Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О вырождении M -многообразий,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 3, 396–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:11:48

О ВЫРОЖДЕНИИ M -МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Краснов

Введение. Основной метод построения вещественного алгебраического многообразия с определенными топологическими свойствами состоит в построении вариации специального особого многообразия. Если рассматривать эту вариацию в обратную сторону, то получим вырождение вещественного алгебраического многообразия. В работе [1] доказано несколько общих свойств таких вырождений. В этой заметке мы рассматриваем вырождение M -многообразия и доказываем неравенство, которое является аналогом неравенства Гарнака–Тома для отображения. Заметим, что если применить в рассматриваемой ситуации общие неравенства Гарнака–Тома для отображений из работы [2], то получаются более слабые неравенства, чем доказанное в этой заметке. Перейдем теперь к точным формулировкам.

Пусть $\pi: X \rightarrow \Delta$ – собственное голоморфное отображение $(n+1)$ -мерного комплексного многообразия X на диск $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$, причем предполагается, что π – гладкое отображение над проколотым диском $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Пусть, кроме того, имеется антиголоморфная инволюция $\tau: X \rightarrow X$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta & \longrightarrow & \Delta \end{array},$$

где $\Delta \rightarrow \Delta$ – инволюция комплексного сопряжения. Мы будем предполагать, что функция $\pi: X \rightarrow \Delta$ имеет только изолированные критические точки, они лежат на слое $\pi^{-1}(0)$. Слой $\pi^{-1}(t)$ будем обозначать через Y_t , он предполагается связным для каждого $t \in \Delta$. Выберем на X эрмитову метрику, инвариантную относительно τ . Пусть $x_1, \dots, x_q$ – критические точки функции $\pi: X \rightarrow \Delta$, причем $x_1, \dots, x_p$ – все вещественные точки среди них, т.е. $\tau(x_1) = x_1, \dots, \tau(x_p) = x_p$. Для каждой точки x_i возьмем

замкнутый шар B_i с центром в точке x_i и радиуса $\varepsilon \ll 1$. Пересечение $B_i \cap Y_t$ будем обозначать через $C_{i,t}$, где $0 < |t| < \eta \ll \varepsilon$, а объединение $\bigcup_{i=1}^q C_{i,t}$ обозначим через C_t . Заметим, что $H^s(C_{i,t}; \mathbb{F}_2) = 0$ при $s \neq 0, n$ (см. [3], [4]). Положим

$$\mu_i = \dim H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2), \quad \mu = \sum_{i=1}^q \mu_i = \dim H^n(C_t; \mathbb{F}_2).$$

Пусть

$$T: H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2)$$

– оператор монодромии, $H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2)^T$ – инвариантное подпространство, тогда положим

$$\mu_i^0 = \dim H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2)^T, \quad \mu^0 = \sum_{i=1}^p \mu_i^0.$$

Пусть X^τ, Y_t^τ ($t > 0$) – множества неподвижных точек инволюции, будем обозначать размерность ядра гомоморфизма ограничения

$$H^s(X^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^s(Y_t^\tau; \mathbb{F}_2)$$

через $k_{\mathbb{R}}^s$, а размерность пространства $H^s(\cdot; \mathbb{F}_2)$ обозначим через $h^s(\cdot)$, тогда справедлива

ТЕОРЕМА. *Если Y_t ($t > 0$) является M -многообразием, то выполняется неравенство*

$$\sum_{s=0}^n k_{\mathbb{R}}^s \leq (h^{n+1}(Y_0) - h^{n-1}(Y_0)) - \frac{\mu - \mu^0}{2}. \quad (1)$$

Заметим, что из неравенства (1) вытекает неравенство

$$\sum_{s=0}^n k_{\mathbb{R}}^s \leq h^{n+1}(Y_0) - h^{n-1}(Y_0).$$

Это неравенство нетрудно получить из общего неравенства Гарнака–Тома для отображения в статье [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Сначала мы докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Всегда имеет место следующее равенство*

$$h^*(Y_t) = h^*(Y_0) + \mu - 2(h^{n+1}(Y_0) - h^{n-1}(Y_0)), \quad (2)$$

где $h^*(\cdot) = \sum_s h^s(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется вещественная ретракция $r: X \rightarrow Y_0$ такая, что Y_t отображается на Y_0 ($t \in \Delta$), C_t отображается на C_0 , причем $Y_t \setminus \text{Int } C_t$ ($0 < |t| < \eta$) гомеоморфно отображается на $Y_0 \setminus \text{Int } C_0$. Рассмотрим теперь спектральную последовательность Лере для отображения $r: Y_t \rightarrow Y_0$ ($0 < t < \eta$)

$$E_2^{i,j} = H^i(Y_0; R^j r_* \mathbb{F}_2) \Rightarrow H^{i+j}(Y_t; \mathbb{F}_2).$$

Тогда имеем равенства: $R^j r_* \mathbb{F}_2 = 0$ при $j \neq 0, n$, $R^0 r_* \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2$, а $R^n r_* \mathbb{F}_2$ — пучок, сосредоточенный в точках x_i , причем

$$(R^n r_* \mathbb{F}_2)_{x_i} = H^n(C_{i,t}; \mathbb{F}_2).$$

Поэтому из спектральной последовательности получаем равенства

$$\begin{aligned} h^s(Y_t) &= h^s(Y_0) \quad \text{при } s \neq n, n+1, \\ h^n(Y_t) &= h^n(Y_0) + \mu - \dim \text{Im } d_{n+1}^{0,n}, \\ h^{n+1}(Y_t) &= h^{n+1}(Y_0) - \dim \text{Im } d_{n+1}^{0,n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $h^{n+1}(Y_t) = h^{n-1}(Y_t) = h^{n-1}(Y_0)$, то

$$\dim \text{Im } d_{n+1}^{0,n} = h^{n+1}(Y_0) - h^{n+1}(Y_t) = h^{n+1}(Y_0) - h^{n-1}(Y_0),$$

следовательно при сложении равенств (3) получается равенство (2). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть Y_t ($t > 0$) является M -многообразием, тогда отображение $r: Y_t^\tau \rightarrow Y_0^\tau$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все особые точки множества Y_0^τ принадлежат $r(Y_t^\tau)$. Особая точка $x_i \in \{x_1, \dots, x_p\}$ не принадлежит $r(Y_t^\tau)$ только в том случае, если она изолированная точка множества Y_0^τ и $C_{i,t}^\tau \neq \emptyset$. Пусть, например, x_1 такая точка, тогда множество $C_{1,-t}^\tau$ является сферой. Так как многообразия с краем $Y_t \setminus \text{Int } C_t$, $Y_{-t} \setminus \text{Int } C_{-t}$ гомеоморфны как многообразия с вещественной структурой, причем при соответствующем вещественном гомеоморфизме граница $\partial C_{1,t}$ отображается на $\partial C_{1,-t}$, то можем заменить в Y_t множество $C_{1,t}$ на $C_{1,-t}$, т.е. вырезать $C_{1,t}$ и приклеить $C_{1,-t}$ по краю с помощью соответствующего гомеоморфизма $\partial C_{1,t} \approx \partial C_{1,-t}$. Полученное такой перестройкой топологическое многообразие с вещественной структурой обозначим через $\tilde{Y}_t$. Фактически, эта перестройка меняет только вещественную структуру на Y_t . Заметим теперь, что $\tilde{Y}_t^\tau$ получается из Y_t^τ добавлением сферы $C_{1,-t}^\tau$, поэтому

$$\dim H^*(\tilde{Y}_t^\tau; \mathbb{F}_2) = \dim H^*(Y_t^\tau; \mathbb{F}_2) + 2.$$

С другой стороны, многообразие $\tilde{Y}_t$ гомеоморфно Y_t , поэтому

$$\dim H^*(\tilde{Y}_t; \mathbb{F}_2) = \dim H^*(Y_t; \mathbb{F}_2).$$

Так как Y_t является M -многообразием, то из этих равенств получаем следующее неравенство

$$\dim H^*(\tilde{Y}_t^\tau; \mathbb{F}_2) > \dim H^*(\tilde{Y}_t; \mathbb{F}_2),$$

что противоречит неравенству Гарнака–Тома. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если отображение $r: Y_t^\tau \rightarrow Y_0^\tau$ ($t > 0$) сюръективно, то выполняется равенство*

$$h^*(Y_t^\tau) = h^*(Y_0^\tau) + h^*(C_t^\tau) - p - 2k_{\mathbb{R}}^*. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Лере для отображения $r: Y_t^\tau \rightarrow Y_0^\tau$:

$$E_2^{i,j} = H^i(Y_0^\tau; R^j r_* \mathbb{F}_2) \Rightarrow H^{i+j}(Y_t^\tau; \mathbb{F}_2).$$

Пучок $R^j r_* \mathbb{F}_2$ при $j > 0$ сосредоточен в особых точках $x_1, \dots, x_p$, поэтому $E_2^{i,j} = H^i(Y_0^\tau; R^j r_* \mathbb{F}_2) = 0$ при $i > 0, j > 0$. Обозначим пучок $R^0 r_* \mathbb{F}_2$ через $\mathcal{F}$, так как отображение $r: Y_t^\tau \rightarrow Y_0^\tau$ сюръективно, то пучок $\mathcal{F}$ содержит в качестве подпучка постоянный пучок $\mathbb{F}_2$, а фактор-пучок $\mathcal{F}/\mathbb{F}_2$ обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}$. Пучок $\tilde{\mathcal{F}}$ сосредоточен в особых точках $x_1, \dots, x_p$, поэтому из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

вытекает равенство

$$H^i(Y_0^\tau; \mathbb{F}_2) = H^i(Y_0^\tau; \mathcal{F}) \quad (5)$$

при $i > 1$, а, кроме этого, получается точная последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Y_0^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(Y_0^\tau; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(Y_0^\tau; \tilde{\mathcal{F}}) \\ \rightarrow H^1(Y_0^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(Y_0^\tau; \mathcal{F}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как отображение $r: X^\tau \rightarrow Y_0^\tau$ является ретракцией, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} k_{\mathbb{R}}^s &= \dim \text{Ker}[H^s(X^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^s(Y_t^\tau; \mathbb{F}_2)] \\ &= \dim \text{Ker}[r^*: H^s(Y_0^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^s(Y_t^\tau; \mathbb{F}_2)]. \end{aligned}$$

Поэтому из рассмотрения спектральной последовательности вытекают равенства

$$\begin{aligned} k_{\mathbb{R}}^0 &= 0, \quad k_{\mathbb{R}}^1 = \dim \operatorname{Ker}[H^1(Y_0^\tau; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(Y_0^\tau; \mathcal{F})], \\ k_{\mathbb{R}}^s &= \dim \operatorname{Im} d_s^{0, s-1} \quad \text{при } s > 1. \end{aligned}$$

Тогда также из рассмотрения спектральной последовательности получаем равенства

$$\begin{aligned} h^*(Y_t^\tau) &= \sum_{i, j \geq 0} h^i(Y_0^\tau; R^j r_* \mathbb{F}_2) - 2 \sum_{i \geq 1} \dim \operatorname{Im} d_{i+1}^{0, i} \\ &= \sum_{i \geq 0} h^i(Y_0^\tau; \mathcal{F}) + \sum_{j > 0} h^0(Y_0^\tau; R^j r_* \mathbb{F}_2) - 2 \sum_{s > 1} k_{\mathbb{R}}^s. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь будем вычислять правую часть последнего равенства. Согласно равенству (5) имеем

$$\sum_{i > 1} h^i(Y_0^\tau; \mathcal{F}) = \sum_{i > 1} h^i(Y_0^\tau).$$

Так же имеем равенство

$$\sum_{j > 0} h^0(Y_0^\tau; R^j r_* \mathbb{F}_2) = \sum_{j > 0} h^j(C_t^\tau).$$

А из точной последовательности (6) вытекает равенство

$$h^0(Y_0^\tau; \mathcal{F}) + h^1(Y_0^\tau; \mathcal{F}) = h^0(Y_0^\tau) + h^1(Y_0^\tau) + h^0(Y_0^\tau; \tilde{\mathcal{F}}) - 2k_{\mathbb{R}}^1.$$

Так как $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}/\mathbb{F}_2$, то

$$h^0(Y_0^\tau; \tilde{\mathcal{F}}) = h^0(C_t^\tau) - p.$$

Следовательно, правая часть равенства (7) равна

$$h^*(Y_0^\tau) + h^*(C_t^\tau) - p - 2k_{\mathbb{R}}^*.$$

Лемма доказана.

Перейдем к заключительному этапу доказательства теоремы. Так как Y_t является M -многообразием, то

$$h^*(Y_t^\tau) = h^*(Y_t),$$

поэтому из равенств (2), (4) вытекает равенство

$$k_{\mathbb{R}}^* = (h^{n+1}(Y_0) - h^{n-1}(Y_0)) + (h^*(Y_0^\tau) - h^*(Y_0)) - \frac{\mu + p}{2} + \frac{1}{2}h^*(C_t^\tau). \quad (8)$$

Заметим теперь, что выполняются неравенства

$$h^*(Y_0^\tau) - h^*(Y_0) \leq 0, \\ h^*(C_t^\tau) = \sum_{i=1}^p h^*(C_{i,t}^\tau) \leq \sum_{i=1}^p (1 + \mu_i^0) = p + \mu^0,$$

первое из которых является неравенством Гарнака–Тома, а второе доказано в [5]. Из равенства (8) и этих неравенств получаем неравенство (1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда Y_t – кривая, неравенство (1) преобразуется в следующее неравенство

$$h^1(Y_0^\tau) \leq g + r - s - \frac{p+q}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q r_i - \sum_{i=1}^q \delta_{x_i},$$

где g – род кривой Y_t ($t > 0$), r – число неприводимых компонент Y_0 , r_i – число неприводимых компонент $C_{i,0}$, s – число изолированных точек Y_0^τ , δ_{x_i} – классический инвариант особой точки $x_i \in Y_0$.

Ярославль

Поступило

06.03.91

Исправленный вариант

26.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Вырождения вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 4. С. 798–827.
- [2] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [3] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
- [4] Арнольд В. И. и др. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.
- [5] Краснов В. А. Неравенство Гарнака–Тома для критической точки многочлена // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 717–720.