Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 106–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:48:36

УДК 511.33+517.443

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ ПУАССОНА

А. В. Устинов

В первой части статьи доказывается дискретный аналог формулы суммирования Пуассона. Во второй части работы излагается элементарное доказательство функционального уравнения для функции $\theta(t)$, основанное на полученной формуле суммирования.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $\mathcal{S}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, убывающих быстрее, чем любая положительная степень, т.е. таких, что для любого натурального n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n f(x) = 0.$$

Определим преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in \mathcal{S}$ формулой

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x y} f(x) dx.$$

Такой интеграл сходится при всех действительных значениях y и задает функцию $\hat{f}(y) \in \mathcal{S}$.

Известно, что сумма значений функции в точках равномерной сетки связана с аналогичной суммой значений ее преобразования Фурье. Подобная связь описывается формулой суммирования Пуассона. Она допускает различные варианты записи. Для функции $f \in \mathcal{S}$ она может быть записана без остаточного члена:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) \quad (1)$$

(см. [1]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00738.

Формула суммирования Пуассона используется в различных задачах математического анализа и теории чисел. Например, для функции

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2}, \quad (2)$$

определенной при $t > 0$, с помощью формулы (1) можно доказать функциональное уравнение

$$\theta(t^{-1}) = \sqrt{t} \theta(t) \quad (3)$$

(см. [1], [2]). Варианты формулы суммирования Пуассона с остаточным членом позволяют находить точное значение суммы Гаусса (см. [3], [2]) и получать оценки тригонометрических сумм (см. [2]). Еще несколько примеров можно найти в книге [4].

В настоящей работе рассматриваются функции, заданные в конечном числе точек равномерной сетки. Для таких функций доказывается дискретный аналог формулы (1), который связывает сумму значений функции в узлах более редкой равномерной сетки с суммой ее конечных коэффициентов Фурье. Затем полученная формула применяется к доказательству функционального уравнения функции $\theta(t)$. При этом подход к доказательству равенства (3) является элементарным.

Аналогично дискретный аналог равенства (1) может быть использован и в других задачах, в которых применяется обычная формула суммирования Пуассона.

2. Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона. Далее в качестве равномерной сетки будем рассматривать точки с целыми координатами, т.е. будем предполагать, что функция $f(x)$ определена для всех целых x из интервала $0 \leq x < p$, где p – некоторое натуральное число.

Известно, что в каждой из этих точек функция $f(x)$ представляется своим конечным рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_p(k) e^{2\pi i k x / p}, \quad 0 \leq x < p, \quad (4)$$

где $C_p(k)$ – конечные коэффициенты Фурье функции $f(x)$, которые находятся по формуле

$$C_p(k) = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} f(x) e^{-2\pi i k x / p}, \quad 0 \leq k < p.$$

Следующее утверждение можно считать дискретным аналогом формулы (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть p_1, p_2 – натуральные числа, $p = p_1 p_2$, функция $f(x)$ определена для всех целых x из интервала $0 \leq x < p$ и $C_p(k)$ – ее конечные коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{y=0}^{p_2-1} f(p_1 y) = p_2 \sum_{n=0}^{p_1-1} C_p(p_2 n). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем первую сумму при помощи формулы (4):

$$\sum_{y=0}^{p_2-1} f(p_1 y) = \sum_{y=0}^{p_2-1} \sum_{k=0}^{p-1} C_p(k) e^{2\pi i k p_1 y / p} = \sum_{k=0}^{p-1} C_p(k) \sum_{y=0}^{p_2-1} e^{2\pi i k y / p_2}.$$

Далее, так как

$$\sum_{y=0}^{p_2-1} e^{2\pi i k y / p_2} = p_2 \delta_{p_2}(k) = \begin{cases} p_2, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{p_2}, \\ 0, & \text{если } k \not\equiv 0 \pmod{p_2}, \end{cases}$$

то

$$\sum_{y=0}^{p_2-1} f(p_1 y) = \sum_{k=0}^{p-1} C_p(k) p_2 \delta_{p_2}(k) = p_2 \sum_{n=0}^{p_1-1} C_p(p_2 n).$$

3. Доказательство функционального уравнения для функции $\theta(t)$. Доказательству равенства (3) предположим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть q_1, q_2 – натуральные числа и $q = 2q_1 q_2$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{q_1}{2^q} \sum_{m=-q_2}^{q_2} C_q^{q_1(q_2+m)} = \sum_{n=0}^{q_1-1} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f(x) = C_q^x$, определенную при целых x из интервала $0 \leq x < q$, и найдем ее конечные коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} C_q(k) &= \frac{1}{q} \sum_{x=0}^{q-1} C_q^x e^{-2\pi i k x / q} = \frac{1}{q} [(1 + e^{-2\pi i k / q})^q - 1] \\ &= \frac{1}{q} [e^{-\pi i k} (e^{\pi i k / q} + e^{-\pi i k / q})^q - 1] = \frac{1}{q} \left[(-1)^k \left(2 \cos \frac{\pi k}{q} \right)^q - 1 \right]. \end{aligned}$$

Применяя теорему 1 к функции $f(x) = C_q^x$ с $p_1 = q_1, p_2 = 2q_2$ и $p = 2q_1 q_2$, приходим к равенству

$$\sum_{y=0}^{2q_2-1} C_q^{q_1 y} = \frac{2q_2}{q} \sum_{n=0}^{q_1-1} \left(2 \cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q - 1.$$

Отсюда

$$\frac{q_1}{2^q} \sum_{y=0}^{2q_2} C_q^{q_1 y} = \sum_{n=0}^{q_1-1} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q,$$

что равносильно утверждению леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $t > 0$ – действительное число такое, что произведение πt рационально. Пусть далее

$$\pi t = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1, \quad z \geq 1, \quad q_1 = az, \quad q_2 = bz, \quad q = 2q_1q_2.$$

Будем также предполагать, что величины M, N, m и n удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq M, N \leq \sqrt{z}, \quad |m| \leq M, \quad |n| \leq N.$$

Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\frac{q_1}{2^q} C_q^{q_1(q_2+m)} = \sqrt{t} e^{-\pi t m^2} \left(1 + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right) \right), \quad (7)$$

$$\left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q = e^{-\pi n^2/t} \left(1 + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right) \right), \quad (8)$$

где константы в знаках O могут зависеть от a и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала равенство (7). Воспользуемся формулой Стирлинга

$$k! = \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e} \right)^k \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right)$$

для вычисления биномиального коэффициента $C_q^{q_1(q_2+m)}$:

$$\begin{aligned} C_q^{q_1(q_2+m)} &= \frac{(2q_1q_2)!}{[q_1(q_2+m)]! [q_1(q_2-m)]!} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi q_1q_2}{4\pi^2 q_1^2(q_2^2 - m^2)}} \cdot \frac{(2q_2)^{2q_1q_2} (1 + O(z^{-2}))}{(q_2+m)^{q_1(q_2+m)} (q_2-m)^{q_1(q_2-m)}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{q_1}{2^q} C_q^{q_1(q_2+m)} = \sqrt{t} \left(1 + \frac{m}{q_2} \right)^{-q_1(q_2+m)} \left(1 - \frac{m}{q_2} \right)^{-q_1(q_2-m)} \left(1 + O\left(\frac{M^2}{z^2}\right) \right).$$

Далее, замечая, что

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{m}{q_2} \right)^{q_1(q_2+m)} \left(1 - \frac{m}{q_2} \right)^{q_1(q_2-m)} \\ &= \exp \left(q_1q_2 \ln \left(1 - \frac{m^2}{q_2^2} \right) + q_1m \ln \left(1 + \frac{m}{q_2} \right) - q_1m \ln \left(1 - \frac{m}{q_2} \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{q_1}{q_2} m^2 + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right) \right) = e^{\pi t m^2} \left(1 + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right) \right), \end{aligned}$$

приходим к равенству (7).

Доказательство формулы (8) проводится похожим образом:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q &= \exp \left(q \ln \left(1 - \frac{\pi^2 n^2}{2q_1^2} + O\left(\frac{N^4}{z^4}\right) \right) \right) = \exp \left(q \left(-\frac{\pi^2 n^2}{2q_1^2} + O\left(\frac{N^4}{z^4}\right) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{q_2 \pi^2 n^2}{q_1} + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right) \right) = e^{-\pi n^2/t} \left(1 + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right) \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть, как и в лемме 2, выполняются условия

$$t > 0, \quad \pi t = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1, \quad z \geq 1, \quad q_1 = az, \quad q_2 = bz, \quad q = 2q_1q_2.$$

Будем также предполагать, что параметры M и N удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{t} \leq M \leq \sqrt{z}, \quad t \leq N \leq \sqrt{z}.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\sum_{m \geq M} e^{-\pi t m^2} = O(e^{-2M}), \quad (9)$$

$$\sum_{n \geq N} e^{-\pi n^2/t} = O(e^{-2N}), \quad (10)$$

$$\frac{q_1}{2^q} \sum_{m \geq M} C_q^{q_1(q_2+m)} = O(e^{-2M}), \quad (11)$$

$$\sum_{N \leq n \leq q_1/2} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q = O(e^{-2N}), \quad (12)$$

где, как и раньше, константы в знаках O могут зависеть от a и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что в каждой из четырех сумм слагаемые убывают не медленнее, чем элементы геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$. Из этого будет следовать, что каждую из сумм можно оценить первым (наибольшим) слагаемым.

Действительно, в первом случае

$$\frac{e^{-\pi t(m+1)^2}}{e^{-\pi t m^2}} = e^{-\pi t(2m+1)} < e^{-2\pi t M} \leq e^{-2\pi} < \frac{1}{2}$$

и наибольшее слагаемое оценивается величиной

$$e^{-\pi t M^2} \leq e^{-\pi M} = O(e^{-2M}).$$

Оценка (10) проверяется абсолютно аналогично.

Докажем формулу (11). Отношение соседних слагаемых вновь не превосходит $1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{C_q^{q_1(q_2+m+1)}}{C_q^{q_1(q_2+m)}} &= \frac{[q_1(q_2-m)] \cdots [q_1(q_2-m) - q_1 + 1]}{[q_1(q_2+m) + q_1] \cdots [q_1(q_2+m) + 1]} < \left(\frac{q_2-m}{q_2+m} \right)^q \\ &< \left(1 + \frac{m}{q_2} \right)^{-2q_1} = e^{-2q_1 \ln(1+m/q_2)} < e^{-mq_1/q_2} = e^{-\pi t m} < e^{-\pi} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Кроме этого, первое слагаемое в левой части формулы (11) можно оценить при помощи леммы 2:

$$\frac{q_1}{2^q} C_q^{q_1(q_2+M)} = O(e^{-\pi t M^2}) = O(e^{-2M}).$$

Для проверки формулы (12) заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\pi(n+1)/q_1)}{\cos(\pi n/q_1)} &= 1 + \frac{\cos(\pi(n+1)/q_1) - \cos(\pi n/q_1)}{\cos(\pi n/q_1)} \\ &< 1 - \frac{(\pi/q_1) \sin(\pi n/q_1)}{\cos(\pi n/q_1)} = 1 - \frac{\pi}{q_1} \operatorname{tg} \frac{\pi n}{q_1} < 1 - \frac{\pi^2 n}{q_1^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\frac{\cos(\pi(n+1)/q_1)}{\cos(\pi n/q_1)} \right)^q < \left(1 - \frac{\pi^2 n}{q_1^2} \right)^q < e^{-2q_2 \pi^2 n/q_1} = e^{-\pi n/t} < e^{-\pi} < \frac{1}{2}.$$

Первое слагаемое в левой части равенства (12) вновь оценивается при помощи леммы 2:

$$\left(\cos \frac{\pi N}{q_1} \right)^q = O(e^{-\pi N^2/t}) = O(e^{-2N}).$$

ТЕОРЕМА 2. При всех $t > 0$ функция $\theta(t)$, задаваемая рядом (4), удовлетворяет равенству (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из абсолютной сходимости ряда (4) следует непрерывность функции $\theta(t)$. Поэтому теорему достаточно доказать лишь для тех положительных t , для которых число πt рационально.

Зафиксируем $t > 0$ и определим целые a и b при помощи соотношений $\pi t = a/b$, $(a, b) = 1$. Далее выберем $z \geq e^{\max(t, t^{-1})}$ и положим

$$M = N = \ln z, \quad q_1 = az, \quad q_2 = bz, \quad q = 2q_1 q_2.$$

Пользуясь последовательно формулами (11) и (7), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{2^q} \sum_{m=-q_2}^{q_2} C_q^{q_1(q_2+m)} &= \frac{q_1}{2^q} \sum_{|m| < M} C_q^{q_1(q_2+m)} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \sqrt{t} \left(1 + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right) \right) \sum_{|m| < M} e^{-\pi t m^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \sqrt{t} \sum_{|m| < M} e^{-\pi t m^2} + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right). \end{aligned}$$

Применяя оценку (9), приходим к соотношению

$$\frac{q_1}{2^q} \sum_{m=-q_2}^{q_2} C_q^{q_1(q_2+m)} = \sqrt{t} \theta(t) + O\left(\frac{M^4}{z^2}\right). \quad (13)$$

Аналогично из формул (12) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q_1-1} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q &= \sum_{|n| \leq N} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \left(1 + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right) \right) \sum_{|n| < N} e^{-\pi n^2/t} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \sum_{|n| < N} e^{-\pi n^2/t} + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right). \end{aligned}$$

Теперь из оценки (10) следует равенство

$$\sum_{n=0}^{q_1-1} \left(\cos \frac{\pi n}{q_1} \right)^q = \theta\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{N^4}{z^2}\right). \quad (14)$$

Подставляя формулы (13) и (14) в (6), получаем соотношение

$$\sqrt{t}\theta(t) = \theta\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{\ln^4 z}{z^2}\right).$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow \infty$, приходим к нужному результату.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. Новокузнецк: ИО НФМИ, 2000.
- [2] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
- [3] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
- [4] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ustinov@mech.math.msu.su

Поступило
29.01.2002