Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Крякин, М. Д. Такев, Об интерполяционных константах Уитни, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 461–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:38:56

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КОНСТАНТАХ УИТНИ

Н. В. Крякин, М. Д. Такев

1. Для функции определенной на $I = [0, 1]$ положим

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x + jh).$$

Основным результатом данной заметки является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in C(I)$ и $Q_{n-1}(f; x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $n - 1$ такой, что

$$f\left(\frac{i}{n-1}\right) = Q_{n-1}\left(f; \frac{i}{n-1}\right), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Тогда

$$\sup_{x \in I} |f(x) - Q_{n-1}(f; x)| \leq W'(n) \sup_{y, y+nh \in I} |\Delta_h^n f(y)|, \quad \text{с } W'(n) < 5.$$

Теорема 1 уточняет оценку интерполяционных констант Уитни $W'(n) < 38$, полученную в [1].

Отметим, что согласно гипотезе Б. Сендова [2] $W'(n) < 2$.

2. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА А [3]. Пусть $f \in C(I)$, $n \in \mathbb{N}$ и $\int_0^{1/n} f(t) dt = 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для $x \in [1/(n+1), 1/n]$

$$f(ix) = \varphi_i(x) - \int_x^{1/n} \sum_{j=1}^n \frac{j}{i} \varphi_j(y) \left(l_{n,j} \left(\frac{ix}{y} \right) \right)'_x dy,$$

где

$$\varphi_i(x) = (-1)^i \binom{n}{i}^{-1} \frac{1}{x} \int_0^x \Delta_y^n f(i(x-y)) dy,$$

$$l_{n,j}(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-k}{j-k}, \quad j = 1, \dots, n.$$

3. Схема доказательства теоремы. Предположив, что

$$\sup_{y,h} |\Delta_h^n f(y)| \leq 1,$$

докажем неравенство

$$|f(x) - Q_{n-1}(f; x)| < 5.$$

Сделаем это косвенным путем, используя многочлены “интерполяционные в среднем”. Они определяются условиями

$$\int_0^{i/n} (f(x) - P_{n-1}(f; x)) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{n-1}(f; x)| &\leq |f(x) - P_{n-1}(f; x) - Q_{n-1}(f; x) + P_{n-1}(f; x)| \\ &\leq |f(x) - P_{n-1}(f; x)| + |Q_{n-1}(f - P_{n-1}; x)|. \end{aligned}$$

В работе [4] дана оценка первого слагаемого

$$|f(x) - P_{n-1}(f; x)| \leq 2.$$

Оценка второго слагаемого

$$|Q_{n-1}(f - P_{n-1}; x)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(q_i) l_{n-1,i}(x(n-1)) \right|,$$

где

$$q_i = \frac{i}{n-1}, \quad \tilde{f}(x) = f(x) - P_{n-1}(f; x),$$

основана на лемме А. Применение этой леммы к $\tilde{f}(x)$ и аккуратный подсчет получающихся сумм приводит к неравенству

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(q_i) l_{n-1,i}(x(n-1)) \right| < 3.$$

Поэтому

$$|f(x) - Q_{n-1}(f; x)| < 2 + 3 = 5.$$

4. Использование многочленов интерполяционных в среднем в качестве промежуточного приближения дает лучший результат при некоторой модификации равномерной точечной интерполяции. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) \in C(I)$ и $R_{n-1}(f; x)$ – алгебраический многочлен степени не выше $n-1$ ($n \geq 2$) такой, что

$$\begin{aligned} \text{при } n = 2k \quad f\left(\frac{i}{n}\right) &= R_{n-1}\left(f; \frac{i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n, \quad i \neq k; \\ \text{при } n = 2k + 1 \quad f\left(\frac{i}{n}\right) &= R_{n-1}\left(f; \frac{i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n, \quad i \neq k, k+1; \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= R_{n-1}\left(f; \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\sup_{x \in I} |f(x) - R_{n-1}(f; x)| \leq 3 \sup_{y, y+nh \in I} |\Delta_h^n f(y)|.$$

Авторы благодарят Б. С. Кашина за внимание к работе.

Одесский политехнический университет
Sofia University

Поступило
20.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takev M. On the theorem of Whitney–Sendov // Constructive theory of functions. Sofia, 1992. P. 269–275.
2. Sendov B. // C. R. Acad. Bul. Sci. 1982. V. 35. P. 431–434.
3. Крякин Ю. В. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 155–157.
4. Крякин Ю. В. Константы Уитни ограничены двойкой // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 5. С. 158–160.