Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Яковлев, Двухточечные краевые задачи
в релятивистской динамике, *Матем. заметки*,
1996, том 59, выпуск 3, 437–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:07:02

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ

Е. И. Яковлев

Для релятивистских аналогов натуральных механических систем с гироскопическими силами выводятся условия существования решений двухточечной краевой задачи. Используется метод геодезического моделирования: на пространстве главного расслоения над конфигурационным многообразием системы задается лоренцева метрика типа Калуца–О. Клейна; исходная задача сводится к вопросу о существовании изотропных геодезических, соединяющих два слоя расслоения; исследуется причинная структура моделирующего лоренцева многообразия. Полученные результаты применяются для изучения движений частиц в различных гравитационных и электромагнитных полях.

1. Пусть (M, g) – лоренцево многообразие, F и u – соответственно замкнутая 2-форма и гладкая функция на M . Будем предполагать, что $u(p) > 0$ для всех $p \in M$ и интегралы от F по двумерным сфероидам многообразиям M образуют $\mathbb{Z}$ -модуль P размерности $k \in \{0, 1\}$. Последнее означает, что $P = \theta\mathbb{Z}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. При этом число θ можно считать неотрицательным, $k = 0$ при $\theta = 0$ и $k = 1$ при $\theta > 0$.

Рассмотрим точки $p, q \in M$, отрезок $I = [0, 1]$ и пространство Ω_{pq} кусочно-гладких путей $x: I \rightarrow M$ с началом $x(0) = p$ и концом $x(1) = q$. В каждом гомотопическом классе $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$ зафиксируем опорный путь x_Δ . Для пути $x \in \Omega + pq$, содержащего его класса $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$, числа $\delta \in \mathbb{R}$ и связывающей пути x_Δ и x кусочно-гладкой гомотопии $c: I^2 \rightarrow M$ положим $\dot{x} = dx/d\tau$ и

$$S_\delta(x, c) = \int_0^1 \left[\frac{g(\dot{x}, \dot{x})}{2} - \delta^2 u(x) \right] d\tau + \delta \int_c F.$$

Для связывающей те же пути другой гомотопии $c': I^2 \rightarrow M$ верно включение $S_\delta(x, c') - S_\delta(x, c) \in \delta P$. Поэтому формула $S_\delta(x) = S_\delta(x, c) + \delta P$ корректно определяет функционал $S_\delta: \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}/\delta P$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00492а, и Международного научного фонда, грант NР4000.

Пусть $G = \mathbb{R}$ и $\alpha(r) = r$ при $\theta = 0$ и $r \in \mathbb{R}$, $G = U(1)$ и $\alpha(r) = \exp(2\pi i r)$ при $\theta \neq 0$ и $r \in \mathbb{R}$. Положим $\langle t \rangle = 1$ для $t = 0$ и $\langle t \rangle = t$ для $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Формулой $S(\delta, x) = \alpha(S_\delta(x)/\langle \delta \theta \rangle)$ определен функционал $S: \mathbb{R} \times \Omega_{pq} \rightarrow G$. Его экстремальными называются пары $(\delta, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_{pq}$, в которых путь x является экстремалью функционала S_δ .

Аналогичный (многозначный) функционал с собственнo римановой метрикой g построен в [1]. Вопрос о существовании его экстремалей исследован в [2]. Замена в S собственнo римановой метрики на лоренцеву приводит к изменению постановки задачи, не говоря уже о значительном ее усложнении. Это связано с тем, что в лоренцевом случае в приложениях физический смысл имеет лишь часть экстремалей функционала S . Например, движениям заряженной пробной частицы в гравитационном и электромагнитном полях соответствуют экстремали (δ, x) , для которых $\delta \neq 0$ и $g(\dot{x}, \dot{x})/\delta^2 = -1$. Тем не менее, методы и результаты работы [2] далее существенно используются.

Если (δ, x) – экстремаль функционала S и $\delta > 0$, то определенная формулой $y(s) = x(s/\delta)$ кривая $y: [0, \delta] \rightarrow M$ представляет собой решение уравнения

$$\left(\frac{\nabla}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) = F^\# \left(\frac{dy}{ds}\right) - \text{grad } u(y), \quad (1)$$

где ∇ – связность лоренцевой метрики g , а $F^\#$ – тензорное поле типа $(1, 1)$, определенное формулой $F(X, Y) = g(F^\#(X), Y)$. При этом

$$y(0) = p, \quad y(\delta) = q. \quad (2)$$

Основной целью настоящей работы является вывод ограничений на систему $\Gamma(M, g, F, u)$ и точки $p, q \in M$, при которых существует решение $y: [0, \delta] \rightarrow M$ уравнения (1), удовлетворяющего равенствам (2) и

$$\frac{g(dy/ds, dy/ds)}{2} + u(y) = 0. \quad (3)$$

Мы называем Γ гироскопической системой релятивистского типа, а решения пары уравнений (1) и (3) – ее движениями. Если $\dim M = 4$, форма F удовлетворяет уравнениям Максвелла и $u \equiv 1/2$, то (1) и (3) можно трактовать как релятивистские уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях. Отметим, что (3) эквивалентно равенству $D(\delta, x) = u(x)\delta^2 + g(\dot{x}, \dot{x})/2 = 0$. Таким образом, кривая $y: [0, \delta] \rightarrow M$ является решением задачи (1)–(3) в том и только в том случае, если (δ, x) – экстремаль функционала S и $D(\delta, x) = 0$.

Пусть, далее, $\nu: M^* \rightarrow M$ – гладкое универсальное накрытие и $\Phi = F/\langle \theta \rangle$. Поскольку периоды формы $\nu^*\Phi$ по 2-циклам многообразия M^* тривиальны при $k = 0$ и образуют группу $\mathbb{Z}$ при $k = 1$, то существует главное расслоение $\eta = (\Xi, \xi, M^*, G)$ с базой M^* , пространством Ξ , проекцией $\xi: \Xi \rightarrow M^*$, структурной группой G и характеристическим

классом $[\nu^*\Phi] \in H^2(M^*, \mathbb{R})$. Положим $\mu = \nu \circ \xi$ и $\Phi^* = \mu^*\Phi$. На Ξ найдется 1-форма ω , для которой $d\omega = \Phi^*$, и G -связность H с формой связности ω и формой кривизны Φ^* . При этом равенства $u^* = u \circ \mu$, $\omega^* = (\langle \theta \rangle / (2u^*))\omega$ и $b = 2u^*\omega^* \otimes \omega^* + \mu^*g$ определяют лоренцеву метрику b на Ξ . Предположим, что O – непрерывное времениподобное векторное поле на M и O^* – его горизонтальный лифт относительно связности H . Тогда поле O^* также непрерывно и $b(O^*, O^*) = g(O, O) < 0$. Будем считать, что лоренцевы многообразия (M, g) и (Ξ, b) ориентированы во времени векторными полями O и O^* соответственно. Для $\delta \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega_{pq}$ и $v \in \mu^{-1}(p)$ существует единственный кусочно-гладкий путь $\bar{x}: I \rightarrow \Xi$, удовлетворяющий условиям: $\mu \circ \bar{x} = x$, $\omega^*(d\bar{x}/d\tau) \equiv \delta$ и $\bar{x}(0) = v$. При этом мы полагаем $\bar{x} = \lambda^v(\delta, x)$ и называем $\bar{x}$ δ -лифтом пути x [2].

Символами Λ_{pq} , Λ_{pq}^- и Λ_{pq}^0 обозначим подпространства Ω_{pq} , состоящие из гладких направленных в будущее непространственноподобных, времениподобных и изотропных путей многообразия (M, g) соответственно. Если $v, w \in \Xi$, то Λ_{vw} , Λ_{vw}^- и Λ_{vw}^0 – аналогичные пространства путей многообразия (Ξ, b) .

ЛЕММА 1. Пусть J – интервал или отрезок прямой $\mathbb{R}$ и $\bar{x}: J \rightarrow \Xi$ – непространственноподобная кривая. Тогда кривая $x = \mu \circ \bar{x}$ также непространственноподобна и направлена в будущее или прошлое одновременно с $\bar{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\bar{x}$ – гладкая кривая и положим $\dot{x} = dx/d\tau$, $\dot{\bar{x}} = d\bar{x}/d\tau$. По условию

$$2u(x)\omega^*(\dot{\bar{x}})^2 + g(\dot{x}, \dot{x}) = b(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{x}}) \leq 0.$$

Следовательно, $g(\dot{x}, \dot{x}) \leq -2u(x)\omega^*(\dot{\bar{x}})^2 \leq 0$ и кривая x непространственноподобна. Второе утверждение леммы следует из равенства $b(O^*, \dot{\bar{x}}) = g(O, \dot{x})$.

В общем случае рассмотрим произвольное $\tau \in J$ и нормальную выпуклую окрестность U точки $x(\tau)$. Тогда найдется такая нормальная выпуклая окрестность $\bar{U}$ точки $\bar{x}(\tau)$, что $\mu(\bar{U}) \subset U$. По определению непространственноподобной кривой [3] существует число $\varepsilon > 0$, обладающее свойствами: $\bar{x}(J_{\tau, \varepsilon}) \subset \bar{U}$, где $J_{\tau, \varepsilon} = J \cap (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, для любых $t, s \in J_{\tau, \varepsilon}$ и точек $v = \bar{x}(t)$, $w = \bar{x}(s)$ найдется гладкий непространственноподобный путь $\bar{y} \in \Omega_{vw}$ с носителем $\bar{y}(I) \subset \bar{U}$. Но тогда $x(J_{\tau, \varepsilon}) \subset U$ и по доказанному выше гладкий путь $y = \mu \circ \bar{y}$ непространственноподобен и направлен в будущее или прошлое одновременно с $\bar{y}$. По построению $y(0) = x(t)$, $y(1) = x(s)$ и $y(I) \subset U$. Следовательно, кривая x непространственноподобна. Осталось заметить, что ориентация во времени кривых $\bar{x}$ и x определяется ориентацией путей $\bar{y}$ и y соответственно.

Положим $g_1 = (2u/\langle \theta \rangle^2)g$. Если $x: I \rightarrow M$ – гладкий непространственноподобный путь, то всюду далее $|\dot{x}|$ и $|\dot{x}|_1$ – длины вектора

$\dot{x} = dx/d\tau$, а $L(x)$ и $L_1(x)$ – длины пути x в лоренцевых многообразиях (M, g) и (M, g_1) соответственно. Аналогично, $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ и $d_1: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ – соответствующие метрикам g и g_1 лоренцевы функции расстояния. Для $p \in M$ символы $I^+(p)$ и $I^-(p)$ обозначают хронологические будущее и прошлое, символы $J^+(p)$ и $J^-(p)$ – причинные будущее и прошлое и, наконец, $E^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$ – контур будущего точки p . Заметим, что в лоренцевых многообразиях (M, g) и (M, g_1) указанные множества совпадают. Включения $q \in I^+(p)$ и $q \in J^+(p)$ эквивалентны отношениям $p \ll q$ и $p \leq q$. Последовательность $\{q_n\}_{n=0}^\infty \subset M$ будем называть направленной в будущее, если $q_{n-1} \leq q_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{x}: I \rightarrow \Xi$ – кусочно-гладкий путь, G_0 – содержащий его начало $\bar{x}(0)$ слой расслоения η , $v \in G_0$, $r \in \mathbb{R}$ и $\bar{x}(0) = v \cdot \alpha(r)$. Положим $x = \mu \circ \bar{x}$ и $x^* = \lambda^v(0, x)$. Поскольку $\xi(\bar{x}(\tau)) = \xi(x^*(\tau))$ для $\tau \in I$, то существует, причем единственный, кусочно-гладкий путь $z: I \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий равенствам $z(0) = r$ и

$$\bar{x}(\tau) = x^*(\tau) \cdot \alpha(z(\tau)). \quad (4)$$

Договоримся в такой ситуации полагать $\bar{x} = x^* \oplus z$ и называть это равенство горизонтально-вертикальным разложением пути $\bar{x}$ с началом (v, r) .

ЛЕММА 2. Пусть $\bar{x}: I \rightarrow \Xi$ – гладкий путь, $\bar{x} = x^* \oplus z$ и $x = \mu \circ \bar{x}$. Тогда путь $\bar{x}$ непространственноподобен (времениподобен) в том и только в том случае, если непространственноподобен (времениподобен) путь x и $|\dot{z}| \leq |\dot{x}|_1$ ($|\dot{z}| < |\dot{x}|_1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $v \in \Xi$ и $r \in \mathbb{R}$ положим $R_{\alpha(r)}(v) = \alpha^v(r) = v \cdot \alpha(r)$. Этим определены отображения $R_{\alpha(r)}: \Xi \rightarrow \Xi$ и $\alpha^v: \mathbb{R} \rightarrow \Xi$. Дифференцируя (4), получим:

$$\dot{\bar{x}} = dR_{\alpha(z(\tau))}(\dot{x}^*) + d\alpha^{x^*(\tau)}(\dot{z}).$$

Поэтому $\omega(\dot{\bar{x}}) = \dot{z}$, $b(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{x}}) = \langle \theta \rangle^2 \dot{z}^2 / 2u(x) + g(\dot{x}, \dot{x})$ и, наконец, $2u(x)b(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{x}}) / \langle \theta \rangle^2 = \dot{z}^2 + g_1(\dot{x}, \dot{x})$. Из последнего равенства вытекают все утверждения леммы.

2. Далее вплоть до п. 4 предполагается, что лоренцево многообразие (M, g) глобально гиперболично.

ЛЕММА 3. Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ – глобальная функция времени, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, последовательность $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ точек из M направлена в будущее и сходится к точке $q \in M$, $\{r_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из двух неравенств:

$$|r_n - r_{n-1}| \leq ad_1(q_{n-1}, q_n), \quad (5)$$

$$|r_n - r_{n-1}| \leq a(f(q_n) - f(q_{n-1})). \quad (6)$$

Тогда $\{q_n\} \subset J^-(q)$ и последовательность $\{r_n\}$ сходится в $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы следует из свойств нормальных выпуклых окрестностей [3, с. 28]. Члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} d_1(q_{n-1}, q_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (f(q_n) - f(q_{n-1}))$ нетривиальны, а частичные суммы ограничены сверху числами $d_1(q_0, q)$ и $f(q) - f(q_0)$ соответственно. Поэтому эти ряды сходятся. Отсюда в силу (5) или (6) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (r_n - r_{n-1})$, эквивалентная второму утверждению леммы.

ЛЕММА 4. *Предположим, что последовательность $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ направлена в будущее и сходится к точке $q \in M$, $w_0 \in \mu^{-1}(q_0)$, $x_n \in \Lambda_{q_{n-1}q_n}$, $x_n^* = \lambda^{w_{n-1}}(0, x_n)$ и $w_n = x_n^*(1)$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда в Ξ найдется точка $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим глобальную функцию времени $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, окрестность V точки q , над которой расслоение η тривиально, гладкое сечение $\sigma: V \rightarrow \Xi$ и 1-форму $A = \sigma^*\omega$. Существуют причинно выпуклая окрестность U точки q с компактным замыканием $\bar{U} \subset V$, собственно риманова метрика g_0 на M с функционалом длины L_0 и число $h > 0$ такие, что $L_0(x) \leq h|f(x(1)) - f(x(0))|$ для любого непространственноподобного пути $x: I \rightarrow U$ [3, с. 40, 41]. Пусть $\pi: TM \rightarrow M$ — касательное расслоение многообразия M и $W = \{X \in TM \mid \pi(X) \in \bar{U}, g_0(X, X) = 1\}$. Так как множество W компактно, то существует положительное число $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенствам

$$a = \sup_{X \in W} A(X), \quad -a = \inf_{X \in W} A(X). \quad (7)$$

По условию найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $q_n \in U$ при $n \geq n_0$. Далее будем считать, что $n > n_0$. Положим $y_n = \sigma \circ x_n$. Тогда $y_n(0) = \sigma(q_{n-1}) = y_{n-1}(1)$ и существуют гладкие пути $z_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $z_n(0) = z_{n-1}(1)$ и $x_n^*(\tau) = y_n(\tau) \cdot \alpha(z_n(\tau))$ при всех $\tau \in I$. Дифференцируя последнее равенство и пользуясь равенством $\omega(\dot{y}_n) = A(\dot{x}_n)$, получим: $\omega(\dot{x}_n^*) = \dot{z}_n + A(\dot{x}_n)$. Так как x_n^* — горизонтальный путь, то $z_n(0) - z_n(1) = \int_{x_n} A$. В силу (7) $|A(\dot{x}_n)| \leq a|\dot{x}_n|_0$. Следовательно,

$$|z_n(0) - z_n(1)| \leq aL_0(x_n) \leq ah(f(q_n) - f(q_{n-1})).$$

А это по лемме 3 означает, что последовательность $\{r_n\} = \{z_n(1)\}$ сходится к некоторому числу $r \in \mathbb{R}$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(q_n) \cdot \alpha(r_n) = \sigma(q) \cdot \alpha(r) = w.$$

ЛЕММА 5. *Пусть $\bar{x}: (s^-, s^+) \rightarrow \Xi$ — направленная в будущее непространственноподобная кривая, $x = \mu \circ \bar{x}$ и $q = \lim_{s \rightarrow s^+} x(s)$. Тогда в Ξ найдется точка $v = \lim_{s \rightarrow s^+} x(s)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную сходящуюся к s^+ последовательность $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset (s^-, s^+)$ и положим $v_n = \bar{x}(s_n)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует путь $\bar{x}_n \in \Lambda_{v_{n-1}v_n}$. Положим $x_n = \mu \circ \bar{x}_n$ и $q_n = x(s_n) = \mu(v_n)$. По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, а по лемме 1 $x_n \in \Lambda_{q_{n-1}q_n}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ также определено горизонтально-вертикальное разложение $\bar{x}_n = x_n^* \oplus z_n$ с началом (w_{n-1}, r_{n-1}) , где $w_0 = v_0$, $r_0 = 0$ и $w_n = x_n^*(1)$, $r_n = z_n(1)$ при $n \in \mathbb{N}$. По лемме 4 существует $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \in \Xi$, а по лемме 2

$$|r_n - r_{n-1}| \leq L_1(x_n) \leq d_1(q_{n-1}, q_n).$$

В этой ситуации в силу леммы 3 существует $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \in \mathbb{R}$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n \cdot \alpha(r_n)) = w \cdot \alpha(r) = v.$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что (M, g) – глобально гиперболическое лоренцево многообразие и K – его поверхность Коши. Тогда подмногообразие $K^* = \mu^{-1}(K)$ является поверхностью Коши лоренцева многообразия (Ξ, b) и, следовательно, многообразие (Ξ, b) также глобально гиперболично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}: (s^-, s^+) \rightarrow \Xi$ – направленная в будущее непространственноподобная кривая и $\text{Im } \bar{x} \cap K^* = \emptyset$. Тогда $\text{Im } x \cap K = \emptyset$ для кривой $x = \mu \circ \bar{x}$. Так как K – поверхность Коши, то многообразие M представляет собой объединение ее причинного прошлого $J^-(K)$ и причинного будущего $J^+(K)$. При этом $J^-(K) \cap J^+(K) = K$. Следовательно, либо $\text{Im } x \subset J^-(K) \setminus K$, либо $\text{Im } x \subset J^+(K) \setminus K$.

Допустим, что имеет место первое включение. По лемме 1 кривая x непространственноподобна и направлена в будущее. Если $s_0 \in (s^-, s^+)$ и $p = x(s_0)$, то $x(s) \in J^+(p) \cap J^-(K)$ для всех $s \in [s_0, s^+)$. Таким образом, кривая x захвачена в будущем компактным множеством $J^+(p) \cap J^-(K)$ [3, с. 70] и, следовательно, существует $\lim_{s \rightarrow s^+} x(s) = q \in M$. Отсюда в силу леммы 5 вытекает, что кривая $\bar{x}$ продолжаема в будущее. Аналогично проверяется, что если $\text{Im } x \subset J^+(K) \setminus K$, то кривая $\bar{x}$ продолжаема в прошлое.

Этим доказано, что произвольная непродолжаемая непространственноподобная кривая $\bar{x}$ многообразия (Ξ, b) пересекает подмногообразие K^* . Если она пересекает K^* более одного раза, то кривая $x = \mu \circ \bar{x}$ более одного раза пересекает поверхность Коши K многообразия (M, g) . В силу леммы 1 последнее невозможно.

3. Зафиксируем точки $p \in M$ и $q \in I^+(p)$ и гомотопический класс $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$, для которого $\Delta^- = \Delta \cap \Lambda_{pq}^- \neq \emptyset$. Предположим, что на некоторой окрестности U множества $J(\Delta) = \{x(\tau) \mid x \in \Delta \cap \Lambda_{pq}, \tau \in I\}$ существует 1-форма A , удовлетворяющая равенству $dA = \Phi|_U$. Определим функционалы Π , Ψ^+ , Ψ^- : $\Delta^- \rightarrow \mathbb{R}$ формулами $\Pi(x) = \int_{x_\Delta - x} A$,

$\Psi^+(x) = \Pi(x) + L_1(x)$ и $\Psi^-(x) = \Pi(x) - L_1(x)$. Отметим, что они не зависят от произвола в выборе формы A .

На M существует собственно риманова метрика g_0 , относительно которой длины путей из Λ_{pq} не превышают некоторого фиксированного числа $l \in \mathbb{R}$ [3, с. 40–44]. Из глобальной гиперболичности лоренцевых многообразий (M, g) и (M, g_1) следуют конечность лоренцева расстояния $d_1(p, q)$ и компактность множества $W = \{X \in TM \mid \pi(X) \in J(\Delta), g_0(X, X) = 1\}$. Последнее означает, что найдется число $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенствам (7). При этом для любого пути $x \in \Delta^-$ справедливо неравенство $|A(\dot{x})| \leq a|\dot{x}|_0$ и, следовательно, $|\Pi(x)| \leq 2al$ и $|\Psi^\pm(x)| \leq 2al + d_1(p, q)$. Таким образом, множества значений $\text{Im } \Pi$, $\text{Im } \Psi^+$ и $\text{Im } \Psi^-$ ограничены, а потому точные верхние грани π_Δ^+ и ψ_Δ^+ функционалов Π и Ψ^+ и точные нижние грани π_Δ^- и ψ_Δ^- функционалов Π и Ψ^- конечны.

До конца п. 3 зафиксируем произвольную точку $v \in \mu^{-1}(p)$ и положим $x_\Delta^* = \lambda^v(0, x_\Delta)$ и $w_\Delta = x_\Delta^*(1)$.

ЛЕММА 6. *Если $r \in \mathbb{R}$ и $w = w_\Delta \cdot \alpha(r) \in I^+(v)$, то найдется такое $m \in k\mathbb{Z}$, что $\psi_\Delta^- + m < r < \psi_\Delta^+ + m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $w \in I^+(v)$ следует существование пути $\bar{x} \in \Lambda_{vw}^-$. Рассмотрим его горизонтально-вертикальное разложение $\bar{x} = x^* \oplus z$ с началом $(v, 0)$ и положим $w^* = x^*(1)$ и $x = \mu \circ \bar{x}$. По лемме 3 статьи [2] $w^* = w_\Delta \cdot \alpha(\Pi(x))$, а в силу (4) $w = w^* \cdot \alpha(z(1))$. Следовательно, $w = w_\Delta \cdot \alpha(\Pi(x) + z(1))$, и потому найдется такое $m \in k\mathbb{Z}$, что $r = \Pi(x) + z(1) + m$. Наконец, по лемме 2 $|\dot{z}| < |\dot{x}|_1$, откуда следуют неравенства $-L_1(x) < z(1) < L_1(x)$. Объединив их с последним равенством, получим:

$$\psi_\Delta^- + m \leq \Psi^-(x) + m < r < \Psi^+(x) + m \leq \psi_\Delta^+ + m.$$

ЛЕММА 7. *Для любого числа $r \in [\pi_\Delta^+, \psi_\Delta^+]$ имеет место включение $w_\Delta \cdot \alpha(r) \in J^+(v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = \pi_\Delta^+ - \pi_\Delta^-$. По определению числа π_Δ^+ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой путь $x_n \in \Delta^-$, что $\Pi(x_n) \in (\pi_\Delta^+ - \varepsilon/(2n), \pi_\Delta^+]$. Положим $x_n^* = \lambda^v(0, x_n)$ и $w_n = x_n^*(1)$. По лемме 3 из [2] $w_n = w_\Delta \cdot \alpha(\Pi(x_n))$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_\Delta \cdot \alpha(\pi_\Delta^+)$. С другой стороны, путь x_n^* времениподобен, и потому $w_n \in I^+(v)$. В силу теоремы 1 замыкание множества $I^+(v)$ совпадает с $J^+(v)$. Таким образом, $w_\Delta \cdot \alpha(\pi_\Delta^+) \in J^+(v)$.

Этим при $\pi_\Delta^+ = \psi_\Delta^+$ лемма доказана. Допустим далее, что $\pi_\Delta^+ < \psi_\Delta^+$ и рассмотрим число $r \in (\pi_\Delta^+, \psi_\Delta^+)$. По определению точной верхней грани ψ_Δ^+ найдется такой путь $x \in \Delta^-$, что $\Psi^+(x) \in (r, \psi_\Delta^+]$. При этом можно считать, что $|\dot{x}|_1 \equiv L_1(x)$ [3, с. 136]. Положим $x^* = \lambda^v(0, x)$, $w^* = x^*(1)$, $r_1 = \Pi(x)$ и $r_2 = r - r_1$. Тогда из неравенств $r_1 \leq \pi_\Delta^+ < r < \Psi^+(x)$

следует, что $0 < r_2 < L_1(x)$. Формулы $z(\tau) = r_2\tau$ и (4) определяют пути $z: I \rightarrow \mathbb{R}$ и $\bar{x}: I \rightarrow \Xi$. Поскольку $w^* = w_\Delta \cdot \alpha(r_1)$, $z(1) - z(0) = r_2$, то путь $\bar{x}$ соединяет точки v и $w = w_\Delta \cdot \alpha(r)$. Кроме того, $|\dot{z}| = r_2 < L_1(x) \equiv |\dot{x}|_1$. По лемме 2 последнее означает, что путь $\bar{x}$ времениподобен. В силу леммы 1 он направлен в будущее. Следовательно, $w \in I^+(v) \subset J^+(v)$. Итак, включение $w_\Delta \cdot \alpha(r) \in J^+(v)$ доказано для всех $r \in [\pi_\Delta^+, \psi_\Delta^+]$. Но тогда в силу замкнутости множества $J^+(v)$ оно верно и для $r = \psi_\Delta^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично доказывается, что включение $w_\Delta \cdot \alpha(r) \in J^+(v)$ имеет место при $r \in [\psi_\Delta^-, \pi_\Delta^-]$. В случае линейной связности подпространства $\Delta^- \subset \Omega_{pq}$ оно справедливо для всех $r \in [\psi_\Delta^-, \psi_\Delta^+]$.

ЛЕММА 8. *Предположим, что $k(\psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^-) < 1$, $w = w_\Delta \cdot \alpha(\psi_\Delta^+)$, $\bar{x} \in \Lambda_{vw}^0$, $\omega^*(\bar{x}) \equiv \delta \in \mathbb{R}$ и путь $x = \mu \circ \bar{x}$ не изотропен. Тогда $\delta > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию и по лемме 1 $x \in \Lambda_{pq}^-$. При этом $r_1 = \Pi(x) \leq \psi_\Delta^+$ и $r_2 = \psi_\Delta^+ - r_1 \geq 0$. Рассмотрим горизонтально-вертикальное разложение $\bar{x} = x^* \oplus z$ с началом $(v, 0)$ и точку $w^* = x^*(1)$. По лемме 3 из [2] $w = w_\Delta \cdot \alpha(r_1 + r_2) = w^* \cdot \alpha(r_2)$. С другой стороны, в силу (4) $w = w^* \cdot \alpha(z(1))$. Таким образом, $\alpha(r_2) = \alpha(z(1))$ и, следовательно, найдется $m \in k\mathbb{Z}$, для которого $z(1) = r_2 + m$.

Если $k = 0$, то $m = 0$ и $z(1) = r_2 \geq 0$. Допустим, что $k = 1$ и $z(1) < 0$. Тогда $m \leq -1$. Отсюда и из изотропности пути $\bar{x}$ следует равенство $z(1) = -L_1(x)$. Но при этом $\psi_\Delta^+ + m = \Psi^-(x) \geq \psi_\Delta^-$, и потому $\psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^- \geq -m \geq 1$. Последнее противоречит условию леммы. Следовательно, допущение неверно и, на самом деле, $z(1) \geq 0$ и при $k = 1$.

Формула $\beta(\tau) = w^* \cdot \alpha(z(\tau))$ определяет путь $\beta: I \rightarrow \Xi$, лежащий в слое расслоения η и соединяющий точки w^* и w . Так как $\omega(\dot{x}^*) \equiv 0$, $\omega(\bar{x}) = 2\delta u(x)/\langle \theta \rangle$ и $\omega(\beta) = \dot{z}$, то

$$J = \int_{x^* + \beta - \bar{x}} \omega = z(1) - \frac{2\delta}{\langle \theta \rangle} \int_0^1 u(x) d\tau. \quad (8)$$

Положим $\bar{c}(\tau, s) = x^*(\tau) \cdot \alpha(sz(\tau))$ для $\tau, s \in I$. Этим определен гладкий сингулярный квадрат $\bar{c}: I^2 \rightarrow \Xi$ с границей $\partial\bar{c} = x^* + \beta - \bar{x}$. Поскольку квадрат $c = \mu \circ \bar{c}$ вырожден, то $J = \int_{\bar{c}} \Phi^* = \int_c \Phi = 0$. Отсюда и из (8) вытекает, что $\delta = \frac{1}{2}z(1)\langle \theta \rangle \int_0^1 u(x) d\tau \geq 0$. По условию $2u(x)\delta^2 + g(\dot{x}, \dot{x}) \equiv 0$ и $g(\dot{x}, \dot{x}) < 0$. Следовательно, $\delta \neq 0$ и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть система $\Gamma = (M, g, F, u)$, точки $p \in M$, $q \in I^+(p)$ и гомотопический класс $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$ удовлетворяют условиям:*

- 1) лоренцево многообразие (M, g) глобально гиперболично;
- 2) $\Delta^- \neq \emptyset$ и Δ не содержит изотропных геодезических многообразия (M, g) ;
- 3) форма F точна на некоторой окрестности множества $J(\Delta)$;
- 4) $k(\psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^-) < 1$.

Тогда существует экстремаль (δ, x) функционала S , для которой $\delta > 0$, $x \in \Delta^-$ и $D(\delta, x) = u(x)\delta^2 + g(\dot{x}, \dot{x})/2 \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 $w = w_\Delta \cdot \alpha(\psi_\Delta^+) \in J^+(v)$. Допустим, что $w \in I^+(v)$. Тогда в силу леммы 6 найдется такое $m \in k\mathbb{Z}$, что $\psi_\Delta^- + m < \psi_\Delta^+ < \psi_\Delta^+ + m$. Но в этой ситуации $\psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^- > m \geq 1$, что противоречит выбору числа m при $k = 0$ и условию 4) при $k = 1$. Следовательно, допущение неверно и, на самом деле, точка w лежит в контуре будущего $E^+(v) = J^+(v) \setminus I^+(v)$ точки v .

В такой ситуации существует геодезическая $\bar{x} \in \Lambda_{vw}^0$ многообразия (Ξ, b) [3, с. 90]. При этом $\omega^*(\bar{x}) \equiv \delta \in \mathbb{R}$ [2] и $D(\delta, \mu \circ \bar{x}) \equiv 0$. В силу теоремы 1 статьи [2] $x = \mu \circ \bar{x} \in \Delta$ и (δ, x) – экстремаль функционала S . По лемме 1 $x \in \Lambda_{pq}$. Предположим, что путь x изотропен. Тогда $\delta = 0$ и x – геодезическая многообразия (M, g) [2], что противоречит условию 2). Таким образом, допущение неверно, и, на самом деле, $x \in \Delta^-$. Наконец, по лемме 8 $\delta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с условием 4) теоремы 2 при $k = 1$ полезно иметь верхние оценки разности $\psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^-$. Положим $d_1(\Delta) = \sup_{x \in \Delta^-} L_1(x)$ и $\pi_\Delta = \sup_{x, y \in \Delta^-} \int_{x-y} A$. Тогда

$$\pi_\Delta = \pi_\Delta^+ - \pi_\Delta^-, \quad \psi_\Delta^+ - \psi_\Delta^- \leq \pi_\Delta + 2d_1(\Delta).$$

При этом в случае односвязности окрестности U число π_Δ не превышает точной верхней грани множества интегралов от формы $\Phi = F/\langle \theta \rangle$ по всем гладким сингулярным квадратам $c: I^2 \rightarrow U$. Если односвязно многообразие M , то $\Delta = \Omega_{pq}$, $d_1(\Delta) = d_1(p, q)$ и $J(\Delta) = J^+(p) \cap J^-(q)$.

4. ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что (M, g) – пространство-время Минковского и F – произвольная замкнутая 2-форма на M . Тогда для любых точек $p \in M$, $q \in I^+(p)$ и системы $\Gamma = (M, g, F, 1/2)$ существует решение задачи (1)–(3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство-время Минковского глобально гиперболично. Для произвольных $p \in M$ и $q \in I^+(p)$ пространство путей Ω_{pq} состоит из одного гомотопического класса Δ . При этом $\Delta^- = \Lambda_{pq}^- \neq \emptyset$ и класс Δ не содержит изотропных геодезических. Наконец, $H_2(M) = 0$ и, следовательно, форма F точна на $U = M$ и $k = 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и потому задача (1)–(3) имеет решение.

Если форма F удовлетворяет уравнениям Максвелла, то рассмотренная в теореме 3 гироскопическая система Γ описывает динамику пробной частицы с массой m и электрическим зарядом e в электромагнитном поле $(m/e)F$.

Пусть далее, m_* – положительное вещественное число, $\varkappa \in (-m_*, m_*)$ и $r_+ = m_* + \sqrt{m_*^2 - \varkappa^2}$. Рассмотрим единичную сферу M_2 трехмерного

евклидова пространства, индуцированную риманову метрику g_2 на M_2 , а также многообразия

$$M_0 = \mathbb{R}, \quad M_1 = (r_+, +\infty), \quad M_3 = M_1 \times M_2, \quad M = M_0 \times M_3.$$

Определены естественные проекции $\text{pr}_\alpha: M \rightarrow M_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, и $\text{pr}_{3i}: M_3 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$. Введем обозначения $dt = d\text{pr}_0$, $r = \text{pr}_1$ и $r_3 = \text{pr}_{31}$. Положим $f_3 = 1 - 2m_*/r_3 + \kappa^2/r_3^2$, $f = f_3 \circ \text{pr}_3$, $\gamma = (1/f_3)dr_3 \otimes dr_3 + r_3^2 \text{pr}_{32}^* g_2$, $g_3 = (1/f_3)\gamma$ и $g = -f dt \otimes dt + \text{pr}_3^* \gamma$. Этим определены римановы метрики γ и g_3 на M_3 и лоренцева метрика g на M . В силу теорем 2.53–2.55 и теоремы 6.2 из [3] риманово многообразие (M_3, g_3) полно, а лоренцево многообразие (M, g) глобально гиперболично.

Рассмотрим форму объема ω_2 многообразия (M_2, g_2) , числа e , $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, и произвольную точную 2-форму F^0 на M . Положим $A^1 = -(\kappa/r) dt$, $F^1 = dA^1$ и $F^2 = \kappa \text{pr}_2^* \omega_2$. Так как $F^1 + F^0$ – точная форма, то для гироскопической системы $\Gamma^1 = (M, g, (e/m)(F^1 + F^0), 1/2)$ параметры θ и k равны нулю. Если c – 2-сфероид в M , то найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что $\int_c F^2 = n4\pi\kappa$. Поэтому для системы $\Gamma^2 = (M, g, (e/m)F^2, 1/2)$ имеют место равенства $\theta = 4\pi\kappa(e/m)$ и $k = 1$.

С точки зрения физики (M, g) – внешнее пространство-время Райсснера–Нордстрема, m_* – масса черной дыры, κ – ее заряд [4, с. 212]. При этом в системе Γ^1 κ – электрический заряд, а в системе Γ^2 – магнитный [5, с. 216]. Формы F^1 и F^2 соответствуют электрическому и магнитному полям монополя κ , а форма F^0 – некоторому внешнему электромагнитному полю. Таким образом, Γ^1 и Γ^2 описывают динамику пробной частицы с массой m и электрическим зарядом e под действием гравитационного поля заряженной черной дыры и электромагнитных полей $F^1 + F^0$ и F^2 соответственно. Разумеется, при такой интерпретации необходимо считать, что форма F^0 удовлетворяет уравнениям Максвелла, а ее вклад в тензор энергии-импульса пренебрежимо мало влияет на геометрию пространства-времени. Отметим, что Γ^1 – гироскопическая система и при $\kappa = 0$. В этом случае черная дыра является шварцшильдовской, а электромагнитное поле чисто внешним.

Если p_2 и $p_2^\#$ – диаметрально противоположные точки сферы M_2 , а W – ее открытая полусфера, то множества $l = M_1 \times \{p_2\}$ и $l^\# = M_1 \times \{p_2^\#\}$ будем называть противоположными радиальными лучами, а произведение $M_1 \times W$ – половиной многообразия M_3 . Обозначим символами d_3 и L_3 функцию расстояния и функционал длины риманова многообразия (M_3, g_3) и зафиксируем точки $p_3, q_3 \in M_3$, $p = (0, p_3)$ и число $t_0 = d_3(p_3, q_3)$. Заметим, что при $t \in \mathbb{R}$ и $q = (t, q_3)$ включение $q \in I^+(p)$ эквивалентно неравенству $t_0 < t$.

ЛЕММА 9. Пусть $x: I \rightarrow M$ – гладкий непространственноподобный путь и $\sigma = \text{pr}_0 \circ x$. Тогда x – изотропная геодезическая лоренцева многообразия (M, g) в том и только в том случае, если $y = \text{pr}_3 \circ x \circ \sigma^{-1}$ – нормальная геодезическая риманова многообразия (M_3, g_3) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u = -1/2 f_3$. По теореме 1 из [2] x – геодезическая многообразия (M, g) тогда и только тогда, когда $f(x)\dot{\sigma} \equiv \delta \in \mathbb{R}$ и $z = \text{pr}_3 \circ x$ – экстремаль функционала $\bar{S}_\delta(z) = \int_0^1 [\gamma(\dot{z}, \dot{z})/2 - \delta^2 u(z)] dt$. При этом изотропность пути x равносильна равенству $\delta^2 u(z) + \gamma(\dot{z}, \dot{z})/2 \equiv h = 0$. В силу принципа Мопертюи–Ферма z – экстремаль $\bar{S}_\delta$ и имеет энергию $h = 0$ при том и только при том условии, что кривая $y = z \circ \sigma^{-1}$ является геодезической римановой метрики $2(h - \delta^2 u)\gamma = \delta^2 g_3$ и $g_3(\dot{y}, \dot{y}) \equiv 1$. Осталось заметить, что многообразия $(M_3, \delta^2 g_3)$ и (M_3, g_3) имеют одни и те же геодезические.

ЛЕММА 10. Если $y(t)$ – геодезическая риманова многообразия (M_3, g_3) и $\sigma(t) = \int_0^t (f_3/r_3^2)(y(\tau)) d\tau$, то $z = \text{pr}_{32} \circ y \circ \sigma^{-1}$ – геодезическая сферы (M_2, g_2) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 3 статьи [6].

Обозначим символом T_0 множество чисел $t \in [t_0, +\infty)$, для которых точки $p = (0, p_3)$ и $q = (t, q_3)$ соединены изотропными геодезическими лоренцева многообразия (M, g) .

ЛЕММА 11. Множество T_0 замкнуто и имеет меру нуль в $\mathbb{R}$. Если точки p_3 и q_3 не лежат на противоположных лучах многообразия M_3 , то t_0 – изолированная точка множества T_0 . Наконец, в случае, когда содержащие p_3 и q_3 радиальные лучи не совпадают и не противоположны, T_0 состоит только из изолированных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 T_0 совпадает с множеством критических значений функционала $L_3: \Omega_{p_3 q_3} \rightarrow \mathbb{R}$, откуда немедленно следует первое утверждение леммы. Пусть l и $l^\#$ – противоположные лучи многообразия M_3 и $p_3 \in l$. Если $q \notin l \cup l^\#$, то в силу леммы 10 точки p_3 и q_3 не сопряжены на геодезических римановой метрики g_3 . При этом по теореме 16.3 книги [7] для любого $t_1 > t_0$ пересечение $T_0 \cap [t_0, t_1]$ конечно. Допустим, наконец, что $q_3 \in l$ и рассмотрим числа $e = d_3(l, l^\#)$, $\varepsilon \in (0, -t_0 + \sqrt{t_0^2 + 2e^2})$. Если y – геодезическая многообразия (M_3, g_3) , $y \in \Omega_{p_3 q_3}$ и точки p_3 и q_3 сопряжены на y , то в силу леммы 10 y_3 пересекает луч $l^\#$. Но тогда $L_3(y) > t_0 + \varepsilon$ и по той же теореме из [7] конечно пересечение $T_0 \cap [t_0, \varepsilon + t_0]$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p_3, q_3 \in M_3$, $t_0 = d_3(p_3, q_3)$ и $t \in (t_0, +\infty) \setminus T_0$. Тогда для системы Γ^1 и точек $p = (0, p_3)$ и $q = (t, q_3)$ существует решение задачи (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, многообразие (M, g) глобально гиперболично. По выбору числа t единственный гомотопический класс $\Delta = \Omega_{pq}$ не содержит изотропных геодезических. Наконец, форма $F^1 + F^0$ точна на $U = M$ и $k = 0$. В силу теоремы 2 этим утверждение доказано.

ЛЕММА 12. Если $t \in (t_0, +\infty)$, $q = (t, q_3)$ и $x \in \Lambda_{pq}^-$, то $L(x) < \sqrt{t^2 - t_0^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\sigma = \text{pr}_0 \circ x$, $y = x \circ \sigma^{-1}$, $z = \text{pr}_3 \circ y$. Тогда $|g(\dot{y}, \dot{y})| = f(y)[1 - g_3(\dot{z}, \dot{z})]$. По определению $0 < f < 1$ на M . Следовательно,

$$\int_0^t |g(\dot{y}, \dot{y})| d\tau < t - \int_0^t g_3(\dot{z}, \dot{z}) d\tau.$$

В силу неравенства Шварца и определения числа t_0

$$\int_0^t g_3(\dot{z}, \dot{z}) d\tau \geq \frac{L_3(z)^2}{t} \geq \frac{t_0^2}{t}.$$

Таким образом,

$$L(x)^2 = L(y)^2 \leq t \int_0^t |g(\dot{y}, \dot{y})| d\tau < t^2 - t_0^2.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть точки p_3 и q_3 не лежат на противоположных лучах многообразия M_3 . Тогда найдется такое число $\bar{t} > t_0$, что для произвольного $t \in (t_0, \bar{t})$, точек $p = (0, p_3)$, $q = (t, q_3)$ и системы Γ^2 существует решение задачи (1)–(3). Если содержащие p_3 и q_3 радиальные лучи противоположны, то ни при каком $t \in \mathbb{R}$ для $p = (0, p_3)$, $q = (t, q_3)$ и Γ^2 задача (1)–(3) не имеет решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что p_3 и q_3 не лежат на противоположных лучах. Тогда в силу леммы 11 $t_1 = \inf(T_0 \setminus \{t_0\}) > t_0$. По лемме 10 соединяющие точки p_3 и q_3 минимальные геодезические многообразия (M_3, g_3) лежат в некоторой его половине V . В силу леммы 9 это означает, что для точек $p = (0, p_3)$ и $q_0 = (t_0, q_3)$ справедливо включение $J^+(p) \cap J^-(q_0) \subset U = \mathbb{R} \times V$. Отсюда и из причинной непрерывности лоренцева многообразия (M, g) следует существование такого $t_2 > t_0$, что $J^+(p) \cap J^-(q) \subset U$ для всех $t \in (t_0, t_2)$ и $q = (t, q_3)$. Положим $t_3 = \sqrt{t_0^2 + \theta^2/64}$ и $\bar{t} = \min\{t_1, t_2, t_3\}$ и рассмотрим число $t \in (t_0, \bar{t})$, точки $p = (0, p_3)$ и $q = (t, q_3)$ и класс $\Delta = \Omega_{pq}$. Тогда $\Delta^- = \Lambda_{pq}^- \neq \emptyset$ и вследствие неравенств $t_0 < t < t_1$ в Δ нет изотропных геодезических. В силу $t < t_2$ множество U является окрестностью пересечения $J(\Delta) = J^+(p) \cap J^-(q)$. Так как $H_2(U) = 0$, то форма F^2 точна на U . Если $c: I^2 \rightarrow U$ — гладкий сингулярный квадрат, то образ квадрата $\text{pr}_3 \circ c$ лежит в половине V многообразия M_3 . При этом $\int_c F^2 < \theta/2$ и в силу

замечания $2 \pi_{\Delta} \leq 1/2$. Наконец, из неравенств $t_0 < t < t_3$ и леммы 12 следует, что $L(x) < \theta/8$ для любого пути $x \in \Lambda_{pq}^-$. Это значит, что $d_1(\Delta) = d_1(p, q) \leq 1/8$ и $\psi_{\Delta}^+ - \psi_{\Delta}^- \leq \pi_{\Delta} + 2d_1(\Delta) < 1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2, и, следовательно, существует решение задачи (1)–(3).

Допустим теперь, что кривая $y: [0, \delta] \rightarrow M$ удовлетворяет уравнению (1), $y(0) = p = (0, p_3)$ и $y(\delta) = q = (t, q_3)$. Положим $\sigma(s) = \int_0^s (1/r^2)(y(\tau)) d\tau$ и $z = \text{pr}_2 \circ y \circ \sigma^{-1}$. Тогда $z: [0, \sigma(\delta)] \rightarrow M_2$ – движение гироскопической системы $\Gamma_2^2 = (M_2, g_2, (e/m)\kappa\omega_2, 1/2)$, $z(0) = \text{pr}_{32}(p_3)$ и $z(\sigma(\delta)) = \text{pr}_{32}(q_3)$. У системы Γ_2^2 нет движений, соединяющих диаметрально противоположные точки сферы M_2 . Поэтому точки p_3 и q_3 не могут лежать на противоположных лучах многообразия M_3 .

В заключение отметим интересное следствие теоремы 5. Рассмотрим в M_3 произвольную пару противоположных радиальных лучей l и $l^\#$, точку $p_3 \in l$ и потенциал поля магнитного заряда $\varkappa$, выбирая в качестве дираковской нити луч $l^\#$. Зададим на M шварцшильдовскую систему координат. Тогда M_0 – ось времени, а M_3 – пространство. Допустим, что наблюдатель N неподвижен относительно выбранной системы отсчета и занимает пространственное положение p_3 . Он может изучать гравитационное и электромагнитное поля черной дыры, анализируя свойства траекторий, испускаемых из p_3 электрически заряженных пробных частиц. При этом в силу теоремы 5 обнаружится, что ни одна из траекторий не пересекает $l^\#$, хотя через любую точку $q_3 \in M_3 \setminus l^\#$ проходит бесконечное множество траекторий. Таким образом, для наблюдателя N сингулярность магнитного потенциала на нити $l^\#$ имеет физический смысл. Кроме того, $l^\#$ – единственная нить, исключив которую из пространства M_3 , мы получим регулярный потенциал поля монополя $\varkappa$, но никак не повлияем на результаты экспериментов наблюдателя N .

Нижегородский государственный университет

Поступило

26.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
- [2] Яковлев Е. И. Двухконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов // Функцион. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 4. С. 63–73.
- [3] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
- [4] Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986.
- [5] Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М.: МГУ, 1986.
- [6] Шапиро Я. Л. Геодезическое поле направлений в целом // Изв. вузов. Матем. 1970. № 4. С. 103–111.
- [7] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.