Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, К топологическому обобщению теоремы Тверберга, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 454–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:16:56

К ТОПОЛОГИЧЕСКОМУ ОБОБЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ТВЕРБЕРГА

А. Ю. Воловиков

1. Обозначим N -мерный симплекс через Δ^N . Носителем точки назовем наименьшую замкнутую грань симплекса, содержащую эту точку. Обозначим через $\partial\Delta^N$ границу симплекса ($\partial\Delta^N$ гомеоморфна $(N-1)$ -мерной сфере S^{N-1}).

ТЕОРЕМА. Пусть $q = p^n$, где p – любое простое число, $N = (q-1)(t+1)$ и $f: \partial\Delta^N \rightarrow M^m$ – непрерывное отображение в t -мерное топологическое многообразие. При $q = 2$ предположим дополнительно, что степень по модулю 2 отображения $f: \partial\Delta^{m+1} \rightarrow M^m$ равна нулю. Тогда найдутся q попарно непересекающихся замкнутых граней $\Delta^{i_1}, \dots, \Delta^{i_q}$ симплекса Δ^N таких, что пересечение их образов $f(\Delta^{i_1}) \cap \dots \cap f(\Delta^{i_q})$ непусто.

Для случая $M^m = \mathbb{R}^m$ и $n = 1$ (т.е. для $q = p$, где p – простое число) эта теорема доказана в [1] для $p = 2$ и в [2] для $p > 2$. Теорема Тверберга [3] эквивалентна утверждению приведенной выше теоремы для случая линейного отображения симплекса $\Delta^{(q-1)(m+1)}$ в $\mathbb{R}^m$, но установлена в [3] для любого натурального q .

2. Приведем сначала доказательство теоремы для случая $M = \mathbb{R}^m$.

В [2] рассматривался CW -комплекс $Y_{N,q}$, являющийся подкомплексом декартовой степени $(\Delta^N)^q$ симплекса Δ^N , состоящий из точек $(y_1, \dots, y_q)$, $y_i \in \partial\Delta^N$, имеющих попарно непересекающиеся носители. В [2] показано, что для любых натуральных чисел q и $N \geq q+1$ CW -комплекс $Y_{N,q}$ является $(N-q)$ -связным.

Пусть $G = (\mathbb{Z}_p)^n = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$ (произведение n экземпляров группы $\mathbb{Z}_p$). Вложим G в симметрическую группу Σ_q , где $q = p^n = |G|$. Для этого нужно упорядочить G и рассматривать G как G -множество. Таким образом, G действует на X^q для любого X (действуя перестановками индексов), в частности, G действует на $(\Delta^N)^q$ и на $(\mathbb{R}^m)^q$, причем $Y_{N,q}$ и диагональ $d\mathbb{R}^m = \{(v_1, \dots, v_q) \in (\mathbb{R}^m)^q \mid v_1 = \dots = v_q\}$ инвариантны относительно действия G .

ЛЕММА. Пусть G действует на X и S без неподвижных точек. Предположим, что S – конечномерная когомологическая k -мерная сфера над полем $\mathbb{Z}_p$ и $\tilde{H}^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при всех $i \leq l$. Если существует G -отображение из X в S , то $l < k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант JH2100.

Таким образом, при $l \geq k$ нет (непрерывных) эквивариантных отображений из X в S .

Докажем теперь теорему (для $M = \mathbb{R}^m$). Определим $\hat{f}: Y_{N,q} \rightarrow (\mathbb{R}^m)^q$ как $\hat{f}(z) = (f(y_1), \dots, f(y_q))$, где $z = (y_1, \dots, y_q) \in Y_{N,q}$ и $N = (m+1)(q-1)$, $q = p^n$, p – простое число. Очевидно, $\hat{f}$ эквивариантно. Предположим, что теорема не верна. Тогда $\hat{f}(Y_{N,q})$ не пересекается с $d\mathbb{R}^m$ и, следовательно, возникает эквивариантное отображение из $Y_{N,q}$ в $(\mathbb{R}^m)^q \setminus d\mathbb{R}^m$. Последнее пространство гомотопически эквивалентно $(m(q-1)-1)$ -мерной сфере, и мы получаем противоречие с леммой, поскольку $Y_{N,q}$ ациклично до размерности $m(q-1)-1$ включительно, и G действует на $Y_{N,q}$ свободно и на $(\mathbb{R}^m)^q \setminus d\mathbb{R}^m$ без неподвижных точек (свободно при $n = 1$).

Приведем теперь доказательство леммы. Для G -пространства X обозначим через $H_G^*(X)$ эквивариантные когомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$, т.е. когомологии пространства $X_G = (X \times E_G)/G$, где $E_G \rightarrow B_G$ – главное универсальное G -расслоение и $X \times E_G$ рассматривается с диагональным действием, см. [4]. Положим $\Lambda^* = H^*(B_G) = H_G^*(pt)$, где pt – одноточечное пространство. G -отображение $X \rightarrow pt$ индуцирует гомоморфизм $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$. Из рассмотрения спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$ со слоем X следует, что если X ациклично до размерности l включительно, то $\Lambda^i \rightarrow H_G^i(X)$ – мономорфизм в размерностях $\leq l+1$. Если S – когомологическая k -мерная сфера (над $\mathbb{Z}_p$) конечной когомологической размерности, то имеется ненулевой класс $e \in \Lambda^{k+1}$, образ которого в $H_G^{k+1}(S)$ равен нулю, см., например, [4] (e – эйлеров класс сферического расслоения $S_G \rightarrow B_G$). Если существует G -отображение из X в S , то образ e в $H_G^{k+1}(X)$ также равен нулю, поэтому $l+1 < k+1$.

3. Рассмотрим теперь общий случай. Для G -пространства X определим его индекс $\text{in } X$ как наибольшее k , для которого $\Lambda^i \rightarrow H_G^i(X)$ – мономорфизм при всех $i \leq k$. Если существует G -отображение G -пространства $X \rightarrow Y$, то, очевидно, $\text{in } X \leq \text{in } Y$. Для пространства X и S из леммы имеем $\text{in } X \geq l+1$ и $\text{in } S = k$.

Для G -пространства X и отображения $f: X \rightarrow M$ положим $A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \forall g \in G\}$.

В [5] доказан следующий результат (для $G = \mathbb{Z}_p$ см. также [6]): если $h: X \rightarrow M$ – отображение CW -комплекса X с G -действием в m -мерное топологическое многообразие, ориентируемое при $p > 2$, такое, что гомоморфизм $f^*: H^i(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z}_p)$ тривиален при $i \geq 1$, то $\text{in } A(f) \geq \text{in } X - m(q-1)$, в частности, если $\text{in } X \geq m(q-1)$, то $A(f)$ непусто.

Теорема вытекает из этого результата, если рассмотреть отображение $h: Y_{N,q} \rightarrow M$, определенное как $h(z) = f(y_1)$, где $z = (y_1, \dots, y_q) \in Y_{N,q}$, $N = (q-1)(m+1)$, $q = p^n$ (для неориентируемого M вместо $f: \partial \Delta^N \rightarrow M$ нужно рассмотреть его поднятие в универсальное накрытие). Поскольку $\text{in } Y_{N,q} \geq m(q-1)$ множество $A(h)$ непусто и для $z = (y_1, \dots, y_q) \in A(h)$ имеем $f(y_1) = \dots = f(y_q)$.

4. Пусть K – выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^{m+1}$ с непустой внутренностью. Скажем, что точки $x, y \in \partial K$ противоположны, если они лежат на разных параллельных опорных гиперплоскостях.

Случай $q = 2$ в теореме вытекает из следующего более общего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f: \partial K \rightarrow M$ – отображение в m -мерное топологическое многообразие, степень которого по модулю 2 равна нулю. Тогда найдутся противоположные точки $x, y \in \partial K$ такие, что $f(x) = f(y)$.

Для $M = \mathbb{R}^m$ это предложение доказано в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S — m -мерную сферу, лежащую во внутренности тела K . Без ограничения общности можно считать, что центр сферы совпадает с началом координат. На S действует свободная инволюция, переводящая $x \in S$ в $-x$ (центральный симметрия). Для $x \in S$ обозначим через $C(x)$ пересечение с K опорной гиперплоскости, к которой направлен вектор x и которая ортогональна этому вектору. Определим $X \subset S \times \partial K \times \partial K$ как множество тех (x, u, v) , что $u \in C(x)$ и $v \in C(-x)$ (ясно, что u и v противоположны). Нетрудно видеть, что X компактно. На X действует свободная инволюция T , переводящая (x, u, v) в $(-x, v, u)$, и проекция X на S эквивариантна и является виеторисовым отображением. Поэтому X — компактная когомологическая m -мерная сфера (на самом деле даже гомотопическая сфера) и $\text{in } X = \text{in } S = m$. Определим $h: X \rightarrow M$ как $h(z) = f(u)$ для $z = (x, u, v)$. Тогда из приведенного в п. 3 результата вытекает, что найдется точка $z = (x, u, v) \in X$ такая, что $h(z) = h(Tz)$, т.е. $f(u) = f(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В приведенном рассуждении, по существу, использована схема доказательства теорем Борсука—Улама и Буржена—Янга для многозначных отображений (см., например, [7]–[11]), в данном случае для отображения $F: S \rightarrow M$, определенного как $F(x) = f(C(x))$.

Московский институт
радиоэлектроники и автоматики

Поступило
21.01.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bajmóczy E. G., Bárány I. // Acta Math. Hung. 1979. V. 34. P. 347–350.
2. Bárány I., Shlosman S. B., Szücs A. // J. London Math. Soc. 1981. V. 23. P. 158–164.
3. Tverberg H. // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 123–128.
4. Hsiang W. Y. Cohomology theory of topological transformation groups. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975.
5. Воловиков А. Ю. // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 115–144.
6. Воловиков А. Ю. // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 1. С. 128–134.
7. Jaworowski J. // Bull. Acad. Sci. Pol. Math. 1956. V. 4. P. 187–192.
8. Scordev G. S. // Serdica. 1975. V. 1. P. 183–198.
9. Geba K., Gorniewicz L. // Bull. Acad. Sci. Pol. Math. 1986. V. 34. № 5–6. P. 315–322.
10. Izydorek M. // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 137. P. 349–353.
11. Воловиков А. Ю. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 159–160.