Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина, Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 456–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:51:57

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина

В предлагаемой статье рассматривается вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с интегральными условиями для линейного гиперболического уравнения. В работе [1] А. А. Самарский приводит постановку задачи с интегральными условиями для уравнения теплопроводности как пример новой задачи, возникающей при изучении некоторых проблем физики плазмы. Частные случаи задачи, поставленной в настоящей статье, были рассмотрены в работах [2], [3].

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = f(x, y) \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ и поставим следующую задачу: найти решение уравнения из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^\alpha u(x, y) dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

$$\int_0^\beta u(x, y) dy = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3)$$

где $\varphi(x), \psi(y)$ – заданные функции, $0 < \alpha \leq a, 0 < \beta \leq b$.

ТЕОРЕМА. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям: $A(x, y), B(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, $C(x, y) \in C(\overline{D})$,

$$\begin{aligned} \inf_D A_y(x, y) &\geq 0, \quad \inf_D B_x(x, y) \geq 0, \\ \inf_{x \in [0, \alpha]} A(x, \beta - \delta) &\geq 0, \quad \inf_{y \in [0, \beta]} B(\alpha - \delta, y) \geq 0, \quad 0 < \delta < \min\{\alpha, \beta\}, \\ \sup_D |A_x(x, y) + B_y(x, y) - C(x, y)| &< \frac{1}{ab}, \end{aligned}$$

а заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ таковы, что

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^1[0, \alpha], \quad \psi(y) \in C^1[0, \beta], \\ \int_0^\alpha \varphi(x) dx &= \int_0^\beta \psi(y) dy, \quad \alpha\varphi(0) = \beta\psi(0), \end{aligned}$$

то существует единственное решение поставленной задачи.

Для доказательства разрешимости поставленной задачи воспользуемся представлением решения другой, вспомогательной задачи, а именно, задачи Гурса для уравнения (1) с данными

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(x, 0) = \varphi_2(x), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

Решение задачи Гурса может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x [\varphi_2'(\xi) + B(\xi, 0)\varphi_2(\xi)]v(\xi, 0; x, y) d\xi \\ &+ \int_0^y v(0, \eta; x, y)[\varphi_1'(\eta) + A(0, \eta)\varphi_1(\eta)] d\eta \\ &+ \int_0^x \int_0^y v(\xi, \eta; x, y)f(\xi, \eta) d\eta d\xi + u(0, 0)v(0, 0; x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v(\xi, \eta; x, y)$ – функция Римана. Обозначим

$$\Phi_1(y) = \varphi_1'(y) + A(0, y)\varphi_1(y), \quad (5)$$

$$\Phi_2(x) = \varphi_2'(x) + B(x, 0)\varphi_2(x), \quad (6)$$

и подчиним (4) условиям (2) и (3). Прделав ряд преобразований, полагая $\varphi(0) = \beta$, $\psi(0) = \alpha$ и учитывая, что в силу свойств функций Римана

$$\int_0^\alpha v(0, y; x, y) dx \neq 0, \quad \int_0^\beta v(x, 0; x, y) dy \neq 0,$$

получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами относительно функций $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) + \int_0^y \Phi_1(\eta) K_{11}(\eta, y) d\eta + \int_0^\alpha \Phi_2(\xi) K_{12}(\xi, y) d\xi &= g_1(y), \\ \Phi_2(x) + \int_0^x \Phi_2(\xi) K_{22}(\xi, x) d\xi + \int_0^\beta \Phi_1(\eta) K_{21}(\eta, x) d\eta &= g_2(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(\eta, y) &= \frac{\int_0^\alpha v_y(0, \eta; x, y) dx}{\int_0^\alpha v(0, y; x, y) dx}, & K_{12}(\xi, y) &= \frac{\int_\xi^\alpha v_y(\xi, 0; x, y) dx}{\int_0^\alpha v(0, y; x, y) dx}, \\ K_{21}(\eta, x) &= \frac{\int_\eta^\beta v_x(0, \eta; x, y) dy}{\int_0^\beta v(x, 0; x, y) dy}, & K_{22}(\xi, x) &= \frac{\int_0^\beta v_x(\xi, 0; x, y) dy}{\int_0^\beta v(x, 0; x, y) dy}, \\ g_1(y) &= \frac{1}{\int_0^\alpha v(0, y; x, y) dx} \left[\psi'(y) - \int_0^\alpha \int_0^x \left(v(\xi, y; x, y) f(\xi, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^y v_y(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi dx - \alpha \right], \\ g_2(x) &= \frac{1}{\int_0^\beta v(x, 0; x, y) dy} \left[\varphi'(x) - \int_0^\beta \int_0^y \left(v(x, \eta; x, y) f(x, \eta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^x v_x(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta dy - \beta \right]. \end{aligned}$$

Единственность решения поставленной задачи доказана в работе [3], где получена априорная оценка решения. Таким образом, в силу эквивалентности задачи (1)–(3) системе интегральных уравнений (7) и альтернативы Фредгольма функции $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(x)$ находятся из (7) однозначно. Тогда из уравнений (5), (6) и условий $\varphi(0) = \beta$, $\psi(0) = \alpha$ однозначно найдем $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$. Теперь формула (4), где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ – решения уравнений (5) и (6), правые части которых – решение системы (7), дает нам решение поставленной задачи.

Самарский государственный университет

Поступило
17.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
2. Нахушева З. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 1. С. 171–174.
3. Пулькина Л. С., Голубева Н. Д. Задача с нелокальными интегральными условиями для гиперболического уравнения // Деп. ВИНТИ 20.01.95. № 187–В95.