Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, О счетной определимости множеств, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 382–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:53:14

О СЧЕТНОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ МНОЖЕСТВ

Ю. Ф. Коробейник

1. Если G – любая область в $\mathbb{C}^p$, то символ $A(G)$ обозначает пространство Фреше всех аналитических в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах G . Пусть Q – связное множество в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, и $D[Q]$ – совокупность всех областей, содержащих Q . Пусть, далее, $H(Q)$ – векторное пространство аналитических ростков на Q , т.е. классов эквивалентности, определенных как в [1], [2]; в случае, когда Q – область, $H(Q)$ можно отождествить с $A(Q)$. Следуя [1], [2], введем в $H(Q)$ индуктивную топологию $\mathcal{I}$:

$$H(Q), \mathcal{I} = \operatorname{ind}_{G \in D[Q]} H(G), \quad (1)$$

где индуктивный предел берется относительно отображений τ_G , ставящих в соответствие каждой функции из $A(G)$, $G \in D[Q]$, содержащий ее класс эквивалентности из $H(Q)$.

Как известно (см., например, [3], [4]), индуктивный предел несчетного семейства локально выпуклых пространств является довольно сложным объектом, гораздо более трудным для изучения, чем индуктивные пределы счетной последовательности таких же пространств; к тому же последние обладают более “хорошими” топологическими свойствами, нежели общие индуктивные пределы (1). В связи с этим важно выяснить, когда пространство $H(G), \mathcal{I}$ можно представить в виде

$$H(Q), \mathcal{I} = \operatorname{ind}_n H(G_n), \quad (2)$$

где $G_n \in D[Q]$, $n = 1, 2, \dots$, или, что все равно, когда множество $D[Q]$ имеет счетный базис $\{G_m\}_{m=1}^\infty$. Как известно, последовательность областей $\{G_m\}_{m=1}^\infty$ является базисом в $D[Q]$ тогда и только тогда, когда

$$\forall G \in D[Q] \quad \exists m \geq 1: \quad Q \subseteq G_m \subseteq G.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–242.

В настоящей работе указывается критерий того, что в $D[Q]$ имеется счетный базис. Именно, если $\text{Fr } Q$ – множество граничных точек Q и

$$F[Q] = \text{Fr } Q \cap Q,$$

то счетный базис в $D[Q]$ существует тогда и только тогда, когда множество $F[Q]$ является компактом.

Предположим теперь, что множество Q выпукло, и пусть $W[Q]$ – совокупность всех выпуклых областей, содержащих Q . Очевидно, что если в $D[Q]$ имеется счетный базис $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, то $\{\text{Conv } G_m\}_{m=1}^{\infty}$ – счетный базис в $W[Q]$. Однако, из существования счетного базиса в $W[Q]$, вообще говоря, не следует, что в $D[Q]$ также имеется счетный базис. Например, если $Q = (a, b)$, где $-\infty < a < b < \infty$, то $F[Q] = Q$ – незамкнутое в $\mathbb{C}$ множество, и поэтому счетного базиса в $D[Q]$ нет. В то же время легко убедиться, что совокупность областей W_n , граница каждой из которых образована ромбом с одной диагональю (a, b) и другой – $((a+b)/2 - i/n, (a+b)/2 + i/n)$, $n = 1, 2, \dots$, образует счетный базис в $W[Q]$.

Вопрос об условиях существования счетного базиса в $W[Q]$ неожиданно оказался более трудным, чем такая же задача для $D[Q]$. В настоящей работе такой критерий для $W[Q]$ (также в терминах, относящихся к границе $\text{Fr } Q$ множества Q) получен для $\mathbb{C}$ ($p = 1$) (см. ниже, теоремы 2–4).

Предположим теперь, что множество Q можно представить в виде

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \quad (3)$$

где $\forall n \geq 1 \quad Q_n \subseteq Q_{n+1}$, и Q_n – компакт в $\mathbb{C}^p$. Пространство $H(Q_n)$, $\mathcal{I}$ хорошо изучено (см., например, [1], [2], [5]), и оно является ядерным пространством Шварца. В пространстве $H(Q)$ можно теперь ввести проективную топологию

$$H(Q), P(\{Q_n\}) = \varinjlim H(Q_n). \quad (4)$$

Разумеется, не каждое множество Q можно представить в виде (3). В работе показывается, что представление (3) возможно тогда и только тогда, когда существует аналогичное представление для множества $F[Q]$:

$$F[Q] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \forall n \geq 1, \quad F_n \subseteq F_{n+1}, \quad (5)$$

F_n – компакт в $\mathbb{C}^p$.

Пусть $K[Q]$ – совокупность компактов, содержащихся в Q . Следуя [1], определим в $H(Q)$ проективную топологию P :

$$H(Q), P = \varprojlim_{B \in K[Q]} H(B), \quad (6)$$

где проективный предел берется относительно операции τ_B , ставящей в соответствие каждому ростку из $H(Q)$ его сужение на $H(B)$ (соответствующий росток из $H(B)$). Как известно [1], всегда $\mathcal{J} \succcurlyeq P$, и в ряде случаев (часть из них приведена в [1]) $P = \mathcal{J}$. Очевидно, что если Q представимо в виде (3), то $P \succcurlyeq P(\{Q_n\})$, а равенство будет иметь место, когда $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – счетная база в $K[Q]$, т.е., когда $\forall B \in K[Q] \exists n \geq 1: B \subseteq Q_n$. На примерах можно показать, что из представления (3) еще не следует, что $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – счетная база в $K[Q]$. В работе устанавливаются условия, при которых последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ из представления (3) выпуклого компакта Q (в предположении, что такое представление имеется) является счетной базой в совокупности $WK(Q)$ всех выпуклых компактов множества Q : $\forall T \in WK(Q) \exists n \geq 1: T \subseteq Q_n$.

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – связное множество в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$. Для того, чтобы в $D[Q]$ имелся счетный базис, необходимо и достаточно, чтобы множество $F[Q] := \text{Fr } Q \cap Q$ было компактом.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Если $F[Q] = \emptyset$, то Q – область, составляющая (одноэлементный) базис в $D[Q]$. Пусть теперь $F[Q] \neq \emptyset$. Для любого $n \geq 1$ положим

$$B_n = \left\{ z : \rho(z, F[Q]) < \frac{1}{n} \right\}, \quad Q_n = \text{Int } Q \cup B_n.$$

Так как $F[Q] \subseteq B_n$, то $Q_n = Q \cup B_n$. Очевидно, что Q_n – открытое множество. Так как любую точку из Q_n можно соединить ломаной, лежащей в Q_n , с некоторой точкой из связного множества $Q \subseteq Q_n$, то Q_n связно. Следовательно, $Q_n \in D[Q] \forall n \geq 1$.

Пусть теперь M – произвольная область из $D[Q]$. Тогда

$$\alpha := \min_{z \in F[Q]} \rho(z, \text{Fr } M) > 0.$$

Покажем, что $Q_n \subset M$, если $\alpha n > 2$. Пусть z_1 – любая точка из Q_n , где $\alpha n > 2$. Если $z_1 \in Q$, то $z_1 \in M$. Пусть теперь $z_1 \notin Q$. Тогда $z_1 \in B_n$ и $\exists z_0 \in F[Q]: \rho(z_0, z_1) < \frac{1}{n}$. Пусть $V_\beta(z_0) = \{z \in \mathbb{C}^p : \rho(z, z_0) < \beta\}$. Так как $V_\alpha(z_0) \subset M$, то $z_1 \in M$, и окончательно $Q_n \subset M$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. 1. Допустим, что множество $F[Q]$ неограниченно, но в $D[Q]$ имеется счетный базис $\{G_m\}_{m=1}^\infty$. Тогда $\forall n \geq 1 \exists z_n \in F[Q]: \lim_n z_n = \infty$. Можно всегда считать, что $z_n \neq z_m$, если $n \neq m$. Положим

$$r_n = 5^{-n} \min\{1, \rho(z_n, \text{Fr } G_n), \min_{m \neq n} \rho(z_n, z_m)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Все кружки $V_{2r_n}(z_n)$ попарно не пересекаются. Так как $z_n \in Q \cap \text{Fr } Q$, то $\forall n \geq 1 \exists \alpha_n \in \mathbb{C}^p \setminus Q: \alpha_n \in V_{r_n}(z_n)$. Положим $V_n^0 = V_{2r_n}(z_n) \setminus \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$; $V = \bigcup_{n=1}^\infty V_n^0$. Тогда V_n^0 – область, а V – открытое множество в $\mathbb{C}^p$. Введем множества $V_2 = Q \setminus V$, $V_3 = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{V_{r_n}(z_n)}$. Пусть β –

любая конечная предельная точка множества V_3 . Допустим, что $\exists N < \infty$ $\exists \delta > 0$: $V_3 \cap V_\delta(\beta) \subseteq A_N$, где $A_N = \bigcup_{n=1}^N \overline{V_{r_n}(z_n)}$. Тогда β – предельная точка замкнутого множества A_N и поэтому $\beta \in A_N \subseteq V_3$. Если же таких чисел N и δ не найдется, то в любой окрестности β имеются точки из бесконечного множества кружков $\overline{V_{r_n}(z_n)}$. В этом случае существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $z_{m_n} \rightarrow \beta$, откуда следует, что $\beta = \infty$, и мы пришли к противоречию. Итак, множество V_3 замкнуто (в $\mathbb{C}^p$). При этом $V_3 \cap V_2 = \emptyset$. Для любой точки z из V_2 возьмем положительное число $r(z) < \rho(z, V_3)/2$ и положим $U = \bigcup_{z \in V_2} V_{r(z)}(z)$, $W = U \cup V$. Тогда $Q \subset W$, W – открытое множество и $\forall n \geq 1$ $\alpha_n \notin W$. Для любой точки t из W найдется точка t_0 из Q , которую можно соединить с t принадлежащей W ломаной l (в качестве l можно взять отрезок, если $z \in U$, и отрезок или ломаную, состоящую из двух отрезков, если $z \in V$). Поэтому W связно и, следовательно, $W \in D[Q]$. Так как $\{G_m\}_{m=1}^\infty$ – базис в $D[Q]$, то $\exists m \geq 1$: $G_m \subset W$. Тогда $z_m \in Q \subset G_m$, $\alpha_m \notin G_m$. С другой стороны, так как $5^n r_n \leq \rho(z_n, \text{Fr } G_n) \quad \forall n \geq 1$, то $\alpha_m \in V_{r_m}(z_m) \subset G_m$, и мы пришли к противоречию.

2. Пусть теперь в $D[Q]$ имеется счетный базис. Тогда по доказанному множество $F[Q]$ ограничено в $\mathbb{C}^p$. Допустим, что оно незамкнуто. Тогда

$$\forall n \geq 1 \quad \exists z_n \in F[Q] : \lim_n z_n = \alpha \notin F[Q].$$

Как и ранее, считаем, что $z_n \neq z_m$, если $n \neq m$. Если $\forall n \geq 1$, положим

$$r_n = 5^{-n} \min \{1, \rho(z_n, \alpha), \rho(z_n, \text{Fr } G_n), \min_{m \neq n} \rho(z_n, z_m)\}.$$

Тогда кружки $V_{2r_n}(z_n)$ попарно не пересекаются и

$$\forall n \geq 1 \quad \exists \alpha_n \in \mathbb{C}^p \setminus Q : \alpha_n \in V_{r_n}(z_n).$$

Введем области V_n^0 и открытое множество V точно так, как выше. Далее полагаем $V_1 = V \cup \{\alpha\}$, $V_2 = Q \setminus V_1$, $V_3 = \left(\bigcup_{n=1}^\infty \overline{V_{r_n}(z_n)}\right) \cup \{\alpha\}$. Пусть β – любая конечная предельная точка множества V_3 . Если $\exists N < \infty$ $\exists \delta > 0$: $V_3 \cap V_\delta(\beta) \subseteq A_N$, то, как выше, находим, что $\beta \in A_N \subseteq V_3$. Если же чисел N и δ с такими свойствами не найдется, то, рассуждая, как выше, получим, что для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел m_n $\lim_n z_{m_n} = \beta$, откуда $\beta = \alpha \in V_3$. Следовательно, множество V_3 замкнуто. При этом, как раньше, $V_3 \cap V_2 = \emptyset$. Определив числа $r(z)$ для любой точки z из V_2 так же, как и раньше, вводим множества U и W и показываем, что W – область из $D[Q]$. Так как $\{G_m\}_{m=1}^\infty$ – базис в $D[Q]$, то $\exists m \geq 1$: $G_m \subset W$. Повторяя дословно рассуждения (с z_m и α_m) конца предыдущего пункта доказательства необходимости, вновь приходим к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ. Если Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}^p$ и $F[Q]$ – компакт, то в $W[Q]$ имеется счетный базис.

3. Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, и $W[Q]$ – совокупность всех выпуклых областей, содержащих Q . Цель дальнейшего – выяснить, когда в $W[Q]$ есть счетный базис. Начнем с двух простых замечаний. Первое было уже приведено выше и заключается в том, что если $\{G_m\}_{m=1}^\infty$ – счетный базис областей G_m в $D[Q]$ и $D_m = \text{Conv } G_m$, $m = 1, 2, \dots$, то $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ – счетный базис в $W[Q]$. Таким образом, если в $D[Q]$ имеется счетный базис, то в $W[Q]$ подавно есть таковой. Обратное в общем случае неверно уже при $n = 1$, как убеждает приведенный выше пример с $Q = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Следовательно, компактность множества $F[Q]$ достаточна, но не является необходимой для наличия в $W[Q]$ счетного базиса.

Второе замечание состоит в том, что если в $W[Q]$ есть счетный базис $\{G_m\}_{m=1}^\infty$, то всегда можно считать, что $\forall m \geq 1 \ G_{m+1} \subseteq G_m$. Для этого, в случае необходимости, достаточно перейти к последовательности областей $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ из $W[Q]$, где $\forall m \geq 1 \ D_m = \bigcap_{k=m}^\infty G_k$.

Опишем теперь в случае $n = 1$ одно необходимое условие для наличия в $W[Q]$ счетного базиса. Предположим, что $\beta \in F'[Q]$, т.е., что β – предельная точка множества $F[Q]$. Тогда точка β лежит на выпуклой кривой $\text{Fr } Q$, являющейся границей Q . Установим на выпуклой кривой $\text{Fr } Q$ некоторое направление движения (обхода) в окрестности точки β . Условимся говорить, что точка z_1 лежит “левее” z_2 на $\text{Fr } Q$, если z_1 предшествует точке z_2 при этом обходе. Найдется бесконечная последовательность Γ точек из $F[Q]$, стремящаяся к β по $\text{Fr } Q$. Очевидно, что имеется хотя бы одна бесконечная подпоследовательность точек из Γ , которая стремится к β либо слева, либо справа. Не меняя обозначений, можно считать (для определенности), что $z_n \rightarrow \beta - 0$, т.е., z_n стремится к β слева, причем $\forall n$ точка z_{n+1} лежит правее z_n на $\text{Fr } Q$, между z_n и β . В этом случае будем говорить, что β – левая предельная точка для $F[Q]$ (обозначение $\beta \in F'_-[Q]$). Аналогично определяется множество $F'_+[Q]$ правых предельных точек для $F[Q]$. Очевидно, что $F'[Q] = F'_-[Q] \cup F'_+[Q]$.

Пусть $\beta \in F'_-[Q]$ и пусть β обладает такими свойствами: 1) кривая $\text{Fr } Q$ не вырождается в прямолинейный полуинтервал $[\alpha, \beta)$ вблизи точки β , слева от нее; 2) если P – предельное положение опорной прямой к $\text{Fr } Q$ при стремлении точки опоры к β слева, то на луче P_β^+ с началом в точке β , отвечающем этому предельному положению, и неограниченно уходящему от точки β вправо (относительно направления на $\text{Fr } Q$), нет ни одной точки из $F[Q]$.

Из условия 2) следует, в частности, что $\beta \notin F[Q]$.

Предположим, что в $W[Q]$ есть счетный базис $\{D_m\}_{m=1}^\infty$. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ – последовательность точек из $F[Q]$, монотонно стремящаяся к β слева. Тогда $\forall m \geq 1 \ \exists \delta_m > 0: V_{\delta_m}(z_m) \subset D_m$. Выберем на каждой

дужке множества $\text{Fr } Q \cap V_{\delta_m}(z_m)$, содержащей точку z_m , точку w_m , в которой есть касательная к кривой $\text{Fr } Q$. Можно всегда считать, что $\delta_m \downarrow 0$. Заменяв последовательность $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ достаточно редкой ее подпоследовательностью, можно всегда в силу условия 1) добиться того, чтобы углы, образованные с положительной полуосью касательными в точках w_m , строго монотонно убывали. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ обладает только что указанным свойством. Отложим на расстоянии h_m от точки w_m по внешней нормали к $\text{Fr } Q$ точку t_m . Число $h_m > 0$ возьмем настолько малым, чтобы $t_m \in V_{\delta_m}(z_m)$ и чтобы $h_m \downarrow 0$. (Можно, например, положить $h_1 = (\delta_1 - |w_1 - z_1|)/2$, $2h_{m+1} = \min\{1/m, h_m, \delta_{m+1} - |w_{m+1} - z_{m+1}|\}$.) Проведем через точку t_m прямую L_m , параллельную касательной к $\text{Fr } Q$ в точке w_m . Пусть τ_m – точка пересечения прямых L_m и L_{m+1} , $m \geq 1$, и L_1^- – “левая полупрямая” (луч) с правым (конечным) концом в точке t_1 , лежащая на прямой L_1 и неограниченная вдоль L_1 в левом направлении. Обозначим символом Λ выпуклую кривую, составленную из луча L_1^- , прямолинейных отрезков $[t_1, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \tau_3]$, ... и из луча P_β^+ . Пусть G_0 – та часть плоскости, ограниченная ломаной Λ , которая содержит точки $\{z_m : m = 1, 2, \dots\}$. Очевидно, что $G_0 \in W[Q]$. Так как по предположению $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ – базис в $W[Q]$, то $\exists p \geq 2$: $D_p \subset G_0$. В то же время $t_p \in D_p$, но $t_p \in [\tau_{p-1}, \tau_p] \subset \text{Fr } G_0$, и вложение $D_p \subset G_0$ невозможно. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}$ и пусть в $W[Q]$ имеется счетный базис. Тогда любая точка β из $F'_-[Q]$ обладает по крайней мере одним из таких двух свойств:

- A₋) вблизи β , слева от нее, кривая $\text{Fr } Q$ совпадает с некоторым прямолинейным полуинтервалом $[c, \beta)$;
- B₋) на луче P_β^+ с началом в точке β ($\beta \in P_\beta^+$) есть по крайней мере одна точка из $F[Q]$.

Совершенно аналогично формулируется результат для точек из множества $F'_+[Q]$ всех правых предельных точек для $F[Q]$ (соответствующие свойства обозначим через A₊) и B₊)).

Как известно, выпуклое множество называется строго выпуклым, если его граница не содержит ни одного прямолинейного участка.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Q – ограниченное строго выпуклое множество. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) в $D[Q]$ имеется счетный базис;
- 2) в $W[Q]$ есть счетный базис;
- 3) множество $F[Q]$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в начале пункта 3, $1) \Rightarrow 2)$. Согласно теореме 1 $1) \Leftrightarrow 3)$. Нам осталось установить импликацию $2) \Rightarrow 3)$. Допустим, рассуждая от противного, что в $W[Q]$ есть счетный базис, но $F[Q]$ незамкнуто, т.е. $\exists \alpha \in \text{Fr } Q: \alpha \in F'[Q], \alpha \notin F[Q]$. Тогда $\alpha \in F'_-[Q]$ или $\alpha \in F'_+[Q]$. Применяя к точке α теорему 2, получим, что в $W[Q]$ нет счетного базиса.

Приведенный в начале пункта 1 пример $Q = (a, b)$, где $-\infty < a < b < +\infty$, показывает, что в случае, если Q содержит участки прямолинейности, следствие уже может быть неверным. Вообще, если Q – любой (ограниченный или неограниченный) промежуток (интервал, отрезок, полуинтервал) на какой-либо прямой, то нетрудно показать, что $W[Q]$ всегда имеет счетный базис, который легко строится. В то же время счетный базис в $D[Q]$ для такого рода множеств Q существует тогда и только тогда, когда Q – ограниченный замкнутый отрезок (сегмент).

Укажем еще одно необходимое условие. Перед этим установим на выпуклой кривой $\text{Fr } Q$ направление движения (обхода Q) ‘вправо’ и ‘влево’ от произвольно зафиксированной точки $z_0 \in \text{Fr } Q$. Будем говорить, что кривая $\text{Fr } Q$ неограничена в направлении l_1 , если существует последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, лежащих на $\text{Fr } Q$ правее z_0 и таких, что $\lim_n |z_n| = \infty$ (в этом случае будем говорить, что l_1 – направление неограниченности кривой $\text{Fr } Q$). Аналогично определяется другое направление l_2 неограниченности на $\text{Fr } Q$ (при движении от z_0 влево). Очевидно, что на выпуклой кривой $\text{Fr } Q$ имеется хотя бы одно направление неограниченности тогда и только тогда, когда множество $\text{Fr } Q$ неограниченно (в обычном смысле) в $\mathbb{C}$. Неограниченная выпуклая кривая $\text{Fr } Q$ может иметь два или одно направление неограниченности (например, если $Q = (1, +\infty)$, то $\text{Fr } Q = [1, +\infty)$, и существует одно направление неограниченности l_1). В дальнейшем условимся обозначать символом l любое из (не более, чем двух) направлений неограниченности l_1 и l_2 на $\text{Fr } Q$, если таковые имеются.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Q – выпуклое множество такое, что кривая $\text{Fr } Q$ неограничена (в одном или двух направлениях). Допустим, что в $W[Q]$ имеется счетный базис, и пусть l – направление неограниченности на $\text{Fr } Q$. Тогда на кривой $\text{Fr } Q$, в направлении l , начиная с некоторого места, не будет точек из Q , или же кривая в этом направлении заканчивается бесконечным прямолинейным участком (γ, ∞) , принадлежащим Q (начало γ этого луча может как принадлежать, так и не принадлежать Q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая от противного, допустим, что на кривой $\text{Fr } Q$ в направлении l имеется уходящая в бесконечность последовательность различных точек z_n из Q , причем в этом направлении кривая не заканчивается прямолинейным участком. Заменяя, в случае необходи-

мости, последовательность z_n достаточно редкой подпоследовательностью, можно всегда добиться того, чтобы в каждой точке z_n можно было выбрать опорную прямую T_n (из множества всех опорных прямых к $\bar{Q}$ в точке z_n) так, чтобы угол между положительной полуосью и (направленной) прямой T_n монотонно убывал. Предположим, что $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ – базис в $W[Q]$. Отложим по направлению внешней относительно Q нормали к T_n точку w_n настолько близко к z_n , что $w_n \in D_n$, и проведем через w_n прямую $\mathcal{L}_n$, параллельно T_n . Пусть t_n – точка пересечения $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_{n+1}$, $n \geq 1$; $\mathcal{L}_1^-$ – луч, лежащий на $\mathcal{L}_1$, с началом в точке w_1 , уходящий (влево) в бесконечность; Γ – ломаная, состоящая из луча $\mathcal{L}_1^-$ и прямолинейных звеньев $[w_1, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ и т.д. Обозначим символом G_0 выпуклую область, ограниченную ломаной Γ и содержащую точки z_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда $Q \subset G_0$ и $G_0 \in W[Q]$. Так как по предположению $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ – базис в $W[Q]$, то $\exists p \geq 2$: $D_p \subseteq G_0$. В то же время $w_p \in D_p$, но $w_p \in [t_{p-1}, t_p] \subset \text{Fr } G_0$, и мы пришли к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Q – неограниченное выпуклое множество с границей $\Gamma := \text{Fr } Q$. Пусть, далее, на кривой Γ находится бесконечная последовательность различных точек из Q , уходящая в бесконечность по одному (из двух возможных) направлению неограниченности Γ , причем в этом направлении кривая Γ не заканчивается прямолинейным участком. Тогда в $W[Q]$ нет счетного базиса.

4. Покажем теперь, что необходимые условия, указанные в теоремах 2, 3, достаточны для того, чтобы в $W[Q]$ имелся счетный базис.

Прежде, чем сформулировать соответствующий результат, введем некоторые определения и обозначения. Назовем выпуклую дугу Γ , лежащую на $\text{Fr } Q$, максимальной, если $\Gamma \subset F[Q]$ и в то же время $\Gamma_1 \setminus F[Q] \neq \emptyset$, где Γ_1 – любая выпуклая дуга, принадлежащая $\text{Fr } Q$ и содержащая, кроме всей дуги Γ , еще хотя бы одну точку из $\text{Fr } Q$. Если Γ – какая-либо максимальная дуга, то ее концы могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству $F[Q]$ (и, следовательно, самой дуге Γ). Пусть $\check{\Gamma}$ – любая максимальная дуга и α, β – ее концы. Обозначим символом (α, β) соответствующую открытую дугу, не содержащую концов α, β , независимо от того, принадлежат они дуге Γ или нет. Пусть Q_c – объединение не более чем счетного (и, возможно, пустого) множества всех открытых дуг (α_j, β_j) , соответствующих максимальным дугам Γ_j с концами α_j, β_j . Положим $Q_d := F[Q] \setminus Q_c$ и обозначим символом $F(Q)$ объединение Q_d и концов всех максимальных дуг, независимо от того, принадлежат они соответствующим максимальным дугам или нет. Нетрудно проверить, что $F'(Q) \subseteq F'[Q]$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}$ с такими свойствами:

- 1) каждая точка из $F'_-[Q]$ (из $F'_+[Q]$) удовлетворяет по крайней

мере одному из условий $A_-)$ и $B_-)$ (соответственно, одному из условий $A_+)$ и $B_+)$);

- 2) если кривая $\text{Fr } Q$ не ограничена в каком-либо направлении, то либо в этом направлении, начиная с некоторого места, не будет точек из Q , либо кривая заканчивается в этом направлении бесконечным прямолинейным участком, принадлежащим Q .

Тогда в $W[Q]$ имеется счетный базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда множество $\text{Fr } Q$ (а, следовательно, и Q) ограничено. Покажем, прежде всего, что если $G \in W[Q]$, то $F'(Q) \subset G$. Пусть $\gamma \in F'(Q) = F'_-(Q) \cup F'_+(Q)$. Пусть для определенности $\gamma \in F'_-(Q)$. Тогда $\gamma \in F'_-[Q]$ и по теореме 2 либо вблизи γ , слева от нее, кривая $\text{Fr } Q$ совпадает с некоторым прямолинейным полуинтервалом $[c, \gamma)$, или на луче P_γ^+ есть по крайней мере одна точка из $F[Q]$. В первом случае на прямолинейном промежутке (c, γ) находится бесконечное множество точек $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ из $F[Q]$, стремящихся к γ . В силу выпуклости $Q \forall n \geq 1 \quad [\mu_1, \mu_n] \subset Q$, откуда $[\mu_1, \gamma) \subset Q \cap \text{Fr } Q = F[Q]$. Но тогда γ не может быть левой предельной точкой для $F(Q)$. Следовательно, на луче P_γ^+ есть хотя бы одна точка γ_1 из $F[Q]$ (не исключено, что $\gamma_1 = \gamma$). Пусть $G \in W[Q]$. Тогда $\exists r > 0: V_r(\gamma_1) \subset G$. Пусть P — прямая, на которой лежит луч P_γ^+ , и P_1 — луч с началом в γ , также лежащий на P , но противоположного с P_γ^+ направления. Пусть, далее, T — перпендикулярная к P прямая, проходящая через точку γ . Так как $\gamma \in F'_-(Q)$, то как угодно близко к γ и (одновременно) как угодно близко к лучу P_1 найдутся точки из $Q \subset G$, причем все эти точки лежат по разные стороны с γ_1 относительно T . Соединяя эти точки отрезками со всеми точками круга $V_r(\gamma_1) \subset G$, находим, что все такие отрезки принадлежат области G в силу ее выпуклости. Используя вновь выпуклость области G , получаем, что $\gamma \in G$.

Положим $V_n = \bigcup_{z \in F'(Q)} V_{1/n}(z)$. Допустим, что множество $\text{Fr } Q \setminus V_n$ содержит бесконечное число различных точек из $F(Q)$. Пусть τ — одна из предельных точек бесконечного множества $F(Q) \setminus V_n$. Тогда $\rho(\tau, F'(Q)) \geq 1/n$ и в то же время $\tau \in F'(Q)$, и мы пришли к противоречию.

Итак, пусть в $\text{Fr } Q \setminus V_n$ содержится p ($p < +\infty$) точек из $F(Q)$. Пусть α — одна из таких точек. Если α — точка из Q_d , то строим последовательность кружков $V_{1/m}(\alpha)$, $m = 1, 2, \dots$. Пусть теперь α — конец (для определенности, левый) дуги (α, β) из Q_c . Согласно теореме 2, имеются три возможности: 1) $\alpha \in Q$; 2) $\alpha \notin Q$, но дуга (α, β) начинается некоторым прямолинейным участком (α, c) , $c \in (\alpha, \beta)$; 3) $\alpha \notin Q$, но на луче P_α^- есть хотя бы одна точка из Q .

Относительно правого конца β предположим сначала, что $\beta \notin Q$. Тогда

по той же теореме либо дуга (α, β) заканчивается прямолинейным участком (d, β) , где $d \in (\alpha, \beta)$, либо на луче P_β^+ есть хотя бы одна точка из Q .

Итого (при условии, что $\beta \notin Q$) имеем 6 возможных вариантов. Пусть сначала $\alpha \in Q$, а дуга (α, β) заканчивается прямолинейным участком (d, β) . Пусть $U_k = \bigcup_{z \in [\alpha, d]} V_{1/k}(z)$; W_k – внутренность треугольника со сторонами βd , dd_1 и $d_1\beta$, где d_1 – точка на перпендикуляре к продолжению отрезка $[d, \beta]$ в точке d , находящаяся на расстоянии $1/k$ от d (в той части плоскости, примыкающей к (α, β) , которая не содержит точек из Q). Положим $M_k(\alpha) = U_k \cup W_k$. Тогда $\forall G \in W[Q] \exists N: M_N(\alpha) \subset G$.

Если $\alpha \notin Q$, а дуга (α, β) начинается прямолинейным участком $[\alpha, c]$ и заканчивается таким же участком $[d, \beta]$, то к множеству $U_k = \bigcup_{[c, d]} V_{1/k}(z)$ добавляем внутренности треугольника W_k с вершинами d, d_1, β и треугольника с вершинами в α, c, c_1 , построенного таким же образом. Пусть $M_k(\alpha)$ – полученная в итоге область. И здесь $\forall G \in W[Q] \exists N < \infty: M_N(\alpha) \subset G$.

Пусть теперь $\alpha \notin Q$, на луче P_α^- есть хотя бы одна точка из Q и дуга (α, β) заканчивается прямолинейным участком (d, β) . Пусть G – любая область из $W[Q]$ и τ – точка луча P_α^- , принадлежащая Q . Тогда $\exists r > 0: V_r(\tau) \subset G$. Используя выпуклость G и то, что $(\alpha, d) \subset Q \subset G$, получим, что $\alpha \in G$. Итак, замкнутая дуга (α, d) принадлежит G . Но тогда можно $\forall k \geq 1$ построить область $M_k(\alpha)$ точно так же, как в первом из двух уже рассмотренных случаев ($\alpha \in Q$), и показать, что $\exists N_1 = N_1(\alpha): M_{N_1} \subset G$. Проводя подобные рассуждения в остальных случаях, строим такие области $M_k(\alpha)$, что $\forall G \in W[Q] \exists s: M_s(\alpha) \subset G$. При этом $\text{Conv } M_k(\alpha)$ содержит дугу (α, β) (кроме, быть может, ее концов, если они не принадлежат Q и если далее на P_α^- или на P_β^+ нет точек из Q). Положим $Q_{k,n} = Q \cup V_n \cup B_{k,n}$, где $B_{k,n}$ – объединение (при фиксированных k и n) всех областей $V_{1/k}(\alpha)$, если α – точка из Q_d , не принадлежащая V_n , и $M_k(\alpha)$, если α – конец одной из дуг множества $F[Q]$ и $\alpha \notin V_n$.

Заметим, что вообще говоря, множество $\text{Fr } Q \setminus V_n$ может содержать и точки $F[Q]$, не принадлежащие $F(Q)$, т.е. участки (α_j^1, β_j^1) дуг (α_j, β_j) из $F[Q]$, лежащие строго внутри этих дуг и поэтому не содержащие концов α_j и β_j . Допустим, что таких участков будет бесконечное множество. Тогда ограниченное бесконечное множество $\{\beta_j^1\}$ имеет хотя бы одну предельную точку γ . Ясно, что $\rho(\gamma, F'(Q)) \geq 1/n$. В то же время легко проверить, что γ – предельная точка множества $\{\beta_j\}$ и поэтому $\gamma \in F'(Q)$. Полученное противоречие убеждает нас в том, что вне V_n на $\text{Fr } Q$ находится лишь конечное число m_n таких дужек (α_j^1, β_j^1) из $F[Q]$. Проведя для каждой максимальной дуги (α_j, β_j) , содержащей “дужку” (α_j^1, β_j^1) , такие же построения, что и выше, мы получим области $T_{j,n,k}$ такие, что $\forall G \in W[Q] \exists l: T_{j,n,l} \subset G$ ($j = 1, 2, \dots, m_n$).

Положим $D_{k,n} = \bigcup_{j=1}^{m_n} T_{j,n,k}$, $E_{k,n} = \text{Conv}(D_{k,n} \cup Q_{k,n})$. Так как $V_n \cup B_{k,n} \cup Q_{k,n} \supset F[Q]$, то $E_{k,n} = \text{Conv}(Q \cup V_n \cup B_{k,n} \cup D_{k,n}) = \text{Conv}(\text{Int } Q \cup V_n \cup B_{k,n} \cup D_{k,n})$. Легко проверить, что $E_{k,n} \in W[Q]$ и что $\forall G \in W[Q] \exists s \geq 1 \exists m \geq 1: E_{m,s} \subset G$. Образовав последовательность выпуклых областей $G_m = \bigcap_{1 \leq k+n \leq m} E_{k,n}$, $m = 1, 2, \dots$, убеждаемся, что $\{G_m\}_{m=1}^\infty$ – (счетный) базис в $W[Q]$.

Пусть теперь выпуклое множество Q не ограничено. Тогда выпуклая кривая $\Gamma = \text{Fr } Q$ не ограничена в одном или двух направлениях. По предположению в каждом таком направлении кривая Γ должна заканчиваться прямолинейным участком, который должен (может быть, начиная с некоторого места) принадлежать $F[Q]$, т.е. Q . Пусть H – один из этих (не более, чем двух) участков. Не теряя общности, можно считать, что H расположен на положительной полуоси: $H = [x_0, +\infty)$, а точки множества Q при $\text{Re } z \geq x_0$ лежат на вещественной оси и, может быть, ниже нее.

Образуем области $R_k^+ = \{z : |\text{Im } z| < 1/k, \text{Re } z > x_0 - \delta\}$, (этого всегда можно добиться, сдвинув, в случае необходимости, точку x_0 вправо: тогда и некоторый полуинтервал слева от x_0 будет принадлежать Q). Легко проверить, что $\forall G \in W[Q] \exists p \geq 1: R_p^+ \subset G$.

Точно таким же образом строим последовательность областей R_p^- для второго бесконечного участка прямолинейности с началом в точке z_1 множества Q . Пусть Γ_1 – ограниченная часть кривой Γ , полученная удалением из нее бесконечных интервалов прямолинейности на концах Γ (точки z_1 и x_0 включаем в Γ_1). Применяя построения предыдущего пункта, получим области $E_{k,n}$ (построенные по кривой Γ_1 и множеству $F_1[Q] = F[Q] \cap \Gamma_1$). Положив $F_{m,s} = \text{Conv}(E_{m,s} \cup R_m^+ \cup R_m^-)$, получим в итоге счетный базис в $W[Q]$.

5. Выясним теперь условия, при которых множество Q можно представить в виде (3). Предварительно напомним (см., например, [6]), что множество Q в метрическом пространстве называется F_σ -множеством, если оно представимо в виде (3), где Q_n – замкнутые множества и $\forall n \geq 1 Q_n \subseteq Q_{n+1}$.

Назовем множество Q счетно компактно определимым множеством (коротко, $СК$ -множеством), если оно допускает представление (3), в котором Q_n – компакты и $\forall n \geq 1 Q_n \subseteq Q_{n+1}$. Очевидно, что любое $СК$ -множество подавно будет F_σ -множеством. Пусть, обратно, Q – любое F_σ -множество в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, и (3) – соответствующее его представление. Пусть $\|z\|_p = \sum_{k=1}^p |z_k|$, если $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$. Положим $\forall n \geq 1 M_n = Q_n \cap \{z \in \mathbb{C}^p: \|z\|_p \leq n\}$. Тогда M_n – компакт в $\mathbb{C}^p$ и $M_n \subseteq M_{n+1} \forall n \geq 1$. Пусть z – произвольная точка Q . Тогда $\exists m \geq 1: z \in Q_m$. Если $k > m$, и $k > \|z\|_p$, то $z \in M_k$. Таким образом, $Q = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$, и Q – $СК$ -множество. Следовательно, в $\mathbb{C}^p$ понятия F_σ -множеств и $СК$ -множеств совпадают.

ТЕОРЕМА 5. *Множество Q в $\mathbb{C}^p$ является F_σ -множеством (или, что все равно, CK -множеством) тогда и только тогда, когда $F[Q]$ – F_σ -множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $F[Q] = Q \cap \text{Fr } Q$.

1. Пусть Q является CK -множеством. Тогда справедливо представление (3), в котором Q_n – компакты и $\forall n \geq 1 \ Q_n \subseteq Q_{n+1}$. Положим $\forall k \geq 1$

$$F_k = Q_k \cap F[Q] = Q_k \cap \text{Fr } Q.$$

Ясно, что F_k – компакт в $\mathbb{C}^p$, при этом $\forall k \geq 1$

$$F_k \subseteq F_{k+1} \subseteq Q \cap \text{Fr } Q = F[Q].$$

Далее,

$$F[Q] = \text{Fr } Q \cap Q = \text{Fr } Q \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{Fr } Q \cap Q_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

и $F[Q]$ – CK -множество.

2. Пусть, обратно, $F[Q]$ – CK -множество, т.е. $F[Q] = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, где $\forall k \geq 1 \ F_k$ – компакт и $F_k \subseteq F_{k+1}$. Имеем $Q = F[Q] \cup \text{Int } Q$. Как известно, открытое множество $\text{Int } Q$ в $\mathbb{C}^p$ состоит из не более чем счетного числа компонент – областей G_m ($m = 1, 2, \dots$). Найдем для каждого номера $m \geq 1$ возрастающую последовательность компактов $\{F_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$, аппроксимирующую изнутри область G_m : $\forall n \geq 1$

$$F_{m,n} \subseteq F_{m,n+1} \subseteq G_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{m,k} = \bigcup_{k=s}^{\infty} F_{m,k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Положим $\forall n \geq 1$

$$Q_n = F_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^n F_{k,n} \right).$$

Ясно, что Q_n – компакт в $\mathbb{C}^p$, причем $Q_n \subseteq Q_{n+1} \subseteq F[Q] \cup \text{Int } Q = Q$. Имеем $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F[Q]$. Далее, при любом $j \geq 1$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^n F_{k,n} \right) \supseteq \bigcup_{n=j}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^n F_{k,n} \right) \supseteq \bigcup_{m=j}^{\infty} F_{j,m} = G_j$$

и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq \text{Int } Q$. Следовательно, $Q \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq F[Q] \cup \text{Int } Q = Q$ и окончательно $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Назовем выпуклое множество Q счетно компактно выпуклым (коротко CK -выпуклым), если оно представимо в виде (3), где $\forall n \geq 1 \ Q_n$ – выпуклый компакт и $Q_n \subseteq Q_{n+1}$. Ясно, что каждое CK -выпуклое множество подалюбо будет CK -множеством. Пусть, обратно, Q – выпуклое CK -множество. Если $\text{Conv } Q_n$ – выпуклая оболочка компакта Q_n из представления (3) множества Q , то $\forall n \geq 1 \ Q_n \subseteq \text{Conv } Q_n \subseteq Q$, откуда $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Conv } Q_n$ и, следовательно, Q – CK -выпуклое множество. Из теоремы 5 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Выпуклое множество Q в $\mathbb{C}^p$ является $СК$ -выпуклым тогда и только тогда, когда $F[Q]$ – F_σ -множество.*

Это следствие позволяет построить простые примеры выпуклых множеств в $\mathbb{C}^p$, не являющихся $СК$ -выпуклыми. Например, если из единичного круга $|z| \leq 1$ удалить все точки $z = \exp(i\vartheta)$, где ϑ – рациональное число из $[0, 2\pi]$, то оставшееся множество будет выпуклым, но не $СК$ -выпуклым, так как множество всех иррациональных чисел из $[0, 2\pi]$ не является F_σ -множеством (см. [6, гл. I, § 5, с. 53]).

Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}^p$ и $WK(Q)$ – совокупность всех компактов, содержащихся в Q . Назовем последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ компактов из $WK(Q)$ счетной базой в $WK(Q)$, если $\forall B \in WK(Q) \exists n \geq 1: B \subseteq Q_n$. Заметим, что если $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – счетная база в $WK(Q)$, то заменяя, в случае необходимости, множество Q_n множеством $\text{Conv}(\bigcup_{k=1}^n Q_k)$, можно всегда добиться того, чтобы $Q_n \subseteq Q_{n+1} \forall n \geq 1$. Очевидно, что если в $WK(Q)$ имеется счетная база $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$, то $Q = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$, и Q является $СК$ -выпуклым множеством.

В то же время, если Q – $СК$ -выпуклое множество и Q_n – выпуклые компакты из представления (3), то последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – не обязательно счетная база в $WK(Q)$. Положим $R_1 := Q_1$, $R_n := Q_n \setminus Q_{n-1}$, $n \geq 2$. Назовем последовательность $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ элементов из Q пробной, если $\forall k \geq 1 \exists n_k \geq 1: n_k \rightarrow \infty, x_k \in R_{n_k}, k = 1, 2, \dots$. Обозначим символом X' множество всех предельных точек пробной последовательности X . Тогда справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть Q – $СК$ -выпуклое множество и пусть Q_n – выпуклые компакты из соответствующего представления (3) ($n = 1, 2, \dots$). Для того, чтобы последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ являлась счетной базой в $WK(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы $X' \cap Q = \emptyset$ для любой пробной последовательности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $y_0 \in X' \cap Q$ для некоторой пробной последовательности $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда $y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k}, m_k \uparrow \infty$. Множество $D\{y_0 \cup \{x_{m_k} : k = 1, 2, \dots\}\}$ является компактом. При этом $\forall l \geq 1 D \setminus Q_l \neq \emptyset$, и $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ не является счетной базой в $WK(Q)$.

2. Пусть, обратно, $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – не счетная база в $WK(Q)$. Тогда в Q найдется компакт T со следующим свойством: $\forall k \geq 1 \exists x_k \in T \setminus Q_k$. Обозначим символом n_k наименьший номер, для которого $x_k \in Q_{n_k}$ (такой номер обязательно найдется, так как $x_k \in \bigcup_{m=1}^\infty Q_m$ и $Q_m \subseteq Q_{m+1}$, при этом $n_k > k$). Тогда $\forall k \geq 1 x_k \in R_{n_k}$ и $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ – пробная последовательность. Ясно, что $X' \subseteq T$ и подавно $X' \cap Q \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ – неубывающая последовательность выпуклых компактов выпуклого множества $Q \subseteq \mathbb{C}^p$. Для того,*

чтобы эта последовательность была счетной базой в $WK(Q)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) справедливо представление (3);
- 2) $X' \cap Q \neq \emptyset$ для любой пробной последовательности X .

В связи с теоремой 6 и ее следствием было бы интересно, на наш взгляд, указать критерий наличия счетной базы в $WK(Q)$ для выпуклого множества Q (ясно, что необходимым условием для этого будет CK -выпуклость Q). Весьма вероятно, что этот критерий можно выразить в терминах, связанных с $F[Q]$.

В заключение отметим, что результаты данной работы находят применение при исследовании оператора свертки, действующего в пространстве аналитических ростков на произвольном связном множестве Q .

Ростовский государственный университет
E-mail: kor@rsu.rnd.su

Поступило
16.12.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Ann. 1966. V. 163. № 1. P. 62–83.
- [2] Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 1964??, М.: ВИНТИ, 1966. С. 76–174.
- [3] Floret K. Some aspects of the theory of locally convex inductive limits // Functional Analysis: Surveys and recent results II. / ed. K.-D. Bierstedt, B. Fuchssteiner: North-Holland Publishing Company, 1980. P. 205–237.
- [4] Bierstedt K. D. An introduction to locally convex inductive limits // Functional analysis and its applications. Vice 25 Aug.–20 Sep. 1986 (ICRAM Lecture Notes). World Science for 1986. P. 36–133.
- [5] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
- [6] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1969.