Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рахимов, Об условиях локализации спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам из класса A_r , *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 421–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:59:21

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРАМ ИЗ КЛАССА A_r

А. А. Рахимов

Пусть $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ – однородный эллиптический дифференциальный оператор с постоянными вещественными коэффициентами и с областью определения $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Существует единственное самосопряженное расширение оператора $A(D)$ в $L_2(\mathbb{R}^N)$, которое будем обозначать $\hat{A}$. Оператор $\hat{A}$, как и любой самосопряженный оператор, по спектральной теореме Дж. фон Неймана обладает разложением единицы $\{E_\lambda\}$ и представляется в виде

$$\hat{A} = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda.$$

Проекторы E_λ монотонно возрастают, непрерывны слева и по теореме Л. Гординга [1] являются интегральными операторами с ядром $\Theta(x, y, \lambda)$, называемым спектральной функцией оператора $\hat{A}$, причем функция $\Theta(x, y, \lambda)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ при каждом $\lambda > 0$.

Пусть $\Lambda(\mathbb{R}^N)$ обозначает пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^N$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R}^N$, как последовательностей самих функций, так и их производных любого порядка. Пространство $\Lambda(\mathbb{R}^N)$ с такой топологией будет пространством Фреше. Пусть $\Lambda'(\mathbb{R}^N)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\Lambda(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что всякое распределение из $\Lambda'(\mathbb{R}^N)$ имеет в $\mathbb{R}^N$ компактный носитель. Как было отмечено выше, спектральная функция $\Theta(x, y, \lambda)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^N$ принадлежит классу $\Lambda(\mathbb{R}^N)$ как функция y . Это позволяет определить спектральные разложения распределений из $\Lambda'(\mathbb{R}^N)$. Пусть $f \in \Lambda'(\mathbb{R}^N)$, тогда спектральное разложение $E_\lambda f$ определим равенством

$$E_\lambda f(x) = \langle f, \Theta(x, y, \lambda) \rangle, \quad (1)$$

где распределение f действует на Θ по переменной y . Аналогично определим средние Рисса спектрального разложения

$$E_{\lambda}^s f(x) = \langle f, \Theta^s(x, y, \lambda) \rangle, \quad (2)$$

где $\Theta^s(x, y, \lambda)$ – средние Рисса порядка s , $s \geq 0$, спектральной функции Θ :

$$\Theta^s(x, y, \lambda) = \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dt \Theta(x, y, t).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что оператор $A(D)$ с областью определения $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ принадлежит классу A_r ($r = 0, 1, \dots, N-1$), если в каждой точке поверхности $\{\xi : A(\xi) = 1\}$ по крайней мере r из $N-1$ главных кривизн отличны от нуля.

Например, оператор, соответствующий полиному

$$A(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{r+1} \xi_j^2 \right)^m + \left(\sum_{j=r+2}^N \xi_j^2 \right)^m, \quad (3)$$

при $r \leq N/2 - 1$ является эллиптическим и принадлежит классу A_r и не принадлежит классу A_{r+1} .

Для любого вещественного α обозначим $W_p^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ классы С. Л. Соболева (см. [2]), $1 \leq p \leq \infty$. Нашей целью является изучение спектральных разложений распределений из $W_p^{-\alpha}$, $1 \leq p \leq 2$, где $\alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A(D) \in A_r$ и пусть

$$f \in \Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N), \quad 1 < p \leq 2, \quad \alpha > 0.$$

Пусть Ω некоторая область из $\mathbb{R}^N \setminus \text{Supp } f$. Если

$$s \geq \frac{N-r-1}{p} + \frac{r}{2} + \alpha,$$

то равномерно на каждом компакте K из Ω

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{\lambda}^s f(x) = 0.$$

Условия локализации спектральных разложений распределений из негативных классов Соболева впервые изучались в работе Ш. А. Алимова [3]. Отметим, что при $r = 0$ утверждение теоремы 1 совпадает с достаточными условиями локализации для распределений из негативных классов Соболева, которые справедливы для общего эллиптического оператора с переменными коэффициентами. В случае позитивных классов соответствующая теорема была доказана в [4] при любом $r = 0, 1, \dots, N-1$.

Для любого $\nu \geq 0$ обозначим $\Theta_\nu(x, y, \lambda) = \hat{A}^\nu \Theta(x, y, \lambda)$, где оператор $\hat{A}^\nu$ определен равенством

$$\hat{A}^\nu = \int_0^\infty t^\nu dE_t. \quad (4)$$

Из последнего равенства получим следующее представление для функции $\Theta_\nu(x, y, \lambda)$:

$$\Theta_\nu(x, y, \lambda) = \int_0^\lambda t^\nu d_t \Theta(x, y, t). \quad (5)$$

ЛЕММА 1. Пусть K – произвольный компакт из $\mathbb{R}^N$ и $2 \leq q \leq \infty$. Тогда равномерно по $x \in K$ выполняется неравенство

$$\|\Theta_\nu(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta_\nu(x, y, \lambda^m)\|_{L_p(F)} \leq c\lambda^{\delta+m\nu}, \quad (6)$$

где $\delta = (N - r - 1)(1 - 1/q) + r/2$, $0 \leq h < 1$, $\lambda > 1$, а F – произвольная область из $\mathbb{R}^N$ такая, что $\bar{F} \cap K = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В равенстве (5), интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \Theta_\nu(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta_\nu(x, y, \lambda^m) \\ &= (\lambda + h)^{m\nu} [\Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m)] \\ & \quad - \nu \int_{\lambda^m}^{(\lambda+h)^m} t^{\nu-1} [\Theta(x, y, t) - \Theta(x, y, \lambda^m)] dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что для $\Theta(x, y, \lambda)$ – спектральной функции произвольного оператора $A(D)$ из класса A_r – справедлива равномерная по $x, y \in \mathbb{R}^N$ оценка (см. [4])

$$|\Theta(x, y, \lambda)| \leq \frac{c\lambda^{N/m}}{(1 + \lambda^{1/m}|x - y|)^{(r+2)/2}},$$

где c – положительная константа. Следовательно, если $\bar{F} \cap K = \emptyset$, то равномерно по $x \in K$ и $y \in \bar{F}$ справедлива оценка

$$\Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m) = O(1)\lambda^{N-1-r/2}. \quad (8)$$

Тогда из равенства (7) получим

$$|\Theta_\nu(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta_\nu(x, y, \lambda^m)| \leq c\lambda^{N-1-r/2+m\nu}. \quad (9)$$

Оценка (9) совпадает с оценкой (6) при $q = \infty$, так как в этом случае $\delta = N - 1 - r/2$. Совершенно аналогично устанавливается оценка (6) при $q = 2$, при этом вместо оценки (8) воспользуемся оценкой

$$\|\Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m)\|_{L_2(F)} = O(\lambda^{(N-1)/2}), \quad (10)$$

которая вытекает из леммы 3.1 работы [5]. Доказательство леммы 1 следует из соответствующих оценок при $q = \infty$ и $q = 2$ с использованием интерполяционной теоремы И. Стейна [6].

ЛЕММА 2. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^N$ и пусть $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $1 \leq p \leq 2$. Пусть $f \in \Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N)$, причем $\text{supp } f \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Тогда для любого компакта K из Ω , равномерно по $x \in K$ справедлива оценка

$$E_\lambda^s f(x) = O(1) \lambda^{((N-r-1)/p+r/2+\alpha-s)/m} \|f\|_{-\alpha, p}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varphi(\lambda) = E_\lambda f(x)$ и покажем, что функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условиям тауберовой теоремы Л. Хермандера [5]. Так как $\text{supp } f \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, то для этого достаточно проверить справедливость оценки

$$\varphi((\lambda + h)^m) - \varphi(\lambda^m) = O(1) \lambda^{(N-r-1)/p+r/2+\alpha} \|f\|_{-\alpha, p}, \quad (12)$$

где $0 \leq h < 1$.

Пусть $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega_3$. Тогда по теореме Ш. А. Алимова [7] операторы

$$\hat{A}: \dot{W}_p^m(\Omega_1) \rightarrow L_p(\Omega_1), \quad (13)$$

$$\hat{A}^{-1}: L_p(\Omega_1) \rightarrow \dot{W}_p^{m\nu}(\Omega_2), \quad (14)$$

$$\hat{A}^{1-\nu}: \dot{W}_p^m(\Omega_2) \rightarrow \dot{W}_p^m(\Omega_3) \quad (15)$$

осуществляют изоморфизм по модулю $\Delta(A) = \bigcap_{n=1}^\infty D_n(A)$, где $D_n(A)$ – область определения оператора $\hat{A}^n$. Например, для $\hat{A}^{1-\nu}$ это означает, что

- 1) для любой функции h из класса $\dot{W}_p^m(\Omega_1)$ существует функция f из класса $\dot{W}_p^{m\nu}(\Omega_3)$ такая, что $f - \hat{A}^{1-\nu}h \in \Delta$;
- 2) для любой функции f из класса $\dot{W}_p^{m\nu}(\Omega_2)$ существует функция h из класса $\dot{W}_p^m(\Omega_3)$ такая, что $f - \hat{A}^{1-\nu}h \in \Delta$.

Заметим, что спектральные разложения функций из Δ заведомо сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте из $\mathbb{R}^N$. Поэтому при изучении вопросов сходимости и локализации спектральных разложений можно пренебрегать функциями из Δ .

Из определения функции $\varphi(\lambda)$ следует, что

$$\varphi((\lambda + h)^m) - \varphi(\lambda^m) = \langle f, \Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m) \rangle. \quad (16)$$

Пусть Ω_0 – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ такая, что $\text{supp } f \subset \Omega_0 \Subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Тогда из (16) получим

$$\begin{aligned} & |\varphi((\lambda + h)^m) - \varphi(\lambda^m)| \\ & \leq \|f\|_{-\alpha, p} \cdot \|\Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m)\|_{\alpha, q, \Omega_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\|\cdot\|_{\alpha,q,\Omega_0}$ обозначает норму в пространстве $\overset{\circ}{W}_q^\alpha(\Omega_0)$, $1/p + 1/q = 1$.
Из соотношений (13)–(15) следует

$$\begin{aligned} \|\Theta(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta(x, y, \lambda^m)\|_{\alpha,q,\Omega_0} \\ \leq \|\Theta_\nu(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta_\nu(x, y, \lambda^m)\|_{L_q(F)}, \end{aligned}$$

где $F \in \Omega_0$.

Отсюда, учитывая (6) и (17), получим оценку (12). Таким образом доказано, что функция $\varphi(\lambda) = E_\lambda f(x)$ удовлетворяет всем условиям тауберовой теоремы Хермандера. Следовательно, из тауберовой теоремы получим требуемую оценку (11) для средних Рисса $E_\lambda^s f(x)$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим, что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ плотно в $W_p^\alpha(\mathbb{R}^N)$, где $p > 1$, при любом вещественном α (см. [2, теорема (а), с. 204]) и для любой функции f из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ средние Рисса спектрального разложения $E_\lambda^s f(x)$, где s – любое неотрицательное, сходятся к $f(x)$ равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$. Поэтому, приближая распределение f из $\Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N)$ функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и используя при этом оценку (11), получим утверждение теоремы 1 при любом $s \geq (N - r - 1)/p + r/2 + \alpha$. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть распределение f принадлежит классу $\Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N)$ и в некоторой ограниченной области совпадает с непрерывной функцией $g(x)$. Если $s \geq (N - r - 1)/p + r/2 + \alpha$, то равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = g(x), \quad 1 < p \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из теоремы 6.3 работы Хермандера [5], следует, что если $h(x)$ непрерывна и имеет компактный носитель, то для любого компакта K средние Рисса порядка $s > (N - 1)/2$ сходятся равномерно по $x \in K$ к $h(x)$. Положим $h(x) = 0$ при $x \in K_\varepsilon$, где ε -окрестность K_ε компакта K такова, что $\overline{K_\varepsilon} \subset \Omega$, и положим $h(x) = g(x)$ при $x \in K$ так, что $h(x) \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Тогда, как было замечено,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s h(x) = g(x)$$

равномерно на K при $s > (N - 1)/2$. Если положить $h_1 = f - h$, то распределение h_1 принадлежит $\Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N)$ и удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, равномерно на K

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s h_1(x) = 0$$

при $s \geq (N - r - 1)/p + r/2 + \alpha$. Следствие 1 доказано.

Заметим, что теорема 1 характеризует достаточные условия локализации спектральных разложений в классе A_r . Следующая теорема показывает, что для каждого оператора A из A_r условие $s \geq (N - r - 1)/p + r/2 + \alpha$ можно ослабить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N \setminus \text{Supp } f$. Пусть $A(D)$ – произвольный оператор из класса A_r . Тогда существуют числа $d = d(A) > 2$ и $\beta(p, d) > 0$ такие, что при

$$s \geq \max \left\{ \frac{N-1}{p} - r \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \beta(p, d), \frac{N-1}{2} \right\} + \alpha, \quad 1 < p \leq d',$$

равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{\lambda}^s f(x) = 0, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, как показано в [4], для каждого оператора $A \in A_r$ существует положительное число $b = b(A)$ такое, что справедлива равномерная по $x, y \in \mathbb{R}^N$ оценка

$$\Theta(x, y, \lambda) = O(1) \cdot \frac{\lambda^{N/m}}{(1 + \lambda^{N/m}|x - y|)^{r/2+1+b}}. \quad (18)$$

Более того, существует число $d = d(A) > 2$ такое, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N$ равномерно по $x \in K$ справедлива оценка

$$\|\Theta(x, y, \lambda)\|_{L_d(F)} \leq c\lambda^{(N-1)/(2m)}, \quad (19)$$

где F – область из $\mathbb{R}^N$ такая, что $\overline{F} \cap K = \emptyset$.

ЛЕММА 3. Пусть K – произвольный компакт из $\mathbb{R}^N$. Тогда существует число $d = d(A) > 2$ такое, что при $0 \leq h < 1$, $\lambda > 1$ равномерно по $x \in K$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\Theta_{\nu}(x, y, (\lambda + h)^m) - \Theta_{\nu}(x, y, \lambda^m)\|_{L_q(F)} \\ \leq c\lambda^{(N-1-r)(1-1/q)+r/2+m\nu-\beta}, \end{aligned} \quad (20)$$

$\beta = \beta(p, d) = b(1 - d/q) + (N - 1 - r)(d - 2)/(2q)$, а F – такая область в $\mathbb{R}^N$, что $\overline{F} \cap K = \emptyset$, $d \leq q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя интерполяционную теорему И. Стейна к оценкам (18) и (19) получим

$$\|\Theta(x, y, \lambda)\|_{L_q(F)} = O(1)\lambda^{((N-1-r)/p-\beta+r/2)/m}, \quad (21)$$

где $d \leq q \leq \infty$, $1/p = 1 - 1/q$. Легко убедиться, что оценка (20) следует из соотношения (7) и оценки (21). Лемма 3 доказана.

Теперь доказательство теоремы 2 завершается аналогично доказательству теоремы 1, при этом вместо леммы 1 нужно использовать лемму 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A \in A_r$ и пусть

$$f \in \Lambda'(\mathbb{R}^N) \cap W_p^{-\alpha}(\mathbb{R}^N), \quad \alpha > 0, \quad 1 < p \leq 2.$$

Пусть распределение f совпадает с непрерывной функцией $g(x)$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^N$. Если числа s и p удовлетворяют условиям теоремы 2, то равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = g(x).$$

Автор выражает благодарность проф. Ш. А. Алимову за внимание к работе.

Ташкентский государственный университет

Поступило

23.08.93

Исправленный вариант

07.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.
- [2] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [3] Алимов Ш. А. О спектральных разложениях распределений // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 661–662.
- [4] Ашуров Р. Р. Об условиях локализации спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам с постоянными коэффициентами // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 6. С. 847–857.
- [5] Хермандер Л. О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разложениях // Математика. 1968. Т. 12. № 5. С. 91–130.
- [6] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [7] Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 9. С. 1609–1626.