Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Баулина, О решении обобщенного уравнения Маркова, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 450–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:09:34

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАРКОВА

Ю. Н. Баулина

Рассмотрим диофантово уравнение

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c = d x_1 \dots x_n, \quad (1)$$

где

$$a_1, \dots, a_n, d \in \mathbb{N}, \quad b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ a_1 | d, \dots, a_n | d, \quad a_1 | b_1, \dots, a_n | b_n, \quad n \geq 3.$$

В работах [1]–[6] приводятся алгоритмы решения различных частных случаев (1). Цель данной заметки – обобщение результатов всех перечисленных выше работ.

Введем несколько определений. Пусть $(u_1, \dots, u_n)$ – решение уравнения (1) в натуральных числах. Тогда для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ $(u_1, \dots, u_{k-1}, u'_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ – решение (1), где

$$u'_k = \frac{d}{a_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n u_i - \frac{b_k}{a_k} - u_k.$$

Это решение будем называть *соседним* по компоненте u_k для решения $(u_1, \dots, u_n)$. Сумму $u_1 + \dots + u_n$ будем называть *высотой* решения $(u_1, \dots, u_n)$. Решение уравнения (1) будем называть *фундаментальным*, если оно не имеет соседних решений с меньшей высотой.

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (1) имеет решение в натуральных числах, то оно имеет бесконечно много решений.*

ТЕОРЕМА 2. *Каждое нефундаментальное решение (1) может быть получено из единственного фундаментального решения с помощью конечного числа переходов к соседним решениям.*

Таким образом, уравнение (1) можно считать решенным в натуральных числах, если найдены все его фундаментальные решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(u_1, \dots, u_n)$ – фундаментальное решение (1),

$$u_k = \max_{1 \leq i \leq n} u_i, \quad u_l = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} u_i, \quad \Pi_{k,l} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq l}}^n u_i, \quad \Sigma_{k,l} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq l}}^n (a_i u_i^2 + b_i u_i).$$

Тогда

$$2(a_k a_l)^{1/2} < d\Pi_{k,l} \leq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + c, \quad (2)$$

$$u_k \leq \frac{b_l d\Pi_{k,l} + 2a_l b_k}{(d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l} + \left[\frac{1}{a_k ((d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l)} \left(\frac{a_k (b_l d\Pi_{k,l} + 2a_l b_k)^2}{(d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l} + (d\Pi_{k,l})^2 (\Sigma_{k,l} + c) + a_l b_k^2 + b_k b_l d\Pi_{k,l} \right) \right]^{1/2}, \quad (3)$$

$$u_l \leq \frac{b_k d\Pi_{k,l} + 2a_k b_l}{(d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l} + \left[\frac{1}{a_l ((d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l)} \left(\frac{a_l (b_k d\Pi_{k,l} + 2a_k b_l)^2}{(d\Pi_{k,l})^2 - 4a_k a_l} + (d\Pi_{k,l})^2 (\Sigma_{k,l} + c) + a_k b_l^2 + b_k b_l d\Pi_{k,l} \right) \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Если, кроме того, $d\Pi_{k,l} > a_k + a_l$, то

$$u_l \leq \frac{b_k + b_l + (4(d\Pi_{k,l} - a_k - a_l)(\Sigma_{k,l} + c) + (b_k + b_l)^2)^{1/2}}{2(d\Pi_{k,l} - a_k - a_l)}. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ. При $d > \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + c$ уравнение (1) не имеет решений в натуральных числах.

Теорема 3 дает следующий алгоритм отыскания всех фундаментальных решений уравнения (1).

1. Выбрать две из переменных $x_1, \dots, x_n$ в качестве x_k и x_l .
2. Найти все u_i , $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$, $i \neq l$, удовлетворяющие (2).
3. Для каждого из полученных наборов найти все значения u_k или u_l , удовлетворяющие (3), (4) или (5).
4. Подставить каждый из наборов $(u_1, \dots, u_{l-1}, u_{l+1}, \dots, u_n)$ или $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ в (1) и найти корни полученного квадратного уравнения. Если корни – натуральные числа, то u_l или u_k – меньший корень и $(u_1, \dots, u_n)$ – фундаментальное решение.

Автор выражает благодарность В. И. Нечаеву за полезные замечания при выполнении работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баулина Ю.Н. Об одном обобщении уравнения Маркова // Деп. ВИНТИ 1992. № 3665–В92.
2. Марков А.А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя // Избр. труды. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1951.
3. Cusick T.W. // Aequat. Math. 1993. V. 46. № 3. P. 203–211.
4. Frobenius G. // Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsberichte. 1913. V. XXVI. S. 458–487.
5. Hurwitz A. // Archiv der Math. und Phys. 1907. V. 11. S. 185–196.
6. Rosenberger G. // J. Reine und Angew. Math. 1979. V. 305. S. 122–125.