Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Интегральные операторы, порожденные оператором взвешенного сдвига, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 452–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:38:33

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОПЕРАТОРОМ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

М. С. Бичегкуев

В работе вводится класс интегральных операторов, ядра которых порождены операторами взвешенного сдвига и изучается их ограниченность в пространствах Лебега.

Введем следующие обозначения: $L_p^+ = L_p(0, \infty)$, $L_p = L_p(-\infty, \infty)$ – лебеговы пространства измеримых функций на полуоси $(0, \infty)$, вещественной прямой $(-\infty, \infty)$, суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ с нормами $\|\cdot\|_p^+$ и $\|\cdot\|_p$ соответственно; $L_p^+(\alpha^q)$, $q \in (-\infty, \infty)$, $p \in [1, \infty)$ – весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{p,q}^+ = \|\alpha^{q/p} \cdot f\|_p^+.$$

Через p' обозначим сопряженный показатель для $p \geq 1$, т.е. $1/p + 1/p' = 1$.

В качестве весовой функции будем рассматривать непрерывную функцию $\alpha = \alpha(t)$, $t \in (0, \infty)$, которая удовлетворяет следующим условиям: $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, $\alpha(t) = 1$ при $t \geq d$ ($0 < d$ – фиксированное число); $\lim_{t \rightarrow +0} \alpha(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow +0} \int_t^d \alpha^{-1}(\tau) d\tau = \infty$. По функции $\alpha = \alpha(t)$ построим функцию

$$x = \varphi(t) = \int_t^d \alpha^{-1}(\tau) d\tau: (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty).$$

Обозначим через $t = \psi(x)$ функцию, обратную к $x = \varphi(t)$, а через $\gamma = \gamma(t, s)$ – функцию, определяемую тождеством

$$\varphi(\gamma(t, s)) = \varphi(t) - \varphi(s). \quad (1)$$

Положим

$$R_t^p k(s) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha(\gamma(t, s))}{\alpha^{p-1}(s)} \right)^{1/p} k(\gamma(t, s)) & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \frac{k(\gamma(t, s))}{\alpha(s)} & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $\gamma = \gamma(t, s)$ – функция из тождества (1). Оператор (2) представляет собой оператор взвешенного сдвига. В частности, при $d < s < t$ оператор (2) совпадает с оператором “обычного” сдвига.

Из определения $G_{\alpha,p}[1]$ и R_t^p непосредственно получаем

$$G_{\alpha,\infty}^{t \rightarrow x} G_{\alpha,p'}^{s \rightarrow y} [R_t^p k(s)] = G_{\alpha,p}[k](x-y). \quad (3)$$

Свойство оператора (2) характеризует

ЛЕММА. Если f, g – измеримые функции на $(0, \infty)$, то для любого $p \in [1, \infty]$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty R_t^p f(s) g(s) ds = \int_0^\infty f(s) R_t^p g(s) ds.$$

Введем оператор

$$V_{k,p} f(t) = \int_0^\infty R_t^p k(s) f(s) ds, \quad (4)$$

где $k(s)$, $s > 0$, – фиксированная функция и $p \in [1, \infty]$. Оператор (4) представляет собой интегральный оператор, ядро которого порождено оператором взвешенного сдвига (2).

Применяя к обеим частям (4) оператор $G_{\alpha,\infty}^{t \rightarrow x}$ и делая замену $s = \psi(y)$ в правой части (4), с учетом (3), получим формулу

$$G_{\alpha,\infty}^{t \rightarrow x} [V_{k,p} f](x) = \int_{-\infty}^\infty G_{\alpha,p}[k](x-y) G_{\alpha,p}[f](y) dy,$$

которая устанавливает связь между оператором (4) и интегральным оператором свертки [2]. Условие ограниченности оператора (4) в L_q^+ дает

ТЕОРЕМА 1. Если $1 \leq p \leq q < \infty$ и $k \in L_1^+(\alpha^{-1/p'})$, то оператор (4) является ограниченным в L_q^+ , причем $\|V_{k,p} : L_q^+ \rightarrow L_q^+\| \leq \|k\|_{1,-1/p'}^+$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $k \in L_1^+(\alpha^{-1/p'})$ и $1 \leq p \leq q < \infty$. Тогда оператор

$$U_{k,p,q} f(t) = \alpha^{-1/q}(t) V_{k,p} f(t) \quad (5)$$

является ограниченным в L_p^+ , причем

$$\|U_{k,p,q} : L_p^+ \rightarrow L_p^+\| \leq \|k\|_{1,-1/p'}^+.$$

Используя критерий регулярности интегрального оператора свертки [3] доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. Оператор (5) регулярен в L_p^+ тогда и только тогда, когда $k \in L_1^+(\alpha^{-1/p'})$.

Рассмотрим оператор

$$V_{k,p}^\# g(s) = \int_0^\infty R_t^p k(s) g(t) dt,$$

который будем называть транспонированным по отношению к оператору (4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $k \in L_1^+(\alpha^{-1/p'})$. Тогда оператор $V_{k,p}^\#$ действует в L_p^+ и совпадает с сопряженным к оператору $V_{k,p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится методами, развитыми в работах [2], [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушко В. П., Савченко Ю. Б. // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1985.
2. Коротков В. Б. Интегральные операторы. М.: Наука, 1983.
3. Степанов В. Д. // Сиб. матем. ж. 1974. Т. 15. № 3. С. 693–699.
4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.