюда происходит известное *соответствие двойственности* $\widehat{p(l)} = p(l^\perp)$ между плоскостями в $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{CP}^{n*}$, сумма размерностей которых равна $n - 1$. В частности, любой точке $z \in \mathbb{CP}^n$ канонически соответствует гиперплоскость $\widehat{z}$ и наоборот, что позволяет говорить о гиперплоскостях как о точках дуального пространства.

А. Мартино [1] назвал множество *линейно выпуклым* (*linélement convexe*), если через каждую точку его дополнения проходит гиперплоскость, его не задевающая. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{CP}^n$ множество

$$E^* = \{w \in \mathbb{CP}^{n*} : E \cap \widehat{w} = \emptyset\}$$

гиперплоскостей, не заходящих в E , принято называть *сопряженным* к E . Из эквивалентного определения

$$E^* = \mathbb{CP}^{n*} \setminus \bigcap_{z \in E} \widehat{z}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00258.

явно видно, что E^* линейно выпукло. Множество $E^{**} = (E^*)^* \supset E$ будем называть *линейно выпуклой оболочкой* множества E . Эта оболочка есть наименьшее линейно выпуклое множество, содержащее E .

В ряде задач комплексного анализа [2], [3], [4] простой ответ оказался лишь в классе *сильно линейно выпуклых* множеств, т.е. таких линейно выпуклых областей или компактов, сечения которых комплексными прямыми ацикличны [5]–[7] (ацикличность открытого или компактного множества на комплексной проективной прямой означает непустоту и связность как самого множества, так и его дополнения). Это понятие оказалось настолько естественным комплексным аналогом обычной выпуклости, что шведские математики стали называть его более лаконично – *С-выпуклостью* [4], [8].

Все ограниченные линейно выпуклые области с гладкой границей [9], а также все выпуклые области и компакты в $\mathbb{C}^n$ С-выпуклы. Как и линейная выпуклость, С-выпуклость сохраняется при автоморфизмах $\mathbb{C}P^n$.

Геометрические свойства С-выпуклых множеств с большим трудом поддаются исследованиям. В частности, лишь совсем недавно появился пример С-выпуклой области [10], геометрия которой ощутимо отличается от геометрии выпуклых областей: ее граница имеет бесконечную $(2n-1)$ -мерную меру Хаусдорфа, в то время как сама область ограничена.

За более чем пятнадцать лет с момента опубликования известной проблемы Л. А. Айзенберга [11] об аппроксимации областями с гладкими границами в ее решении не удалось получить никаких продвижений. Гипотеза Л. А. Айзенберга утверждает, что любую С-выпуклую область можно аппроксимировать изнутри строго возрастающей последовательностью С-выпуклых областей с дважды гладкими границами.

Ниже вводится понятие, позволяющее уточнить эту гипотезу.

Структурной размерностью $\text{sdim } D$ С-выпуклой области $D \subset \mathbb{C}P^n$ назовем наименьшую размерность m пространства $\mathbb{C}P^m$, в котором существует такое множество D_0 , из которого D получается с помощью операций взятия полного прообраза при подходящем проективном отображении. *Структурной размерностью* $\text{sdim } K$ С-выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}P^n$ назовем наименьшую размерность m содержащей его плоскости. Нетрудно видеть, что структурные размерности С-выпуклого множества F и сопряженного к нему множества F^* всегда совпадают.

Основная лемма.

ЛЕММА. *Следующие условия на односвязную область $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ эквивалентны:*

- (i) *непрерывная однозначная ветвь ψ функции $\ln z$ в D не принимает значений, отличающихся на чисто мнимое $i\tau$, $|\tau| > 2\pi$;*

- (ii) компакт $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит связное замкнутое подмножество T , пересечение которого с любой окружностью с центром в нуле непусто и связно;
- (iii) для любых $0 < r < R$ связная компонента K_r^∞ множества $\{z \in K : |z| \geq r\}$, содержащая ∞ , пересекается со связной компонентой K_0^R множества $\{z \in K : |z| \leq R\}$, содержащей 0;
- (iv) для любого $r > 0$ $K_r^\infty \cap K_0^r \neq \emptyset$;
- (v) компакт $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит замкнутое подмножество T , пересечение которого с любой окружностью с центром в нуле непусто и связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Множество

$$T = K \setminus \left\{ re^{i\theta} : \inf_{|z|=r} \operatorname{Im} \psi(z) < \theta < \sup_{|z|=r} \operatorname{Im} \psi(z) \right\}$$

очевидно удовлетворяет (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Множество $T_r^\infty = \{z \in T : |z| \geq r\}$ связно: его отделенная часть M (отделенной частью множества F будем называть такое его подмножество M , что $\overline{M} \cap (F \setminus M) = M \cap (\overline{F} \setminus M) = \emptyset$) с каждой точкой z_0 содержит $\{z \in T : |z| = |z_0|\}$ и тем самым однозначно определяется по T совокупностью модулей своих точек $M_{|\cdot|} = \{|z| : z \in M\}$. В силу замкнутости T множество M также замкнуто, а вместе с ним и множество $M_{|\cdot|}$. Связность луча (r, ∞) означает, что его нельзя разбить на два замкнутых непересекающихся множества, а значит T_r^∞ также связно, поэтому $K_r^\infty \supset T_r^\infty$. Аналогично, $K_0^R \supset T_0^R$. Поскольку $\{z \in T : |z| = r\} \neq \emptyset$, то $K_r^\infty \cap K_0^R \supset T_r^\infty \cap T_0^R \neq \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). По теореме 6.1.18 [12] множество $K_0^r \cap K_r^\infty$ непусто как пересечение вложенной последовательности непустых компактов вида $K_0^{r+1/n} \cap K_r^\infty$, $n \rightarrow \infty$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Применяя теорему 5 из [13, § 61, п. I] к множествам K_0^r и K_r^∞ , получаем, что либо $X_r = K_0^r \cap K_r^\infty$ связно, либо $K_0^r \cup K_r^\infty$ разбивает $\overline{\mathbb{C}}$, в последнем случае существует непустое открытое множество Ω , не пересекающее D , граница которого $\partial D \subset K_0^r \cup K_r^\infty$. Тогда хотя бы одно из множеств $\{z \in \Omega : |z| \leq r\}$ или $\{z \in \Omega : |z| \geq r\}$ непусто и его объединение с множеством K_0^r или K_r^∞ соответственно связно и лежит в K . Что противоречит построению множеств K_0^r и K_r^∞ . Таким образом, X_r связно.

Определим $T = \bigcup_{r=0}^{\infty} X_r \cup \{\infty\}$. Покажем замкнутость T . Пусть z_0 — предельная точка последовательности $\{z_n\} \subset T$. Переходя к подпоследовательности, можно ограничиться рассмотрением случая $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$,

поскольку случай $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots$ рассматривается аналогично. По определению нужно показать, что $z_0 \in X_{|z_0|} = K_0^{|z_0|} \cap K_{|z_0|}^\infty$. Мы знаем, что $z_j \in K_0^{|z_j|} \subset K_0^{|z_0|}$. Из замкнутости $K_0^{|z_0|}$ $z_0 \in K_0^{|z_0|}$. С другой стороны, пересечение убывающей последовательности континуумов $K_{|z_n|}^\infty$, содержащих точку z_0 , также содержит z_0 и является континуумом по следствию 6.1.19 [12]. Поэтому оно лежит в $K_{|z_0|}^\infty$.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Доказательство связности T получается из доказательства связности множества T_r^∞ в (ii) $\Rightarrow$ (iii) если положить $r = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). В односвязной области $\mathbb{C} \setminus T$ выделяем однозначную ветвь функции $\ln z$. Эта ветвь очевидно не принимает значений, отличающихся на чисто мнимое it , $|t| > 2\pi$. Сужение ее на D будет требуемой функцией.

Двойное отношение. Функция четырех переменных

$$D \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix} = \frac{(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_4)}{(\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)}$$

со значениями в $\overline{\mathbb{C}}$ корректно определена для всех точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, никакие три из которых не равны между собой. Эта функция называется *двойным отношением* и замечательна следующими свойствами:

1) D инвариантна относительно невырожденных дробно-линейных отображений $\psi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, т.е.

$$D \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \psi(\zeta_1) & \psi(\zeta_2) \\ \psi(\zeta_3) & \psi(\zeta_4) \end{bmatrix};$$

2) перестановка строк или столбцов не меняет значение D :

$$D \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix};$$

3) перестановка элементов строки приводит к обратному значению

$$D \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot D \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix} = 1;$$

строка с равными элементами обращает D в 1;

4) столбец с равными элементами обращает D в 0;

5) диагональ с равными элементами обращает D в ∞ ;

$$6) \quad D \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 1;$$

$$7) \quad D \begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} = z.$$

Для точек $z, w \in \mathbb{CP}^n$ и $\zeta, \omega \in \mathbb{CP}^{n*}$ определим двойное отношение $D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ как значение в точке z дробно-линейной функции, отображающей w в 1, с нулевым множеством $\widehat{\zeta}$ и особенностью $\widehat{\omega}$. Функция D корректно доопределяется на все случаи за исключением двух: одна из гиперплоскостей содержит обе точки, одна из точек попадает на пересечение гиперплоскостей. Она обладает свойствами:

1) D инвариантна относительно невырожденных дробно-линейных отображений $\psi: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$, т.е.

$$D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \psi(z) & \psi(w) \\ \psi^*(\zeta) & \psi^*(\omega) \end{bmatrix};$$

2) перестановка строк (или столбцов) не меняет значение D , т.е.

$$D \begin{bmatrix} z & w \\ \xi & \eta \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w & z \\ \xi & \eta \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} x & y \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} y & x \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$$

в предположении, что либо а) z, w, x, y лежат на одной прямой, либо б) ζ, ω, ξ, η , как точки сопряженного проективного пространства, лежат на одной прямой; $z \in \widehat{\zeta}$, $w \in \widehat{\omega}$, $x \in \widehat{\xi}$, $y \in \widehat{\eta}$;

3) перестановка элементов строки приводит к обратному значению

$$D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} \cdot D \begin{bmatrix} w & z \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = 1;$$

строка с равными элементами обращает D в 1;

4) если два элемента столбца инцидентны, то D обращается в 0;

5) если два элемента диагонали инцидентны, то D обращается в ∞ ;

6) если $x \in \widehat{\zeta}$ и $w \in \widehat{\xi}$, то

$$D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} z & x \\ \xi & \omega \end{bmatrix} = 1;$$

7) если $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (1, 0, \dots, 0)$, $\widehat{\zeta} = \{z : z_1 = 0\}$ и $\widehat{\omega}$ — бесконечно удаленная плоскость, то

$$D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = z_1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$ -выпуклое множество, тогда условие $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} \equiv 0$ при $z = w$ или $\widehat{\zeta} = \widehat{\omega}$ выделяет на $F \times F \times F^* \times F^*$ однозначную непрерывную ветвь $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ функции $\ln D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу канонической двойственности и свойства 1) функции D достаточно рассмотреть случай открытого F . Функция $D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ непрерывна на $F \times F \times F^* \times F^*$. Пусть γ кривая, соединяющая точки z, w , в сечении F проективной прямой, проходящей через эти точки. Функция

$$L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = \int_{\gamma} \frac{dD \begin{bmatrix} z & t \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}}{D \begin{bmatrix} z & t \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}} \quad (1)$$

зависит не от выбора кривой γ , а от положения ее концов. Параметризуя сечение F проективной прямой, проходящей через точки z и w , функцией $D \begin{bmatrix} z & t \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$, представим интеграл (1) в виде

$$\int_1^{D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}} \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{\left(D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} - 1 \right) dv}{1 + v \left(D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} - 1 \right)}. \quad (2)$$

Кривая $\tilde{\gamma}$, по которой ведется интегрирование в последнем интеграле, есть параметризация кривой γ функцией $v = D \begin{bmatrix} t & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$, где $\hat{\zeta}_z$ — гиперплоскость, содержащая z и $\hat{\zeta} \cap \hat{\omega}$. Эта же кривая $\tilde{\gamma}$ не будет содержать особенностей подынтегрального выражения в (2) при $z', w', \hat{\zeta}', \hat{\omega}'$ достаточно близких $z, w, \hat{\zeta}, \hat{\omega}$ соответственно. Отсюда вытекает непрерывность функции $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$.

В вырожденном случае $z = w$ в формуле (2) в качестве кривой $\tilde{\gamma}$ можно взять отрезок $[0, 1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$, $n > 1$, S -выпуклое множество, $\text{sdim } F > 1$. Тогда множество значений функции $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ открыто и эта функция не принимает на $F \times F \times F^* \times F^*$ чисто мнимых значений $i\tau$, $|\tau| > 2\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} & \left\{ L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} : z \in F, w \in F, \zeta \in F^*, \omega \in F^* \right\} \\ &= \bigcup_{\substack{w \in F \\ \zeta \in F^* \\ \omega \in F^*}} \left\{ L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} : z \in F \right\} = \bigcup_{\substack{w \in F \\ z \in F \\ \omega \in F^*}} \left\{ L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} : \zeta \in F^* \right\} \end{aligned}$$

есть объединение открытых множеств.

Будем доказывать от противного: пусть нашлась точка $(x_0, y_0, \zeta_0, \omega_0)$ такая, что $L \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ \zeta_0 & \omega_0 \end{bmatrix} = i\tau$, $|\tau| > 2\pi$, и пусть, для определенности, F компактно. Рассмотрим дробно-линейное отображение $\varphi(\zeta) = D \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ \zeta & \omega_0 \end{bmatrix}$ и сечение D множества F^* прямой, проходящей через ζ_0, ω_0 . Так как F^* $\mathbb{C}$ -выпукло, то образ $\varphi(D)$ является односвязной областью в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. При этом непрерывная ветвь функции $\ln t$, выделенная условием $\ln 1 = 0$, принимает в точке $\varphi(\zeta_0)$ значение, запрещенное условием (i) леммы. Таким образом по условию (iii) этой леммы существуют $0 < r < R$ такие, что $K_0^R \cap K_r^\infty = \emptyset$.

Обозначим $\xi_0 \in \mathbb{CP}^{n*}$ точку пересечения прямой, проходящей через ζ_0 и ω_0 , с гиперплоскостью $\widehat{x_0}$ и $\eta_0 \in \mathbb{CP}^{n*}$ – пересечение той же прямой с гиперплоскостью $\widehat{y_0}$. Тогда по свойству 2) функции D для $z \in \zeta$ выполняется

$$\varphi(\zeta) = \tilde{\varphi}(z) = D \begin{bmatrix} z & w \\ \xi_0 & \eta_0 \end{bmatrix}, \quad w \in \widehat{\omega_0}.$$

Пусть w_0 точка пересечения прямой, проходящей через x_0 и y_0 , с гиперплоскостью $\widehat{\omega_0}$. Рассмотрим каноническое отображение ψ_{y_0} пространства $\mathbb{CP}^n \setminus \{y_0\}$ в $\mathbb{CP}^{n-1}$ и выберем неоднородные координаты $s \in \mathbb{C}^n$ в последнем так, чтобы $\psi_{y_0}(\widehat{\omega_0})$ было бесконечно удаленной плоскостью, а $\psi_{y_0}(x_0) = 0$.

Положим

$$m_r = \sup_{\{z \in F: \tilde{\varphi}(z) \in K_r^\infty, |\tilde{\varphi}(z)|=r\}} |\psi_{y_0}(z)|,$$

$$m_R = \sup_{\{z \in F: \tilde{\varphi}(z) \in K_0^R, |\tilde{\varphi}(z)|=r\}} |\psi_{y_0}(z)|.$$

Выясним соотношение между этими константами. Из определения сопряженного множества точка ζ прямой, проходящей через ζ_0 и ω_0 , лежит в D в том и только в том случае, когда $\tilde{\zeta}$ не пересекает F .

1. Пусть $z_r \in F$ – экстремальное для m_r . В силу $\mathbb{C}$ -выпуклости множества F его сечение F_r прямой, проходящей через точки z_r и x_0 , связно. Функция $\tilde{\varphi}$ на этом сечении не принимает значений из области $\varphi(D)$. Так как $\tilde{\varphi}(F_r) \subset K = \overline{\mathbb{C}} \setminus \varphi(D)$ и связно, то существует точка $z'_r \in F_r$, для которой $|\tilde{\varphi}(z'_r)| = R$ и $\tilde{\varphi}(z'_r) \in K_0^R$. Неоднородные координаты $(s, t) = (\psi_{y_0}(z), \tilde{\varphi}(z))$ точек $x_0 = (0, 0)$, $z_r = (\psi_{y_0}(z_r), \tilde{\varphi}(z_r))$ и $z'_r = (\psi_{y_0}(z'_r), \tilde{\varphi}(z'_r))$, лежащих на одной прямой, удовлетворяют соотношению $|\psi_{y_0}(z'_r)| = \frac{R}{r} |\psi_{y_0}(z_r)|$. Откуда $m_R \geq \frac{R}{r} m_r$.

2. Пусть теперь $z_R \in F$ – экстремальное для m_R . Аналогично рассуждая, приходим к существованию точки $z'_R \in F_R$, для которой $|\tilde{\varphi}(z'_R)| = r$ и $\tilde{\varphi}(z'_R) \in K_r^\infty$. В неоднородных координатах (s, t) прямая, проходящая

через точки z_R и z'_R , параллельна оси $s = 0$ (она пересекается с осью в бесконечно удаленной точке y_0) и поэтому $|\psi_{y_0}(z'_R)| = |\psi_{y_0}(z_R)|$. Отсюда противоречие с $R > r$: $m_R \geq \frac{R}{r} m_r \geq \frac{R}{r} m_R$.

Спиральная связность. Будем говорить, что компакт $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ *спирально соединяет точки* 0 и ∞ , если его пересечение окружностью любого радиуса с центром в нуле непусто и связно.

Заменить 0 и ∞ в этом определении на произвольные точки a и b можно с помощью дробно-линейного автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$: будем называть компакт $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ *спирально соединяющим точки* a и b , если $\{z \in K : D \begin{bmatrix} z & c \\ a & b \end{bmatrix} = r\}$ связно и непусто для любого $r > 0$. В этом определении c произвольная отличная от a и b точка, переходящая в 1 при этом дробно-линейном отображении.

Множество $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ назовем *спирально связным*, если любые две его точки спирально соединяются некоторым компактом $K \subset M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Следующие условия на открытое или замкнутое множество $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ эквивалентны:*

- (i) M спирально связно и $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ связно;
- (ii) $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ спирально связно и M связно;
- (iii) на $M \times M \times \overline{\mathbb{C}} \setminus M \times \overline{\mathbb{C}} \setminus M$ существует непрерывная ветвь $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ функции $\ln D \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$, не принимающая значений $i\tau$, $|\tau| > 2\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для определенности, M открыто.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Воспользуемся предложением 1. Нужно показать, что $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ не принимает значений $i\tau$, $|\tau| > 2\pi$. В силу инвариантности двойного отношения можно считать $z = 0$ и $w = \infty$. Рассмотрим компакт $K \subset M$, спирально соединяющий точки 0 и ∞ . В дополнении к компакт K однозначно выделяется непрерывная ветвь $\varphi(t)$ функции $\ln D \begin{bmatrix} z & w \\ t & \omega \end{bmatrix} = \ln \frac{t}{\omega}$, равная нулю в точке ω и не принимающая значений $i\tau$, $|\tau| > 2\pi$. Тогда из $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix} = \varphi(\zeta)$ получаем требуемое условие.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) вытекает из предложения 1 и леммы.

Покажем, что из (iii) вытекает связность множеств M и $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$. Связность множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ докажем от противного: пусть ζ_0 и ω_0 лежат в разных связных компонентах множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$, а $w_0 \in M$. С точностью до автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$ можно считать, что $\zeta_0 = 0$, $\omega_0 = \infty$ и $w_0 = 1$. Тогда связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$, содержащая 0, ограничена и, следовательно, существует простая замкнутая кривая, отделяющая ее от остальных компонент. Приращение функции $\arg z$ по этой кривой равно 2π , что противоречит условию (iii).

Для доказательства связности множества M также предположим противное и рассмотрим точки z_0 и w_0 , лежащие в разных связных компонентах множества M и $\zeta_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M$. С точностью до автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$ можно считать, что $z_0 = 0$, $w_0 = \infty$, $\zeta_0 = 1$. Покажем, что существует окрестность Ω множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$, в которую однозначно аналитически продолжается функция $\varphi(\omega) = L \begin{bmatrix} z_0 & w_0 \\ \zeta_0 & \omega \end{bmatrix}$. Для этого выберем $\varepsilon(\omega)$ в каждой точке $\omega \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M$ так, чтобы в $3\varepsilon(\omega)$ -окрестности точки ω функция φ не принимала значений, отличающихся от $\varphi(\omega)$ более, чем на π . Тогда на открытом множестве $\Omega = \bigcup_{\omega \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M} \{t : |t - \omega| < \varepsilon(\omega)\}$ однозначно определено искомое продолжение. Доказательство того, что точки 0 и ∞ лежат в одной связной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ повторяет доказательство аналогичного утверждения для множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из уже доказанной связности множеств M и $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ и условия (v) леммы.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Без ограничения общности достаточно, считая, что M содержит точки 0 и ∞ , построить компакт $K \subset M$, спирально соединяющий точки 0 и ∞ . В силу леммы для этого достаточно однозначно аналитически продолжить функцию $\varphi(\omega) = L \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \zeta_0 & \omega \end{bmatrix}$ в окрестности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ так, чтобы сохранилось условие (i) леммы.

Определим

$$\tilde{K} = \{re^{i\theta} : \exists \omega_1, \omega_2 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M, |\omega_1| = |\omega_2| = r, \operatorname{Im} \varphi(\omega_1) \leq \theta \leq \operatorname{Im} \varphi(\omega_2)\}.$$

Из построения видно, что функция φ продолжается на $\tilde{K}$ с сохранением своего свойства.

Осталось показать, что продолженная в Ω функция φ не принимает запрещенных значений. Предположим противное: пусть $\operatorname{Im} \varphi(\omega_1) > \operatorname{Im} \varphi(\omega_2) + 2\pi$, существуют точки $\omega'_1, \omega'_2 \in \tilde{K}$, $|\omega_i - \omega'_i| < \varepsilon(\omega'_i)$, и при $|\omega - \omega'_i| < 3\varepsilon(\omega'_i)$ выполняется $|\varphi(\omega) - \varphi(\omega'_i)| < \pi$, $i = 1, 2$, для определенности, пусть $\varepsilon(\omega'_1) > \varepsilon(\omega'_2)$. Тогда φ не принимает значений с $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi(\omega_1) - 2\pi$, $|e^{\varphi(\omega)} - e^{\varphi(\omega_1)}| < 2\varepsilon(\omega'_1)$. Пусть отрезок $I = [|\omega_1| - \varepsilon(\omega'_1), |\omega_1| + \varepsilon(\omega'_1)]$ распадается на два непустых множества:

$$\{r \in I : \exists \theta, re^{i\theta} \in \tilde{K}, \operatorname{Im} \varphi(re^{i\theta}) > \operatorname{Im} \varphi(\omega_1) - 2\pi\} \ni \omega'_1$$

и

$$\{r \in I : \exists \theta, re^{i\theta} \in \tilde{K}, \operatorname{Im} \varphi(re^{i\theta}) < \operatorname{Im} \varphi(\omega_1) - 2\pi\} \ni \omega'_2.$$

Из построения видно, что множества не пересекаются и содержат все свои предельные точки, что противоречит связности отрезка.

ТЕОРЕМА. Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$, $n > 1$, $\mathbb{C}$ -выпуклое множество, $\text{sdim } F > 1$. Тогда множество значений произвольной заданной на нем дробно-линейной функции спирально связно и сечение его любой прямой также спирально связно

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 2. В силу линейной выпуклости множества F для любой прямой l , пересекающей F , множество значений функции $L \begin{bmatrix} z & w \\ \zeta & \omega \end{bmatrix}$ на $(F \cap l) \times (F \cap l) \times (l \setminus F) \times (l \setminus F)$ является подмножеством множества значений функции L на $F \times F \times F^* \times F^*$. Применяя предложение 3, получаем требуемое утверждение для сечений.

Оставшаяся часть утверждения получается из тех же результатов еще проще.

Доказанное утверждение позволяет уточнить упомянутую выше гипотезу Л. А. Айзенберга.

ПРИМЕР 1 ($\mathbb{C}$ -выпуклая область, не аппроксимируемая изнутри $\mathbb{C}$ -выпуклыми компактами). Рассмотрим $\mathbb{C}$ -выпуклую область $D = (\mathbb{C} \setminus M) \times \mathbb{C}^{n-1}$, где M есть объединение положительного луча вещественной оси с отрезком $[0, 8 + 8i]$. Если бы D содержала $\mathbb{C}$ -выпуклый компакт, содержащий точки $(2 + i, \mathbf{0})$ и $(8 - i, \mathbf{0})$ и не лежащий в координатной прямой, то дополнение к сечению этого компакта координатной прямой было бы спирально связно, содержало бы M и не содержало бы указанные точки. В том, что это не верно, легко убедиться, рассмотрев окружность с центром в точке $8 + 8i$ радиуса 10.

ПРИМЕР 2 ($\mathbb{C}$ -выпуклый компакт, не аппроксимируемый извне последовательностью $\mathbb{C}$ -выпуклых областей). Рассмотрим отрезок параболы на координатной прямой: $K = \{(x + ix^2, \mathbf{0}) : -4 \leq x \leq 4\}$. Поскольку $\mathbb{C}$ -выпуклый компакт K не является спирально связным, то L принимает мнимое значение по модулю большее 2π на некотором наборе (z, w, ζ, ω) из $K \times K \times K^* \times K^*$. Для области $D \supset K$ настолько близкой к K , что $\hat{\zeta} \cap D = \emptyset$ и $\hat{\omega} \cap D = \emptyset$, значение L очевидно остается тем же самым, что противоречит $\mathbb{C}$ -выпуклости либо ограниченности области D .

Теорема и рассмотренные примеры показывают, что гипотеза Л. А. Айзенберга должна быть подправлена следующим образом.

ГИПОТЕЗА 1. Для любой $\mathbb{C}$ -выпуклой области $D \subset \mathbb{CP}^n$, структурная размерность которой превышает 1, существует такая последовательность линейно выпуклых компактов $K_1 \in K_2 \in \dots$ с гладкими границами, для которой $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

ГИПОТЕЗА 2. Для любого $\mathbb{C}$ -выпуклого компакта $K \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, структурная размерность которого превышает 1, существует такая последовательность линейно выпуклых областей $D_1 \ni D_2 \ni \dots$ с гладкими границами, для которой $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} D_j$.

Красноярский государственный университет
E-mail: znamensk@math.kgu.krasnoyarsk.su

Поступило
18.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Martineau A. Sur la notion d'ensemble fortement linéalement convexe // Anais. Acad. Brasil. Ciênc. 1968. V. 4. №4. P. 427–435.
- [2] Знаменский С.В. Сильная линейная выпуклость // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1988. С. 39–52.
- [3] Знаменский С.В. Томография в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. №5. С. 1037–1040.
- [4] Andersson M., Passare M. Complex Kergin interpolation // J. Approxim. Theory. 1991. V. 64. №2. P. 214–225.
- [5] Знаменский С.В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций // Сиб. матем. ж. 1985. Т. 26. №3. С. 32–43.
- [6] Знаменский С.В. Геометрический критерий сильной линейной выпуклости // Функцион. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. №3. С. 83–84.
- [7] Зелинский Ю.Б. О геометрических критериях сильной линейной выпуклости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. №1. С. 11–13.
- [8] Andersson M. Cauchy–Fantappiè–Leray formulas with local sections and the inverse Fantappiè transform // Bull. Soc. Math. France. 1992. V. 120. P. 113–128.
- [9] Южаков А.П., Кривоколеско В.П. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. ж. 1971. №2. С. 452–458.
- [10] Знаменский С.В. Пример сильно линейно выпуклой области с неспрямляемой границей // Матем. заметки. 1994. Т. 57. №6. С. 851–861.
- [11] Айзенберг Л.А. Линейные функционалы в пространствах аналитических функций и линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ // Исследования по линейным операторам и теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 81. Л.: Наука, 1978. С. 29–32.
- [12] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [13] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.