Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кисиль, Локальные алгебры двусторонних
сверток на группе Гейзенберга, *Матем. заметки*,
1996, том 59, выпуск 3, 370–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:09:58

ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ДВУСТОРОННИХ СВЕРТОК НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В. В. Кисиль

1. Введение

Операторы свертков на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ имеют обширные применения в комплексном анализе (см. [1], [2] и литературу в них) и математической физике [3]. Особый интерес представляют свертки с сингулярными ядрами, которые являются интересным аналогом сингулярных интегральных операторов и реализуют, например, ортопроектор Сеге на пространство Харди и лапласиан Кона [2].

Введенные в работе [4] *двусторонние* свертки на $\mathbb{H}^n$ позволяют дать замкнутое изложение для одновременного изучения операторов левой и правой свертков, возникающих в силу некоммутативности групповой операции на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Двусторонние свертки имеют приложение в комплексном анализе (см. описание теплицевых операторов в [5, § 10]). Использование двусторонних свертков на $\mathbb{H}^n$ в квантовой механике можно найти в [6].

При изучении алгебры операторов, порожденной двусторонними свертками и операторами умножения на непрерывные на $\mathbb{H}^n$ функции, естественно провести локализацию по точкам группы $\mathbb{H}^n$. После этого, свойства исходной алгебры могут быть восстановлены через свойства полученных локальных алгебр. В работе [7] были найдены операторы локально эквивалентные двусторонним сверткам при такой локализации. Ими оказались тройки операторов, состоящие из операторов правой и левой свертков на группе Гейзенберга и некоторой евклидовой свертки. Однако, в указанной работе не был установлен закон композиции таких троек, который, как оказывается, тесно связан с групповой операцией в $\mathbb{H}^n$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда CONACYT (Мексика), грант № 1821-E9211.

Цель настоящей работы заключается в установлении этого закона композиции, после чего оказывается возможным дать доказательство основной теоремы, сформулированной в [8].

2. Предварительные сведения

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ [2]–[4], [7] является нильпотентной группой Ли длины 2, как C^∞ -многообразие она совпадает с $\mathbb{R}^{2n+1}$. Если ее элемент g записать в экспоненциальных координатах $g = (t, z) \in \mathbb{H}^n$, где $t \in \mathbb{R}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + iy_k$, то групповой закон на $\mathbb{H}^n$ примет следующий вид

$$\begin{aligned} (t, z) * (t', z') &= \left(t + t' - 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n z'_k \bar{z}_k, z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n \right) \\ &= \left(t + t' + 2 \sum_{k=1}^n (x_k y'_k - x'_k y_k), \dots, x_k + x'_k, \dots, y_k + y'_k, \dots \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Отметим на $\mathbb{H}^n$ группу неизотропных растяжений $\{\delta_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}^+\}$:

$$\delta_\tau(t, z) = (\tau^2 t, \tau z). \quad (2)$$

Функции, обладающие свойством

$$(f \circ \delta_\tau)(z) = \tau^k f(z),$$

будем называть δ_τ -однородными степенями k . Класс таких функций, имеющих непрерывное сужение на неизотропную сферу $\Omega^{2n} := \{(t, z) \in \mathbb{H}^n \mid t^4 + |z|^2 = 1\}$, будем обозначать как $H_\delta^k(C(\Omega^{2n}))$. Отметим, что δ_τ -однородные функции фиксированной степени полностью определяются своими значениями на компактном множестве Ω^{2n} .

Левая и правая мера Хаара на $\mathbb{H}^n$ (мера инвариантная относительно действия группы слева и справа) совпадает с мерой Лебега в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Введем в $L_2(\mathbb{H}^n)$ правое π_r и левое π_l регулярные представления $\mathbb{H}^n$

$$[\pi_r(g)f](h) = f(h * g), \quad [\pi_l(g)f](h) = (g^{-1} * h).$$

Эти представления, как обычно, порождают соответственно правое и левое представления групповой алгебры группы $\mathbb{H}^n$. С их помощью можно ввести операторы левой K_l , правой K_r [1] и двусторонней K [4] свертки

$$\begin{aligned} K_{l,r} &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{H}^n} k_{lr}(g) \pi_{l,r}(g) dg, \\ K &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} k(g_1, g_2) \pi_l(g_1) \pi_r(g_2) dg_1 dg_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь изучаются только свертки с ядрами вида $k_{lr}(g) \in H_\delta^k(C(\Omega^{2n}))$, $k(g) \in H_\delta^k(C(\Omega^{2n})) \otimes H_\delta^k(C(\Omega^{2n}))$, $N = 2n + 1$. Так как левые сдвиги π_l коммутируют с правыми π_r , то операторы левой K_l (правой K_r) свертки коммутируют с правыми (левыми) сдвигами π_r (π_l) и свертками K_r (K_l).

Мы будем использовать при изучении правых сверток технику псевдодифференциальных операторов (ПДО). Для дальнейшего нам достаточно следующих определений (см. [9], [10]). Пусть функция $a(x, \xi)$ на $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $N = 2n + 1$, удовлетворяет оценкам

$$|D_x^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

где α, β – мультииндексы. Класс таких функций обычно называют *пространством символов порядка m* , и обозначают S^m . Для таких функций определяется ПДО $a(x, D)$ с *правым символом* следующим образом [9, с. 95]:

$$\begin{aligned} a(x, D)u(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi. \end{aligned}$$

Нам дополнительно потребуются такие свойства вейлевского исчисления псевдодифференциальных операторов.

1) Композиция двух псевдодифференциальных операторов $\text{Op } a_1(x, \xi)$ и $\text{Op } a_2(x, \xi)$ является псевдодифференциальным оператором $\text{Op } a(x, \xi)$ с символом, определяемым равенством [9, 18.5.6.]

$$\begin{aligned} \text{Op } a(x, \xi) &= \text{Op } a_1(x, \xi) \circ \text{Op } a_2(x, \xi) = \text{Op}(a_1(x, \xi) \# a_2(x, \xi)) \\ &= \text{Op} \left(\sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{i}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{i}{2}\right)^{\alpha_2} \right. \\ &\quad \left. \times D_{\xi}^{\alpha_1} D_y^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} D_{\eta}^{\alpha_2} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \right) \Big|_{(x, \xi) = (y, \eta)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Всюду далее обозначение $a \# b$ используется для символа ПДО (ядра свертки), являющегося композицией $A \circ B$ псевдодифференциальных операторов (сверток) A и B с символами (ядрами) a и b соответственно.

2) Норма оператора $\text{Op } a(x, \xi)$ (и, тем более, существенная норма – норма по модулю идеала компактных операторов) оценивается через конечное число частных производных от функции $a(x, \xi)$ [9, 18.6.1]. Следовательно,

значение частных производных степени более некоторого l не влияют на норму.

3) Существенная норма псевдодифференциального оператора оценивается C -нормой его символа, т.е. равномерной нормой в пространстве непрерывных функций. Таким образом, можно приблизить псевдодифференциальный оператор $\text{Op } a(x, \xi)$ оператором $\text{Op } a_1(x, \xi)$ по существенной норме так, что символ $a(x, \xi)$ будет удовлетворять некоторым условиям на частные производные. А именно, функция $\widehat{k}^\infty(t, x, y) \in C^\infty$, приближающая функцию $\widehat{k}(t, x, y)$ по C -норме, должна удовлетворять условию

$$D^{(\alpha)} \widehat{k}^\infty(t, x, y) \Big|_{(t, x, y) = (0, -y_0, x_0)} = 0 \quad (5)$$

для всех $0 < \alpha \leq l$. Ясно, что подпространство в C^∞ , определенное условием (5), является плотным в пространстве символов S^0 .

Свертки (3) на группе Гейзенберга являются ПДО [1, с. 9] и имеют символ [4]

$$\begin{aligned} a_\tau(h, \nu) &= \widehat{k}(-{}^tL_{-h}^{-1}\nu, {}^tL_h^{-1}\nu) \\ &= \widehat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x, \lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $L_h = I - \frac{1}{2} \text{ad } h$, $(\text{ad } h)g = [h, g]$, $h = (t, x, y) \in \mathbb{H}^n$ и $\nu = (\lambda, \xi, \eta)$ – двойственные к h переменные в смысле преобразования Фурье.

Существенную роль в наших исследованиях будут играть методы, развитые в работе [11]. Напомним определение из [11]: два оператора *локального типа* K_1 и K_2 называются *эквивалентными* ($K_1 \stackrel{h_0}{\sim} K_2$) в точке $h_0 \in \mathbb{H}^n$, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} ||| \chi_{\delta, h_0} (K_1 - K_2) ||| = 0,$$

где χ_{δ, h_0} есть функция, равная 1 в δ -окрестности точки h_0 и равная 0 вне 2δ -окрестности этой точки, а $||| \cdot |||$ обозначает существенную норму – норму по модулю компактных операторов. Так, например [11], оператор умножения на непрерывную функцию $a(h)$ в точке h_0 эквивалентен оператору умножения на скаляр $a(h_0)I$.

Нам необходим основной результат работы [7].

ТЕОРЕМА 1. В точке (t_0, x_0, y_0) , для которой $(x_0, y_0) \neq 0$, двусторонняя свертка с ядром $k(g_1, g_2)$ и символом соответствующего псевдодифференциального оператора

$$\omega_K = \widehat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x, \lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x)$$

локально эквивалентна сумме операторов левой, правой и обычной (евклидовой) свертки. При этом каждый из указанных операторов имеет такой символ:

левая свертка: $\omega_l = \widehat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x, 0, -y_0, x_0)$;

правая свертка: $\omega_r = \widehat{k}(0, -y_0, x_0, \lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x)$;

обычная свертка:

$$\begin{aligned} \omega_e = & \widehat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y_0, -\eta + 2\lambda x_0, \lambda, \xi - 2\lambda y_0, \eta + 2\lambda x_0) \\ & - \widehat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y_0, -\eta + 2\lambda x_0, 0, -y_0, x_0) \\ & - \widehat{k}(0, -y_0, x_0, \lambda, \xi - 2\lambda y_0, \eta + 2\lambda x_0). \end{aligned}$$

Итак, как установлено в [7], двусторонняя свертка с символом ω_K в точках вида (t_0, x_0, y_0) , для которых $(x_0, y_0) \neq 0$, локально эквивалентна сумме трех операторов, соответствующих левой (с символом ω_l), правой (с символом ω_r) и обычной (евклидовой – с символом ω_e) сверткам. В дальнейшем мы будем рассматривать этот локальный представитель, являющийся суммой трех операторов ($\text{Op } \omega_l + \text{Op } \omega_r + \text{Op } \omega_e$), как набор их символов $(\omega_l, \omega_r, \omega_e)$ и говорить о *тройках операторов*, заданных своими символами.

Для процедуры нам понадобится следующий критерий из [12].

ТЕОРЕМА 2. *Псевдодифференциальный оператор $\text{Op } a$ с символом $a(h, \nu)$ принадлежит алгебре операторов, порожденной правыми свертками на группе Гейзенберга и операторами умножения на непрерывные функции, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия.*

1. Для всех $h_0 \in \mathbb{H}^n$ существует функция $\widehat{k}_{h_0}(u) \in H_\delta^0(C(\Omega^{2n}))$, определяемая равенством

$$\widehat{k}_{h_0}(u) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} a(h_0, L_{h_0}^* \delta_\rho u). \quad (7)$$

2. Заданное в (7) отображение, суженное на Ω^{2n} , является непрерывным отображением из $\mathbb{H}^n$ в $C(\Omega^{2n})$.

Здесь $L_{h_0} = I + \frac{1}{2} \text{ad } h_0$, $L_{h_0}^*$ – сопряженный к нему, и δ_ρ есть изотропное растяжение (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что свертка с ядром $k_{h_0}(u)$, определяемым (7), локально эквивалентна в точке h_0 оператору $\text{Op } a$.

3. Алгебраическая структура локальных алгебр

Поставим вопрос к теореме 1: каким образом по известному символу ω_K можно найти символ ω_r (ω_l, ω_e)? Для построения символов ω_r и ω_l используем теорему 2 о принадлежности алгебре, порожденной правыми (левыми) свертками и операторами умножения на непрерывные функции. После этого символ ω_e может быть найден в соответствии с теоремой 1. Детальное описание этого построения дает

ПРОЦЕДУРА. Построение символов ω_l, ω_r и ω_e односторонних сверток состоит из таких шагов.

1. Находим преобразование Фурье $\widehat{k}_l$ ($\widehat{k}_r$) ядра соответствующей свертки, исходя из символа двусторонней свертки $\omega_K(t, x, y, \lambda, \xi, \eta)$, с помощью такого предельного перехода (см. (7))

$$\widehat{k}_{l(r)}(t, x, y) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_K(t_0, x_0, y_0, \mp \rho^2 t, \mp \rho x + 2\rho^2 t y_0, \mp \rho y - 2\rho^2 t x_0). \quad (8)$$

2. По вычисленной в п. 1 функции $\widehat{k}_l$ ($\widehat{k}_r$) строится символ псевдодифференциального оператора, соответствующего левой (правой) свертке (см. (6))

$$\omega_{l(r)}(t, x, y, \lambda, \xi, \eta) = \widehat{k}_{l(r)}(\mp \lambda, \mp \xi - 2\lambda y, \mp \eta + 2\lambda x).$$

3. Символ $\omega_e(\lambda, \xi, \eta)$ обычной свертки строится по следующему правилу: в разности символов оператора двусторонней свертки ω_K и уже построенных символов операторов левой ω_l и правой ω_r свертки $[\omega_K - \omega_l - \omega_r](t, x, y, \lambda, \xi, \eta)$ выполняется подстановка $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$ (см. теорему 1). Полученный символ зависит только от двойственных переменных λ, ξ, η и поэтому, в самом деле, является символом обычной (евклидовой) свертки.

Отметим одно свойство символа $\omega_e(\lambda, \xi, \eta)$: если от этой функции взять пределы вида (8), то получим константу

$$\begin{aligned} \omega_e(0, -y_0, x_0) &= -\widehat{k}(0, -y_0, x_0, 0, -y_0, x_0) = -\widehat{k}_l(0, -y_0, x_0) \\ &= -\omega_l(0, -y_0, x_0) = -\widehat{k}_r(0, -y_0, x_0) = -\omega_r(0, -y_0, x_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее мы используем для краткости обозначение

$$\omega_{l,r}(0, -y_0, x_0) := \widehat{k}_{l,r}(0, -y_0, x_0)$$

вместо полного $\omega_{l,r}(t, x, y, 0, -y_0, x_0)$, в котором значения (t, x, y) не играют роли.

На основании сформулированной процедуры построения символов ω_l , ω_r и ω_e , мы сейчас выведем алгебраические операции в локальных алгебрах.

Пусть у нас есть две двусторонние свертки K и K' с символами ω_K и $\omega_{K'}$ соответственно. Согласно теореме 1, эти операторы в точке (t_0, x_0, y_0) эквивалентны тройкам операторов $(\omega_l, \omega_r, \omega_e)$ и $(\omega'_l, \omega'_r, \omega'_e)$. Построим тройку операторов, локально эквивалентную оператору двусторонней свертки, являющейся композицией двух введенных нами сверток $\text{Op}(\omega_K) \circ \text{Op}(\omega_{K'})$. Находим

$$\begin{aligned} \text{Op}(\omega_K) \circ \text{Op}(\omega_{K'}) &\stackrel{h_0}{\sim} \text{Op}(\omega_l + \omega_r + \omega_e) \circ \text{Op}(\omega'_l + \omega'_r + \omega'_e) \\ &= \text{Op}((\omega_l + \omega_r + \omega_e) \# (\omega'_l + \omega'_r + \omega'_e)) \\ &= \text{Op}(\omega_l \# \omega'_l + \omega_l \# \omega'_r + \omega_l \# \omega'_e + \omega_r \# \omega'_l + \omega_r \# \omega'_r \\ &\quad + \omega_r \# \omega'_e + \omega_e \# \omega'_l + \omega_e \# \omega'_r + \omega_e \# \omega'_e). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим теперь операторы, локально эквивалентные каждому из девяти слагаемых последнего выражения. Ясно, что композиция двух правых (левых, обычных) сверток есть правая (левая, обычная) свертка, а для таких сверток локальными представителями являются они сами [7]. Заметим, что процедура ставит в соответствие оператору левой свертки $\text{Op}(\omega_l)$ тройку

$$(\widehat{k}_l(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x), \widehat{k}_l(0, -y_0, x_0), -\widehat{k}_l(0, -y_0, x_0)), \quad (11)$$

и правой свертки $\text{Op}(\omega_r) -$

$$(\widehat{k}_r(0, -y_0, x_0), \widehat{k}_r(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x), -\widehat{k}_r(0, -y_0, x_0)). \quad (12)$$

Тройкам (11) и (12) очевидным образом эквивалентны тройки

$$(\widehat{k}_l(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x), 0, 0), \quad (0, \widehat{k}_r(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x), 0)$$

соответственно.

Композиция $\text{Op} \omega = \text{Op}(\omega_l \# \omega_r)$ правой свертки с символом

$$\omega_r = \widehat{k}_r(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x)$$

и левой свертки с символом

$$\omega_l = \widehat{k}_l(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x)$$

есть двусторонняя свертка с символом

$$\omega = \widehat{k}_l(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x) \cdot \widehat{k}_r(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x).$$

Этот результат можно получить из построения символа псевдодифференциального оператора, соответствующего композиции сверток $K_l \circ K_r$ (см. (6)). Другим способом этот результат следует из формулы (4), в которой исчезают все слагаемые кроме первого в силу особенностей строения символов односторонних сверток на $\mathbb{H}^n$.

Используя результат теоремы 1, получаем, что оператор двусторонней свертки $\text{Op}(\omega_l \# \omega_r)$ локально эквивалентен такой тройке операторов

$$\begin{aligned} \text{левая: } & \widehat{k}_l(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x) \cdot \widehat{k}_r(0, -y_0, x_0); \\ \text{правая: } & \widehat{k}_l(0, -y_0, x_0) \cdot \widehat{k}_r(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x); \\ \text{евклидова: } & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \widehat{k}_l(\lambda, \xi - 2\lambda y_0, \eta + 2\lambda x_0) \cdot \widehat{k}_r(-\lambda, -\xi - 2\lambda y_0, -\eta + 2\lambda x_0) \\ & - \widehat{k}_l(\lambda, \xi - 2\lambda y_0, \eta + 2\lambda x_0) \cdot \widehat{k}_r(0, -y_0, x_0) \\ & - \widehat{k}_l(0, -y_0, x_0) \cdot \widehat{k}_r(-\lambda, -\xi - 2\lambda y_0, -\eta + 2\lambda x_0). \end{aligned}$$

Займемся изучением композиции правых (левых) сверток с обычными свертками. В соответствии с (4) вычисляем

$$\begin{aligned} & (\omega_e \# \omega_r)(t, x, y, \lambda, \xi, \eta) \\ & = \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{i}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{i}{2}\right)^{\alpha_2} \\ & \quad \times D_{\zeta}^{\alpha_1} D_{z'}^{\alpha_1} D_z^{\alpha_2} D_{\zeta'}^{\alpha_2} \omega_e(\lambda, \zeta) \omega_r(z', \lambda', \zeta') \Big|_{(z, \zeta) = (z', \zeta')} \\ & = \sum_{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{i^{\alpha_1}}{2} D_{\zeta}^{\alpha_1} D_{z'}^{\alpha_1} \omega_e(\lambda, \zeta) \omega_r(z', \lambda', \zeta') \Big|_{(z, \zeta) = (z', \zeta')}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь применялись обозначения $z = (x, y)$ и $\zeta = (\xi, \eta)$ для переменных, двойственных в смысле преобразования Фурье, и использовался тот факт, что символ правой свертки не зависит от t , а символ евклидовой свертки – от всех прямых переменных t, x, y . Поэтому все соответствующие частные производные – нулевые. Применим теперь процедуру к полученному выражению. Используя соотношения (5) и (9), получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow \infty} D_{\zeta}^{\alpha_1} \omega_e(\mp \rho^2 t, \mp \rho x + 2\rho^2 t y_0, \mp \rho y - 2\rho^2 t x_0) \\ & = \begin{cases} \widehat{k}(0, -y_0, x_0, 0, -y_0, x_0) & \text{при } \alpha_1 = 0, \\ 0 & \text{при } \alpha_1 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для символа правой свертки имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_r(t_0, x_0, y_0, -\rho^2 t, -\rho x + 2\rho^2 t y_0, -\rho y - 2\rho^2 t x_0) &= k_r(0, -y_0, x_0), \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_r(t_0, x_0, y_0, \rho^2 t, \rho x + 2\rho^2 t y_0, \rho y - 2\rho^2 t x_0) &= k_r(t, x, y).\end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемый оператор (13) локально эквивалентен правой свертке и в качестве локального представителя имеет тройку

$$(\omega_e(0, -y_0, x)\omega_r(0, -y_0, x), \omega_e(0, -y_0, x)\omega_r, -\omega_e(0, -y_0, x)\omega_r(0, -y_0, x)).$$

Для остальных комбинаций гейзенберговских и евклидовых свертков получаются аналогичные результаты.

На основании всего сказанного, мы теперь можем выписать левые части в локальных эквивалентностях для каждого из девяти слагаемых в (10), которые получаются с помощью процедуры:

$$\begin{aligned}\omega_l \# \omega'_l &\stackrel{l}{\sim} \omega_l \# \omega'_l, \\ \omega_l \# \omega_r &\stackrel{l}{\sim} \omega_l \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0), \\ \omega_l \# \omega'_e &\stackrel{l}{\sim} \omega_l \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_l \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) \quad (\text{см. (9)}), \\ \omega_r \# \omega'_l &\stackrel{l}{\sim} \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l, \\ \omega_r \# \omega'_r &\stackrel{l}{\sim} (\omega_r \# \omega'_r)(0, -y_0, x_0) = \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0) \quad (\text{см. (5)}), \\ \omega_r \# \omega'_e &\stackrel{l}{\sim} \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0), \\ \omega_e \# \omega'_l &\stackrel{l}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l = -\omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l \quad (\text{см. (9)}), \\ \omega_e \# \omega'_r &\stackrel{l}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0) = -\omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0), \\ \omega_e \# \omega'_e &\stackrel{l}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = \omega(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0).\end{aligned}$$

(Мы обозначаем через $a \stackrel{l}{\sim} b$ то, что два оператора $\text{Op } a$ и $\text{Op } b$ имеют одинаковую левую свертку в тройках операторов локально эквивалентных им. Аналогично будут пониматься обозначения $a \stackrel{r}{\sim} b$ и $a \stackrel{e}{\sim} b$ для правых и евклидовых свертков соответственно.)

Если просуммировать все девять левых эквивалентностей, то слагаемые, соответствующие $\omega_l \# \omega'_r$ и $\omega_l \# \omega'_e$, $\omega_r \# \omega'_l$ и $\omega_e \# \omega'_l$, $\omega_r \# \omega'_r$ и $\omega_r \# \omega'_e$, $\omega_e \# \omega'_r$ и $\omega_e \# \omega'_e$, попарно приведутся, и мы получим следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для левой эквивалентности имеем

$$\text{Op}(\omega_K) \circ \text{Op}(\omega_{K'}) \stackrel{l}{\sim} \omega_l \# \omega'_l.$$

Другими словами, свертка, эквивалентная слева композиции двухсторонних сверток, есть композиция сверток, эквивалентных слева сомножителям.

Если теперь мы проведем аналогичные вычисления для правых сверток, то получим такие правые эквивалентности:

$$\begin{aligned} \omega_l \# \omega'_l &\stackrel{r}{\sim} (\omega_l \# \omega'_l)(0, -y_0, x_0) = \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0) \quad (\text{см. (5)}), \\ \omega_l \# \omega'_r &\stackrel{r}{\sim} \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r, \\ \omega_l \# \omega'_e &\stackrel{r}{\sim} \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0), \\ \omega_r \# \omega_l &\stackrel{r}{\sim} \omega_r \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0), \\ \omega_r \# \omega'_r &\stackrel{r}{\sim} \omega_r \# \omega'_r, \\ \omega_r \# \omega'_e &\stackrel{r}{\sim} \omega_r \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_r \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) \quad (\text{см. (9)}), \\ \omega_e \# \omega'_l &\stackrel{r}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0) = -\omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0), \\ \omega_e \# \omega'_r &\stackrel{r}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r = -\omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r \quad (\text{см. (9)}), \\ \omega_e \# \omega'_e &\stackrel{r}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = \omega(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0). \end{aligned}$$

Если просуммировать все правые эквивалентности, то слагаемые, соответствующие $\omega_r \# \omega'_l$ и $\omega_r \# \omega'_e$, $\omega_l \# \omega'_r$ и $\omega_e \# \omega'_r$, $\omega_l \# \omega'_l$ и $\omega_l \# \omega'_e$, $\omega_e \# \omega'_l$ и $\omega_e \# \omega'_e$, попарно приведутся, и мы получим еще одну лемму.

ЛЕММА 2. Для правой эквивалентности имеем

$$\text{Op}(\omega_K) \circ \text{Op}(\omega_{K'}) \stackrel{r}{\sim} \omega_r \# \omega'_r.$$

Другими словами, свертка, эквивалентная справа композиции двухсторонних сверток, есть композиция сверток, эквивалентных справа сомножителям.

Наконец для обычных сверток картина более разнообразная:

$$\begin{aligned} \omega_l \# \omega'_l &\stackrel{e}{\sim} \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0), \\ \omega_l \# \omega'_r &\stackrel{e}{\sim} \overset{\circ}{\omega}_l \cdot \overset{\circ}{\omega}'_r - \overset{\circ}{\omega}_l \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0) - \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \overset{\circ}{\omega}'_r, \\ \omega_l \# \omega'_e &\stackrel{e}{\sim} \omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_l(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0), \\ \omega_r \# \omega'_l &\stackrel{e}{\sim} \overset{\circ}{\omega}_r \cdot \overset{\circ}{\omega}_l - \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \overset{\circ}{\omega}'_l - \overset{\circ}{\omega}_r \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0), \\ \omega_r \# \omega'_r &\stackrel{e}{\sim} \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_r \# \omega'_e &\stackrel{e}{\sim} \omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0) = -\omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_e(0, -y_0, x_0), \\
\omega_e \# \omega'_l &\stackrel{e}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l = -\omega_r(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_l(0, -y_0, x_0), \\
\omega_e \# \omega'_r &\stackrel{e}{\sim} \omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0) = -\omega_e(0, -y_0, x_0) \cdot \omega'_r(0, -y_0, x_0), \\
\omega_e \# \omega'_e &\stackrel{e}{\sim} \omega_e \cdot \omega'_e.
\end{aligned}$$

Здесь $\hat{\omega}_{l,r} = \hat{\omega}_{l,r}(\lambda, \xi, \eta)$ обозначает подстановку $(t, x, y) = (t_0, x_0, y_0)$, выполненную в функции $\omega(t, x, y, \lambda, \xi, \eta)$. Введем такие обозначения для констант

$$\begin{aligned}
a &:= \omega_r(0, -y_0, x_0) = \omega_l(0, -y_0, x_0), \\
b &:= \omega'_r(0, -y_0, x_0) = \omega'_l(0, -y_0, x_0).
\end{aligned}$$

Просуммировав все соотношения для евклидовых сверток и выполнив преобразования, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Для евклидовой эквивалентности имеем*

$$\text{Op}(\omega_K) \circ \text{Op}(\omega_{K'}) \stackrel{e}{\sim} (\hat{\omega}_r - a)(\hat{\omega}'_l - b) + (\hat{\omega}_l - a)(\hat{\omega}'_r - b) + \omega_e \cdot \omega'_e.$$

Результаты работы [7] и этого параграфа можно объединить в таком утверждении.

ТЕОРЕМА 3 [8]. *В точке $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{H}^n$, $(x_0, y_0) \neq 0$, алгебра двусторонних сверток, порожденная правыми и левыми свертками на группе Гейзенберга, локально эквивалентна алгебре троек $(\omega_l, \omega_r, \omega_e)$ символов, соответствующих левой, правой и обычной (евклидовой) сверткам. На образующих алгебры отображение локализации действует так:*

$$\begin{aligned}
&\text{Op}(\hat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x)) \\
&\quad \mapsto (\hat{k}(-\lambda, -\xi - 2\lambda y, -\eta + 2\lambda x), \hat{k}(0, -y^0, x^0), -\hat{k}(0, -y^0, x^0)), \\
&\text{Op}(\hat{k}(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x)) \\
&\quad \mapsto (\hat{k}(0, -y^0, x^0), \hat{k}(\lambda, \xi - 2\lambda y, \eta + 2\lambda x), -\hat{k}(0, -y^0, x^0)).
\end{aligned}$$

Алгебраические операции на тройках действуют так:

$$\begin{aligned}
(\omega_l, \omega_r, \omega_e) + (\omega'_l, \omega'_r, \omega'_e) &= (\omega_l + \omega'_l, \omega_r + \omega'_r, \omega_e + \omega'_e), \\
(\omega_l, \omega_r, \omega_e) \# (\omega'_l, \omega'_r, \omega'_e) \\
&= (\omega_l \# \omega'_l, \omega_r \# \omega'_r, (\hat{\omega}_r - a)(\hat{\omega}'_l - b) + (\hat{\omega}_l - a)(\hat{\omega}'_r - b) + \omega_e \cdot \omega'_e),
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\hat{\omega}$ обозначает “замораживание” прямой переменной $h = h_0$ в функции $\omega(h, \nu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что закон композиции (14) имеет структуру, сходную с групповым законом на группе Гейзенберга (1). В самом деле, левые и правые свертки перемножаются по координатам, подобно тому, как складываются компоненты x и y . Результат взаимодействия левых свертков с правыми прибавляется к третьей (*скалярной*) части разложения, сходно с изменением координаты t (см. (1)).

Автор благодарен профессору Василевскому за руководство данной работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
18.04.94
Исправленный вариант
30.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Taylor M. E. Non commutative microlocal analysis. Part 1 // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1984. V. 313.
- [2] Geller D. Analytic pseudodifferential operators for the Heisenberg group and local solvability. New Jersey: Princeton University Press, 1990.
- [3] Folland G. B. Harmonic analysis in phase space. New Jersey: Princeton University Press, 1989.
- [4] Vasilevski N. L., Trujillo R. Group convolution operators on standard CR-manifold. I. Structural properties // Int. Eq. Op. Th. 1994. V. 19. № 1. P. 65–107.
- [5] Кисиль В. В. Алгебры псевдодифференциальных операторов, связанные с группой Гейзенберга. Дисс. ... к. ф.-м. н. Одесса: ОГУ, 1991.
- [6] Kisil V. V. No more than mechanics. Repote Interno #151. V. I. Mexico: Departamento de Matemáticas, CINVESTAV del I.P.N., 1994.
- [7] Кисиль В. В. Локальное поведение операторов двусторонней свертки с сингулярными ядрами на группе Гейзенберга // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 41–55.
- [8] Кисиль В. В. Алгебра двусторонних свертков на группе Гейзенберга // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 1. С. 20–23.
- [9] Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudodifferential operators. Berlin, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1985.
- [10] Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
- [11] Симоненко И. Б. Новый метод для изучения линейных интегральных уравнений сингулярного типа. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. С. 567–586, 757–782.
- [12] Кисиль В. В. Об алгебре псевдодифференциальных операторов на группе Гейзенберга // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 6. С. 75–85.