Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Халмухамедов, Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шредингера и сходимость спектральных разложений, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 428–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:22:21

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЯХ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА И СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Р. Халмухамедов

Рассмотрим в N -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ ($N > 3$) гладкие многообразия $S_1, \dots, S_M$, $\dim S_k \leq N - 3$, каждое из которых однозначно проектируется на некоторую гиперплоскость. Это означает, что для каждого такого многообразия S_k размерности $N - m$ ($3 \leq m < N$) существует аффинное преобразование $\mathbb{R}^N$, приводящее S_k к виду

$$S_k = \{x = (u, v) \in \mathbb{R}^N : u = \varphi_k(v)\}, \quad (1)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^{N-m}$, $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^m)$, причем равномерно по всем $v \in \mathbb{R}^{N-m}$ имеет место неравенство $|\partial \varphi_k^j / \partial v_i| \leq \text{const}$, где $i = 1, \dots, N - m$, $j = 1, \dots, m$ и $\varphi_k = (\varphi_k^1, \dots, \varphi_k^m)$.

Пусть $S = \bigcup S_k$, $\rho = \rho(x) = \text{dist}(x, S)$ и $q(x)$ — функция из $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S)$, допускающая особенность вида

$$|D^\alpha q(x)| \leq \text{const } \rho(x)^{-1-|\alpha|}, \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, — мультииндекс.

Обозначим через $L(x, D)$ эллиптический формально самосопряженный оператор Шрёдингера: $L(x, D) = -\Delta + q(x)$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Из теоремы Като–Реллиха [1, с. 185] вытекает, что оператор L самосопряжен в существенном в $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и полуограничен снизу с некоторой постоянной μ . Обозначим через H единственное самосопряженное расширение оператора L в $L_2(\mathbb{R}^N)$. Пусть

$$E_\lambda^s f = \int_\mu^\lambda \left(\frac{\lambda - t}{\lambda - \mu} \right)^s dE_t f \quad (3)$$

есть средние Рисса порядка $s \geq 0$ спектральных разложений $E_\lambda f$:

$$E_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \theta(x, y, \lambda) f(y) dy, \quad (4)$$

где $\theta(x, y, \lambda)$ – спектральная функция оператора H . Обозначим через $L_p^l(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$, $l \geq 0$, функциональное пространство Лиувилля (см. [2]).

В настоящей работе будут доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \geq 1$, $s \geq 0$, $l > 0$, $l + s \geq (N - 1)/2$, $pl > N$. Тогда для любой функции $f \in L_p^l(\mathbb{R}^N)$ равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x), \quad x \in K.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \geq 0$, $l \geq 0$, $l + s \geq (N - 1)/2$ и $f \in L_2^l(\mathbb{R}^N)$. Тогда равномерно по $x \in K \subset \mathbb{R}^N \setminus \text{supp } f$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = 0.$$

Доказательство теорем 1 и 2 существенно опирается на следующую теорему, где сравниваются отрицательные степени единственного самосопряженного расширения H_0 оператора $L_0(D) = I - \Delta$, $D(L_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, и оператора H .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s \geq 0$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ справедливо неравенство

$$\|H_0^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq \text{const} \|H^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в работе [3] была доказана справедливость утверждения теоремы 1 для случая общих эллиптических операторов второго порядка с гладкими коэффициентами. В случае оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим условию (2), теорему 1 удавалось доказать (см. [4]) только в случае $l = 0$, $s > (N - 1)/2$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

Отметим также, что для рассматриваемого оператора не было известно, сходятся ли равномерно спектральные разложения бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Что касается теоремы 2, то она была доказана в работе [5] при более ограничительных условиях на s : $s > (N - 1)/2 - \min\{l, (m + 2)/2\}$.

В частном случае потенциалов, допускающих разделение переменных, утверждение этой теоремы было доказано в работе [6] при условии $l + s > N/2$.

Прежде чем доказывать теоремы, установим справедливость нескольких лемм.

Рассмотрим функцию $\eta(t) \in C^\infty(0, +\infty)$ такую, что

$$\eta(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1/2, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Положим $m_0 = m - (1 - (-1)^{m-1})/2$ и

$$\rho_j = \left[\sum_{k=1}^m (u_k - \varphi_j^k(v))^2 \right]^{1/2}, \quad d_j = \left[\sum_{k=1}^{m_0} (u_k - \varphi_j^k(v))^2 \right]^{1/2},$$

где u_k и φ_j^k — координаты векторов $u \in \mathbb{R}^m$ и $\varphi_j(v) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, M$, соответственно. Очевидно, что m_0 — всегда нечетное число и $\rho_j^{-1} \leq d_j^{-1}$, $j = 1, \dots, M$.

Пусть T — оператор умножения на функцию $\eta(\prod_{j=1}^M d_j)$ с областью определения $L_2^s(\mathbb{R}^N)$. Положим $L_2^s(\eta^k, \mathbb{R}^N) = T^k L_2^s(\mathbb{R}^N)$. Очевидно, что $L_2^s(\eta^k, \mathbb{R}^N) \subset L_2^s(\mathbb{R}^N)$.

ЛЕММА 1. Пусть $k, s \in \mathbb{N}$ и $k \geq s$. Тогда для любой функции $f \in L_2^s(\eta^k, \mathbb{R}^N)$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^M \|d_j^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L_2^s(\mathbb{R}^N)}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_2^s(\eta^k, \mathbb{R}^N)$. Не ограничивая общности, можно считать, что f — действительная функция. Пусть $x = (u, v) \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^{m_0}$, $v \in \mathbb{R}^{N-m_0}$. Введем сферические координаты $u = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{m_0}$ и воспользуемся равенствами: при $2s > m_0$

$$f^2(x, y) = 2 \int_0^r f(t, \theta, y) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \theta, y) dt \quad (7)$$

и при $2s < m_0$

$$f^2(x, y) = 2 \int_r^\infty f(t, \theta, y) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \theta, y) dt. \quad (8)$$

Отметим, что случай $2s = m_0$ невозможен ввиду нечетности m_0 .

Докажем неравенство (6) при $2s > m_0$. Случай $2s < m_0$ рассматривается аналогично. Умножив обе части равенства (7) на $|u|^{-2s}$ и проинтегрировав, получим

$$\int_{\mathbb{R}^{m_0}} |u|^{-2s} f^2(u, v) du = 2 \int_\theta d\theta \int_0^\infty r^{m_0-2s-1} \int_0^r f \frac{\partial f}{\partial t} dt dr.$$

После изменения порядка интегрирования последнее равенство примет вид

$$\int_{\mathbb{R}^{m_0}} |u|^{-2s} f^2(u, v) du = \frac{2}{2s - m} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} |u|^{-2s+1} f\left(\frac{u}{|u|}, \nabla f\right) du.$$

Используя это равенство при $j = 1, \dots, M$, получим

$$\begin{aligned} \|d_j^{-s} f\|_{L_2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{N-m_0}} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} f^2(u, v) d_j^{-2s}(u, v) du dv \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{N-m_0}} \int_{\mathbb{R}^{m_0}} |z|^{-2s+1} |f(z + \varphi_j, v)| \cdot |\nabla_z f(z + \varphi_j, v)| ds dv. \end{aligned}$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера, получим

$$\|d_j^{-s} f\|_{L_2}^2 \leq C \|d_j^{-s} f\|_{L_2} \cdot \|d_j^{-s+1} |\nabla f|\|_{L_2}.$$

Таким образом,

$$\|d_j^{-s} f\|_{L_2} \leq C \|d_j^{-s+1} |\nabla f|\|_{L_2}. \quad (9)$$

Заметим, что при каждом $l = 1, \dots, s$ имеем $2(s-l) \neq m_0$ и $\partial f / \partial x_k \in L_2^{s-1}(\eta^{k-1}, \mathbb{R}^N)$ при $k = 1, \dots, N$.

Применяя теперь неравенство (9) еще $s-1$ раз и суммируя по j , получим (6).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для каждой функции $f \in L_2^{2s}(\eta^k, \mathbb{R}^N)$ при натуральных k и s , $k > 2s$, справедливо неравенство

$$\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L_2^{2s}(\mathbb{R}^N)}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что

$$H^s f = (-\Delta)^s f + \sum_{|\alpha| \leq 2s-2} C_{\alpha, s} D^\alpha f,$$

где $C_{\alpha, s} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S)$ и

$$|D^\beta C_{\alpha, s}| \leq C \sum_{j=1}^M \rho_j^{1-2s+|\alpha|-|\beta|}.$$

Следовательно,

$$\|H^s f\|_{L_2} \leq C \left(\|f\|_{L_2^{2s}} + \sum_{j=1}^M \sum_{|\alpha| \leq 2s-2} \|\rho_j^{1-2s+|\alpha|} D^\alpha f\|_{L_2} \right).$$

Очевидно, что $D^\alpha f \in L_2^{2s-|\alpha|}(\eta^{k-|\alpha|}, \mathbb{R}^N)$ и $k - |\alpha| > 2s - 1 - |\alpha|$. Поэтому неравенство (10) вытекает из леммы 1 и неравенства $\rho_j^{-1} \leq d_j^{-1}$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть k и s – натуральные числа и $k > 2s$. Тогда для любой функции $f \in L_2^{2s}(\eta^k, \mathbb{R}^N)$ справедливо неравенство

$$\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq \text{const} \|H_0^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 2 и из того, что при целых $s \geq 0$ пространство $L_2^{2s}(\mathbb{R}^N)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^{2s}(\mathbb{R}^N)$ и в этом пространстве норма эквивалентна норме $\|H_0^s f\|$.

ЛЕММА 4. Пусть k и s – натуральные числа и $k > 2s$. Тогда для каждой функции $f \in L_2^{2s}(\eta^k, \mathbb{R}^N)$ имеет место неравенство

$$\|H^s T^k f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|H_0^s T^k f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из леммы 3 и определения множества $L_2^{2s}(\eta^k, \mathbb{R}^N)$.

Положим $Af = C_0 H_0^s T^k f$, $D(A) = L_2^{2s}(\mathbb{R}^N)$ и $Bf = H^s T^k f$, $D(B) = \{f : T^k f \in D(H^s)\}$, где k и s – натуральные числа, $k > 2s$ и C_0 – положительная постоянная из неравенства (12).

Очевидно, что $D(A) \subset D(B)$ и $D(A), D(B)$ плотны в $L_2(\mathbb{R}^N)$, поскольку $L_2^{2s}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

Поэтому существует оператор $(B^*)^{-1}$ и

$$(B^*)^{-1} = [(H^s T^k)^*]^{-1} = [T^k H^s]^{-1} = H^{-s} T^{-k}. \quad (13)$$

ЛЕММА 5. Множество $D(A^{-1})$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $\ker A = \{0\}$. Действительно, из равенства

$$0 = \|Af\|_{L_2} = C_0 \|H^s T^k f\|_{L_2} = C_0 \|T^k f\|_{W_2^{2s}} \quad (14)$$

вытекает, что $T^k f = 0$. Так как η обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, то отсюда следует, что $f = 0$.

Таким образом, существует обратный оператор A^{-1} . В таком случае, для доказательства леммы достаточно показать плотность в $L_2(\mathbb{R}^N)$ множества

$$AD(A) = \{f : f = Ag, g \in L_2^{2s}(\mathbb{R}^N)\}.$$

Предположим обратное, т.е. пусть имеется функция $W \in L_2(\mathbb{R}^N)$, $\|W\| = 1$, ортогональная всем элементам множества $AD(A)$. В частности, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S)$ имеем

$$(A\varphi, W) = C_0 (H_0^s \eta^k \varphi, W) = 0. \quad (15)$$

Следовательно, в силу гиперэллиптичности оператора $H_0^s T^k$ в области $\mathbb{R}^N \setminus S$ получим, что $W \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S) \cap L_2(\mathbb{R}^N)$ и в каждой точке $x \in \mathbb{R}^N \setminus S$ выполняется равенство $H_0^s W = 0$. Отсюда вытекает, что $W = 0$ почти всюду и, следовательно, всюду в $\mathbb{R}^N \setminus S$. Так как мера S равна нулю, то $W = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N$.

Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 вытекает существование оператора $(A_\bullet^{-1})^*$. Кроме того,

$$(A_\bullet^{-1})^* = [(C_0 H_0^s T^k)^{-1}]^* = C_0^{-1} H_0^{-s} T^{-k}. \quad (16)$$

Из представлений (13) и (16) операторов $(B^*)^{-1}$ и $(A_\bullet^{-1})^*$ следует, что

$$L_2(\eta^k, \mathbb{R}^N) \subset D[(A_\bullet^{-1})^*], \quad L_2(\eta^k, \mathbb{R}^N) \subset D[(B^*)^{-1}]. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточно рассмотреть случай, когда s – целое, так как для всех меньших s утверждение теоремы можно доказать с помощью интерполяции. Фиксируем натуральные числа k и s так, чтобы $k > 2s$.

Отметим, что в силу (12) имеем

$$\|BW\| \leq \|AW\|, \quad W \in D(A). \quad (18)$$

Отсюда следует, что

$$\|(A_\bullet^{-1})^* f\|_{L_2} \leq \|(B^*)^{-1} f\|_{L_2}, \quad f \in D[(B^*)^{-1}]. \quad (19)$$

Поэтому в силу неравенств (13), (16) для любой функции $g \in D[(B^*)^{-1}]$ имеем

$$C_0^{-1} \|H_0^{-s} \eta^{-k} g\|_{L_2} \leq \|H^{-s} \eta^{-k} g\|_{L_2}.$$

С другой стороны, из вложений (17) вытекает, что функции вида $\eta^k f$, $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$, принадлежат множеству $D[(B^*)^{-1}]$.

Следовательно,

$$\|H_0^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|H^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^N)}.$$

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $l \geq 0$, $h > 0$, $\mu > 0$. Тогда для любой функции $f \in L_2^l(\mathbb{R}^N)$ равномерно по $x \in K \subset \mathbb{R}^N$ справедливо неравенство

$$|\varphi((\mu + h)^2) - \varphi(\mu^2)| \leq C \|f\|_{L_2^l} (1 + \sqrt{h}) \mu^{-l+\tau} (\mu + h)^{(N-1)/2-\tau}, \quad (20)$$

где $\varphi(\mu) = E_\mu f(x)$, $0 \leq \tau \leq \min\{l, N/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим неравенством (см. [7]):

$$|E_\lambda f(x) - E_\mu f(x)| \leq \|H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)f\|_{L_2} \cdot |H^{-\tau}[\theta(x, x, \lambda) - \theta(x, x, \mu)]|^{1/2}.$$

Положим $g = H_0^{l/2}f$. Тогда $\|g\|_{L_2} \leq C\|f\|_{L_2^l}$ и

$$\|H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)f\| = \|H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)H_0^{-l/2}g\|.$$

В силу теоремы 3 и неравенства Коши–Буняковского для любой функции $\psi \in L_2(\mathbb{R}^N)$, получим

$$\begin{aligned} |(\psi, H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)H_0^{-l/2}g)| &= |(H_0^{-l/2}H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)\psi, g)| \\ &\leq C\|f\|_{L_2^l} \cdot \|H^{-l/2+\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)\psi\| \\ &\leq C\mu^{(\tau-l)/2}\|f\|_{L_2^l}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|H^{\tau/2}(E_\lambda - E_\mu)H_0^{-l/2}g\| \leq C\mu^{(\tau-l)/2}\|f\|_{L_2^l}.$$

В таком случае неравенство (20) вытекает из оценки (см. [5])

$$|H^{-\tau}[\theta(x, x, (\mu + h)^2) - \theta(x, x, \mu^2)]|^{1/2} \leq C(1 + \sqrt{h})(\mu + h)^{(N-1)/2-\tau}. \quad (21)$$

Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ равномерно по $x \in K \subset \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda f(x) = f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $\varphi(\mu) = E_{\mu^2}f(x)$, $x \in K \subset \mathbb{R}^N$. В силу вложения $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L_2^l(\mathbb{R}^N)$ при каждом $l \geq 0$ имеем $f \in L_2^l(\mathbb{R}^N)$.

Поэтому для этой функции справедлива оценка

$$|\varphi(\mu + h) - \varphi(\mu)| \leq C\|f\|_{L_2^l}(1 + \sqrt{h})\mu^{-l+\tau}(\mu + h)^{(N-1)/2-\tau}$$

при всех $l \geq 0$ и $0 \leq \tau \leq \min\{l, N/2\}$.

В последнем неравенстве положим $l = N/2 + 1$ и $\tau = N/2$. Тогда

$$|\varphi(\mu + h) - \varphi(\mu)| \leq C\mu^{-1}.$$

Таким образом, в силу критерия Коши существует предел $g(x)$ функции $\varphi(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Но, с другой стороны, $\varphi(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ сходится к f по норме L_2 . Отсюда следует, что $g(x) \equiv f(x)$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda f(x) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} E_{\mu^2} f(x) = f(x).$$

Следствие 2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in L_2^l(\mathbb{R}^N)$, где $0 \leq l < N/2$, и $f(y) = 0$ при $|x - y| \leq r$, где $x \in \mathbb{R}^N$ – фиксированная точка. Тогда для любого $s \geq 0$ справедливо неравенство

$$|E_\lambda^s f(x)| \leq C \|f\|_{L_2^l} \sqrt{\lambda}^{N/2-l} (1 + r\sqrt{\lambda})^{-1/2-s}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены все условия следствия 3. Введем следующую функцию $\psi(\mu) = r^{N/2-l} \varphi(\mu/r^2)$, где $\varphi(\mu) = E_\mu f(x)$.

Из оценки (20), в которой $\tau = 0$, следует, что

$$|\psi((\mu + h)^2) - \psi(\mu^2)| \leq C \|f\|_{L_2^l} \mu^{(N-1)/2-l}.$$

Кроме того, из [7, гл. 3, лемма 1.6] следует, что преобразование Фурье–Лапласа $F(\xi)$ функции $\psi(\mu)$ продолжается аналитически в окрестность нуля $\{\xi, |\xi| < \delta\}$ так, что $F^{(2k)}(0) = 0$ при всех целых $k \geq 0$.

Таким образом, для функции $\psi(\mu)$ выполняются все условия теоремы Хермандера [8], из которой вытекает оценка (22).

Следствие 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $s \geq 0, l \geq 0, l + s \geq (N - 1)/2$ и $f \in L_2^l(\mathbb{R}^N)$. Фиксируем компакт $K \subset \mathbb{R}^N \setminus \text{supp } f$ и пусть сначала $l + s \geq (N - 1)/2$. В таком случае утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из оценки (22).

В случае же $l + s = (N - 1)/2$ достаточно заметить, что в силу следствия 2 утверждение теоремы 2 верно для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, а также это множество плотно в $L_2^l(\mathbb{R}^N)$, и воспользоваться оценкой (22). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $p \geq 1, s \geq 0, l > 0, l + s \geq (N - 1)/2, pl > N$ и $K \subset \mathbb{R}^N$ – произвольный компакт. Применяя оценку (22) и методику работы [9], равномерно по $x \in K$, получим

$$|E_\lambda^s f(x)| \leq C \|f\|_{L_p^l(\mathbb{R}^N)}. \quad (23)$$

Так как $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ плотно в $L^l(\mathbb{R}^N)$, то найдется последовательность $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p^l} = 0$. Кроме того, в силу следствия 2 при каждом n спектральные разложения $E_\lambda f_n(x)$ сходятся к $f_n(x)$ равномерно на компакте K . В таком случае, применяя неравенство (23) для разности $f_n - f$, получим утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Автор приносит глубокую благодарность проф. Ш. А. Алимову за внимание, проявленное им к данной работе.

Ташкентский государственный университет

Поступило

23.08.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [2] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [3] Ильин В. А., Моисеев Е. И. О спектральных разложениях, отвечающих произвольному неотрицательному расширению общего самосопряженного эллиптического оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 191. № 4. С. 770–772.
- [4] Алимов Ш. А., Халмухамедов А. Р. Равномерная суммируемость спектральных разложений непрерывных функций из L_2 . Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент: Фан, 1989.
- [5] Халмухамедов А. Р. О спектральных разложениях оператора Шрёдингера с потенциалом, сингулярным на многообразиях // Математическое моделирование. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1989. С. 294–300.
- [6] Метвалли А. А. Условия сходимости и суммируемости спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам. Дисс. ... к.ф.-м.н. Ташкент, 1991.
- [7] Халмухамедов А. Р. Условия сходимости и локализации спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам. Дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1984.
- [8] Хермандер Л. О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разложениях // Математика. 1968. Т. 12. № 5. С. 91–130.
- [9] Алимов Ш. А. Равномерная сходимость и суммируемость спектральных разложений функций из L_2^α // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 4. С. 669–681.