Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Изаак, Поперечники классов Гёльдера–Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 459–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:19:53

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ГЁЛЬДЕРА–НИКОЛЬСКОГО И КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

А. Д. Изаак

N -поперечником по Колмогорову подмножества V банахова пространства X называется величина

$$d_N(V, X) = \inf_{L_N} \sup_{x \in V} \inf_{y \in L_N} \|x - y\|_X,$$

где внешний инфимум берется по всем подпространствам L_N пространства X , $\dim L_N \leq N$.

Линейным N -поперечником подмножества V банахова пространства X называется величина

$$\lambda_N(V, X) = \inf_T \sup_{x \in V} \|x - Tx\|_X,$$

где инфимум берется по всем линейным операторам $T: X \rightarrow X$, $\text{rank } T \leq N$.

Для чисел $1 \leq p, q \leq \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^{mn}$ введем норму

$$\|x\|_{\ell_{p,q}^{n,m}} = \begin{cases} \left(\sum_{s=1}^m \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq p, q < \infty, \\ \max_{1 \leq s \leq m} \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{1/p}, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} : (s-1)n < k \leq sn\}$, $s = 1, \dots, m$. Тем самым получим нормированное пространство $\ell_{p,q}^{n,m}$ с единичным шаром $B_{p,q}^{n,m} = \{x : \|x\|_{\ell_{p,q}^{n,m}} \leq 1\}$.

Заметим, что $\|\cdot\|_{\ell_{p,p}^{n,m}} \equiv \|\cdot\|_{\ell_p^{mn}}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть $T^n = (-\pi, \pi]^n$ – n -мерный тор; $L_p = L_p(T^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство периодических по каждой переменной с периодом 2π функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$ таких, что норма $\|x(\cdot)\|_{L_p}$ конечна; $H_p^r(T^n)$ – класс Гёльдера–Никольского периодических функций нескольких переменных (точное определение см., например, в [1, с. 31]).

Вопрос о нахождении порядков поперечников различных функциональных классов часто сводится к задаче о поперечниках некоторых множеств в конечномерных пространствах.

Так, например, в [2] Э. М. Галеевым был вычислен порядок поперечника по Колмогорову $d_N(H_p^r, L_q)$ в случае $1 < p \leq q \leq 2$; при этом оценка снизу сводилась к оценке снизу поперечника шара $B_{1,\infty}^{n,m}$ в пространстве $\ell_{2,q}^{n,m}$, $q > 1$.

Случай $q = 1$ рассматривался автором в [3], где была получена следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \leq mn/2$. Тогда существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что справедливы неравенства:

$$c \cdot \frac{m \sqrt{\log \log m}}{\log m} \leq d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,1}^{n,m}) \leq m.$$

Сформулируем без доказательства теорему, близкую к теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \leq mn/2$, $m'n' = mn$, $m' \geq c_0 m \log m$. Тогда существует постоянная $c_1 = c_1(c_0) > 0$ такая, что справедливы неравенства:

$$c_1 \left(\frac{mm'}{\log m'} \right)^{1/2} \leq d_N(B_{1,\infty}^{n',m'}, \ell_{2,1}^{n,m}) \leq (mm')^{1/2}.$$

Следующий результат выводится из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N \leq mn/2$, $n \geq c_0 \log m$, $1 < p < 2$. Тогда существует постоянная $c_2 = c_2(c_0) > 0$ такая, что справедливы неравенства:

$$c_2 \frac{m^{1-1/p}}{(\log m)^{1/p}} \leq d_N(B_p^{mn}, \ell_{2,1}^{n,m}) \leq m^{1-1/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что при $N \leq mn/2$

$$d_N(B_p^{mn}, \ell_{2,1}^{n,m}) \asymp \begin{cases} 1 & \text{при } p = 1, \\ n^{1/2-1/p} m^{1-1/p} & \text{при } 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По теореме 2 для любых $n', m', m'n' = mn$, $m' \geq c_0 m \log m$, имеем

$$\begin{aligned} d_N(B_p^{mn}, \ell_{2,1}^{n,m}) &= d_N(B_{p,p}^{n',m'}, \ell_{2,1}^{n,m}) \geq d_N(B_{1,p}^{n',m'}, \ell_{2,1}^{n,m}) \\ &\geq (m')^{-1/p} d_N(B_{1,\infty}^{n',m'}, \ell_{2,1}^{n,m}) \gg (m')^{-1/p} \left(\frac{mm'}{\log m'} \right)^{1/2} \\ &= \frac{m^{1/2} (m')^{1/2-1/p}}{(\log m')^{1/2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя в последнее выражение $m' \asymp m \log m$, получаем

$$d_N(B_p^{mn}, \ell_{2,1}^{n,m}) \gg \frac{m^{1-1/p}}{(\log m)^{1/p}},$$

что доказывает оценку снизу. Оценка сверху тривиальна.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 = \dots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \dots \leq r_n$, $1 < p, q < \infty$. Тогда

i) при $1/p + 1/q < 1$, $p \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$

$$\begin{aligned} \alpha(N) \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/2+1/q} \log^{l/q} N \\ \ll \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/2+1/q} \log^{l/q} N, \end{aligned}$$

ii) при $2 \leq p < q$, $r_1 > 1/p - 1/q$

$$\begin{aligned} \alpha(N) \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/p+1/q} \log^{l/q} N \\ \ll \lambda_N(H_p^r(T^n), L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/p+1/q} \log^{l/q} N, \end{aligned}$$

где $\alpha(N) = (\log \log N)^{1/q-1}$.

Бликие к теореме 4 результаты (с заменой множителя $\alpha(N)$ на $(\log \log N)^{-1} \times \sqrt{\log \log \log N}$) получены Э. М. Галеевым в [4], где оценка снизу $\lambda_N(H_p^r, L_q)$ сводится к оценке снизу поперечника $\lambda_N(B_{q'}^{m,n}, \ell_{2,1}^{n,m})$, которая, в свою очередь, легко сводится к оценке поперечника $d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, \ell_{2,1}^{n,m})$ из теоремы 1. Однако теорема 3 позволяет получить более точный результат, который и сформулирован в теореме 4.

Автор выражает благодарность Б. С. Кашину за постоянное внимание к работе, а также Э. М. Галееву за полезное обсуждение.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: izaak@ipsun.ac.msk.su

Поступило
31.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178.
2. Галеев Э. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 418–430.
3. Изаак А. Д. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 43–52.
4. Галеев Э. М. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 2. С. 189–199.