Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Амбарцумян, А. В. Буробин, Продолжение функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности с чередующимися показателями, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 163–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:18:53

УДК 517.51

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ ЭКСПОНЕНТАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Г. А. Амбарцумян, А. В. Буробин

Для экспонент бесконечной кратности с двумя чередующимися показателями строится продолжение на неограниченную область, являющееся предельной функцией последовательности экспонент конечной кратности. Доказывается, что при различных показателях такое продолжение единственно в классе непрерывно дифференцируемых функций. Расширяется область существования экспонент бесконечной кратности. В случае показателей с одинаковыми знаками она остается ограниченной, а при показателях с разными знаками совпадает с числовой прямой.

Библиография: 7 названий.

Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, причем $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, \dots$. Следуя работе [1], будем называть гладкую функцию

$$v_n(t) = a_0 e^{a_1 t} e^{a_2 t^2} \cdots e^{a_n t^n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

конечной кратной экспонентой, или экспонентой кратности n , а поточечный предел

$$v_{\infty}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = a_0 e^{a_1 t} e^{a_2 t^2} \cdots \quad (2)$$

последовательности экспонент конечной кратности

$$\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty} \quad (3)$$

– экспонентой бесконечной кратности.

Заметим, что с помощью простой замены переменной $z = e^t$ можно получить эквивалентное представление для экспонент (1) и (2) в виде степеней конечной и бесконечной кратности соответственно.

Экспонентам бесконечной кратности посвящено огромное количество работ, достаточно подробный обзор которых можно найти в работах [2] и [1]. В частности, одна из задач, во многом определивших первоначальный интерес к этим экспонентам, была

посвящена изучению уравнения $x^y = y^x$, для решения которого достаточно найти обратную функцию для $z = g(x) = x^{1/x}$, представляющую степенью бесконечной кратности

$$x = h(z) = z^{z^{z^{\ddots}}}.$$

Область существования этой степени была впервые получена Эйлером в 1778 году. Установлено, что $h(z)$ существует при $e^{-e} \leq z \leq e^{1/e}$ и не существует при любом другом $z > 0$.

Несмотря на то, что экспоненты бесконечной кратности практически полностью изучены для стационарных последовательностей $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, сравнительно мало что известно про экспоненты с различными показателями. Одной из немногих фундаментальных работ, посвященных степеням бесконечной кратности с различными показателями, является работа Буланова [1]. В ней доказывается, что степень бесконечной кратности при комплексной переменной t и комплексных показателях a_k является регулярной функцией в некоторой области на комплексной плоскости. В случае, когда переменная t и показатели a_k являются вещественными, из доказанной теоремы следует, что экспонента бесконечной кратности (2) существует и является регулярной функцией на интервале $(-L, L)$, где

$$L = \frac{1}{e\bar{a}}, \quad \bar{a} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |a_n|.$$

Однако областью сходимости, полученной Эйлером для экспоненты бесконечной кратности

$$v_{\infty}(t) = te^{te^{te^{\ddots}}},$$

является отрезок $[-e, e^{-1}]$, правильной частью которого является интервал $(-L, L)$. Возникают естественные вопросы о возможности расширения области существования экспоненты (2) и продолжения функции, задаваемой этой экспонентой, за пределы интервала. Из работы [3] известно, что для чередующихся показателей $a_{2k} = \alpha$, $a_{2k+1} = \beta$, $k = 0, 1, \dots$, область существования экспоненты бесконечной кратности

$$v_{\infty}(t) = \alpha e^{\beta t e^{\alpha t e^{\beta t e^{\ddots}}}} \quad (4)$$

может быть расширена следующим образом. Пусть $|\alpha| = 1$, $|\beta| > 1$. Тогда вместо $\bar{a} = |\beta|$ в определении величины L можно взять

$$\bar{a} = \sqrt{|\beta|} \left(1 + \frac{1}{2} \ln |\beta| \frac{\sqrt{|\beta|} - 1}{\sqrt{|\beta|} + 1} \right).$$

Но, очевидно, полученная таким образом область существования остается конечным интервалом.

В данной работе доказывается возможность продолжения функции, задаваемой экспонентой (4), на неограниченную область, причем это продолжение является предельной функцией последовательности экспонент конечной кратности (3). Вид этой области зависит от алгебраических знаков α и β . Существенными оказываются два случая:

$\alpha\beta > 0$ и $\alpha\beta < 0$. Первый случай был частично исследован авторами в работе [4], в которой рассматривались положительные показатели α и β . Легко заметить, что случай отрицательных α и β сводится к предыдущему изменением знака переменной t .

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Нобель [2] доказал, что если $\alpha = \beta = 1$, то последовательность экспонент конечной кратности (3) монотонно и неограниченно возрастает при $t > e^{-1}$ и имеет частичные пределы, осциллируя в ограниченной области, при $t < -e$. Поэтому естественным является поиск продолжения функции, задаваемой экспонентой (4), на область $\{t : t < L\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \neq \beta$. Тогда функция $v_\infty(t)$ имеет единственное продолжение, являющееся предельной функцией последовательности экспонент конечной кратности (3), в классе непрерывно дифференцируемых функций на множество $\{t : t < L\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование экспоненты бесконечной кратности на интервале $(-L, L)$ следует из работы Буланова [1]. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t < 0$.

Установим ряд вспомогательных фактов, справедливых при произвольных положительных показателях α и β .

Для экспонент конечной кратности имеют место соотношения

$$v_{2k+1}(t) = \alpha e^{\beta t} e^{v_{2k-1}(t)t}, \quad v_{2k}(t) = \alpha e^{\beta t} e^{v_{2k-2}(t)t}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

предельный переход в которых показывает, что в области своего существования экспонента (4) удовлетворяет конечному уравнению

$$v(t) = \alpha e^{\beta t} e^{v(t)t}. \quad (5)$$

Заметим, однако, что, вообще говоря, не все решения этого конечного уравнения удастся получить с помощью экспоненты (4).

Последовательность экспонент конечной кратности с нечетными номерами

$$\{v_{2k+1}(t)\}_{k=0}^\infty \quad (6)$$

является монотонно возрастающей и ограничена сверху функцией $v(t) \equiv \alpha$, а последовательность экспонент конечной кратности с четными номерами

$$\{v_{2k}(t)\}_{k=0}^\infty \quad (7)$$

монотонно убывает и ограничена снизу функцией $v(t) \equiv 0$. Действительно, отображение $E: [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$,

$$g = E(f) = \alpha e^{\beta t} e^{f t}, \quad (8)$$

при фиксированном t является монотонно возрастающим, и имеют место рекуррентные соотношения

$$v_{2k+1} = E(v_{2k-1}), \quad v_{2k} = E(v_{2k-2}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем $v_2(t) < v_0(t)$ и $v_1(t) < v_3(t)$. Следовательно, последовательности (6) и (7) поточно сходятся, а их пределы представляют собой полунепрерывную снизу и полунепрерывную сверху функции соответственно (см. [5]), которые удовлетворяют уравнению (5). Понятно, что при $t \in (-L, 0)$ они совпадают и являются непрерывными на этом интервале.

Рассмотрим функцию

$$F(t, v) = v - \alpha e^{\beta t e^{vt}}.$$

Обозначим через $Z(F)$ множество точек (t, v) , удовлетворяющих уравнению (5). Частные производные функции $F(t, v)$ непрерывны на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и на множестве $Z(F)$ имеют вид

$$F'_v(t, v) = 1 - \beta v t^2 e^{vt}, \quad F'_t(t, v) = -\beta v(1 + vt) e^{vt}.$$

Из работы [6] известно, что при $t \in (-L, L)$ функция $v_\infty(t)$ является решением задачи Коши

$$v' = \beta v e^{vt} \frac{1 + vt}{1 - \beta v t^2 e^{vt}}, \quad (9)$$

$$v(0) = \alpha. \quad (10)$$

Можно легко показать, что функция $v_\infty(t)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения (9) с начальным условием более общего вида:

$$v(t_0) = v_0, \quad (11)$$

если точка $(t_0, v_0) \in Z(F)$ и не является решением уравнения

$$D(t, v) = 1 - \beta v t^2 e^{vt} = 0. \quad (12)$$

Такие точки будем называть *регулярными* для $Z(F)$ (см. [7]). Примером регулярной точки является точка $(0, \alpha)$. Продолжение функции $v_\infty(t)$ получается при продолжении решения этой задачи Коши.

ЛЕММА 1. Пусть (t_0, v_0) – регулярная точка. Тогда в некоторой окрестности этой точки задача Коши (9), (11) и конечное уравнение (5) однозначно разрешимы и определяют одно и то же решение $v(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности регулярной точки (t_0, v_0) правая часть уравнения (9) является непрерывно дифференцируемой функцией и, следовательно, решение задачи Коши (9), (11) единственно в этой окрестности. Оно удовлетворяет уравнению

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t_0 e^{v_0 t_0}} e^{\beta t e^{v(t) t}}, \quad (13)$$

которое совпадает с уравнением (5), так как для регулярной точки (t_0, v_0) выполняется условие

$$v_0 = \alpha e^{\beta t_0 e^{v_0 t_0}}.$$

Из справедливости соотношений $F(t_0, v_0) = 0$, $F'_v(t_0, v_0) \neq 0$ следует, что в некоторой окрестности точки (t_0, v_0) уравнение (5) определяет $v(t)$ как однозначную и непрерывно дифференцируемую функцию переменной t , которая является решением задачи Коши (9), (11). Лемма доказана.

Исследуем множество критических (нерегулярных) точек $(t, v) \in Z(F)$. Будем называть *точкой поворота* множества $Z(F)$ (см. [7]) любую критическую точку (t_p, v_p) , в которой

$$F'_t(t_p, v_p) \neq 0, \quad (14)$$

а производная функции $t(v)$, задаваемой уравнением (5) в окрестности этой точки, меняет знак. При переходе t через значение t_p происходит бифуркация: появляется или исчезает пара решений $v(t)$ уравнения (5). Все остальные критические точки будем называть *сингулярными* (см. [7]). Обозначим через $P(F)$ множество точек (t, v) , удовлетворяющих конечному уравнению (12).

ЛЕММА 2. *Множество критических точек $Z(F)$ совпадает с множеством $Z(F) \cap P(F)$. При $\alpha = \beta$ оно содержит единственную сингулярную точку $S = (-e/\beta, \beta/e)$. При $\alpha \neq \beta$ сингулярных точек нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (14) следует, что (t_p, v_p) не является решением уравнения

$$1 + vt = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (12) и (15) имеет только одно общее решение $S = (-e/\beta, \beta/e)$. Подставляя его в конечное уравнение (5), получаем, что $\beta/\alpha = 1$, т.е. сингулярная точка S принадлежит множеству $Z(F)$ только в случае $\alpha = \beta$. Если $Z(F) \cap P(F) \setminus \{S\} \neq \emptyset$, то из отрицательности $t''(v)$ в любой точке $(t_1, v_1) \in Z(F) \cap P(F) \setminus \{S\}$ следует, что (t_1, v_1) является точкой локального максимума для функции $t(v)$ и точкой поворота для множества $Z(F)$. Лемма доказана.

Рассмотрим подробнее множество $P(F)$. Частные производные функции $D(t, v)$ имеют вид

$$D'_v(t, v) = -\beta t^2 e^{vt}(1 + vt), \quad D'_t(t, v) = -\beta v t e^{vt}(2 + vt).$$

Точки из $P(F)$, в которых $D'_v \neq 0$, т.е. не выполняется равенство (15), являются регулярными для $P(F)$. В окрестности любой такой точки уравнение (12) определяет непрерывно дифференцируемую функцию $v = v(t)$. Единственной точкой из $P(F)$, не удовлетворяющей этому условию, является точка S . Она является точкой поворота для $P(F)$ и точкой локального максимума для функции $t(v)$, задаваемой уравнением (12) в окрестности S , так как справедливы соотношения $D'_t(t, v)|_S \neq 0$, $t''(v)|_S < 0$. Функция $v(t)$ имеет точку глобального максимума $t_m = e^2/(2\beta)$, в которой достигает значения $v_m = 4\beta e^{-2}$, и других точек экстремума она не имеет.

Для дальнейшего доказательства важной является геометрическая структура множеств $Z(F)$ и $P(F)$. Критические точки разбивают эти множества на ветви решений уравнений (5) и (12) соответственно (см. [7]). Каждая ветвь состоит из регулярных точек и определяет однозначную гладкую зависимость $v(t)$. Иначе говоря, ветви – компоненты связности множества регулярных точек. Если решение уравнения на какой-либо области состоит из двух непересекающихся ветвей, то будем называть их в соответствии с расположением на плоскости *верхней* и *нижней* ветвями.

Изучим поведение линии, состоящей из точек множества $P(F)$, при $t \rightarrow -\infty$. Введем параметр $w = vt < 0$. Тогда уравнение (12) приводится к виду $1 - \beta t w e^w = 0$, а линия $P(F)$ задается параметрически: $t = (\beta w e^w)^{-1}$, $v = \beta w^2 e^w$. Очевидно, что $t \rightarrow -\infty$, если $w \rightarrow -0$ либо $w \rightarrow -\infty$. В обоих случаях $v \rightarrow +0$.

Таким образом, мы показали, что линия $P(F)$ состоит из двух непересекающихся ветвей, определяющих гладкую зависимость $v(t)$ на полуоси $(-\infty, -e/\beta)$ и точки поворота S . Функция $v(t)$ достигает глобального максимума на верхней ветви и монотонно возрастает на нижней. При этом на обеих ветвях $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Полученное означает, что при $t \in (-e/\beta, 0)$ множество $Z(F)$ не имеет критических точек; следовательно, уравнение (5) определяет $v(t)$ на этом интервале как однозначную непрерывно дифференцируемую функцию.

Как ранее было отмечено, гипербола (15) пересекает $P(F)$ только в точке S , где имеет конечный положительный угловой коэффициент. Отсюда следует, что эта гипербола находится между верхней и нижней ветвями $P(F)$ при $t < -e/\beta$. Из дифференциального уравнения (9) видно, что гипербола (15) и линия $P(F)$ разбивают полуполосу $\{(t, v) : -\infty < t < 0, 0 < v < \alpha\}$ на четыре области монотонности функции $v(t)$, удовлетворяющей уравнению (5):

$$d_1 = \{(t, v) : 1 + vt > 0, 1 - \beta vt^2 e^{vt} > 0\},$$

$$d_2 = \{(t, v) : 1 + vt < 0, 1 - \beta vt^2 e^{vt} > 0\},$$

$$d_3 = \{(t, v) : 1 + vt < 0, 1 - \beta vt^2 e^{vt} < 0\},$$

$$d_4 = \{(t, v) : 1 + vt > 0, 1 - \beta vt^2 e^{vt} < 0\}.$$

В областях d_1 и d_3 функция $v(t)$ монотонно возрастает, а в областях d_2 и d_4 монотонно убывает.

Исследуем множество $Z(F)$ при $\alpha = \beta$ в окрестности сингулярной точки и за ее пределами.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда множество точек $(t, v) \in Z(F)$ состоит из одной ветви при $t \in (-e/\beta, 0)$ и трех непересекающихся ветвей, выходящих из точки $S = (-e/\beta, \beta/e)$, при $t \in (-\infty, -e/\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $F(t, v)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $S = (t_s, v_s) = (-e/\beta, \beta/e)$. Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}[A(v - v_s)^2 + 2B(v - v_s)(t - t_s) + C(t - t_s)^2] + o[(v - v_s)^2 + (t - t_s)^2] = 0,$$

где $A = F''_{vv}(t_s, v_s) = 0$, $B = F''_{vt}(t_s, v_s) = F''_{tv}(t_s, v_s) = \beta/e$, $C = F''_{tt}(t_s, v_s) = -\beta^3 e^{-3}$. Пусть $v \neq v_s$. Разделим обе части этого уравнения на $(v - v_s)^2$ и осуществим предельный переход $(t, v) \rightarrow (t_s, v_s)$ при $(t, v) \in Z(F)$. Получим уравнение

$$C \left(\frac{dt}{dv} \right)^2 + 2B \frac{dt}{dv} + A = 0,$$

из которого можно заключить, что либо $t'(v) = 0$, либо $t'(v) = 2e^2 \beta^{-2}$. Отсюда следует, что множество $Z(F)$ в окрестности сингулярной точки S состоит из двух пересекающихся дуг. Одна из них имеет в этой точке вертикальную касательную, так что точка S

является точкой поворота для этой дуги (точкой максимума для $t(v)$), а вторая имеет касательную с угловым коэффициентом $k = 2e^2\beta^{-2}$ и при $t > -e/\beta$ совпадает с графиком единственного решения $v(t)$ уравнения (5). В точке S имеет место бифуркация типа “вилка” (см. [7]). Из свойств полученных дуг следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $t \in (-e/\beta - \varepsilon, -e/\beta)$ множество $Z(F)$ состоит из трех непересекающихся ветвей, выходящих из точки S , причем верхняя и нижняя ветви имеют гладкое соединение в точке S с вертикальной касательной и находятся в областях d_2 и d_1 соответственно, а средняя находится в области d_3 .

Рассмотрим задачу Коши (9), (11) с начальной точкой (t_0, v_0) на верхней ветви множества $Z(F)$. По лемме 1 решение $v(t)$ этой задачи единственно в некоторой окрестности точки $t_0 \in (-e/\beta - \varepsilon, -e/\beta)$ и удовлетворяет уравнению (5). При продолжении влево ее график не пересечет линию $P(F)$. Докажем последнее утверждение.

Пусть график продолжения решения пересекает $P(F)$. По лемме 2 общая для $Z(F)$ и $P(F) \setminus \{S\}$ точка является точкой поворота. Но для любой точки поворота (t_p, v_p) можно указать $\delta > 0$ такое, что прямоугольник $\{(t, v) : t_p < t < t_p + \delta, v_p - \delta < v < v_p + \delta\}$ не будет содержать точек из $Z(F)$. А это приводит к противоречию: в точку поворота (t_p, v_p) график продолжения решения задачи Коши может попасть только через этот прямоугольник, что и завершает доказательство утверждения.

Из доказанного следует, что существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $D(t, v) > \delta_1$ при $t \in (-\infty, t_0)$, а это значит, что правая часть уравнения (9) имеет ограниченную производную по v на интервале $(-\infty, t_0)$ и, следовательно, решение задачи Коши можно продолжить на всю отрицательную полуось. Аналогично можно доказать, что средняя и нижняя ветви $Z(F)$ продолжимы на всю отрицательную полуось. Заметим также, что $Z(F)$ имеет только одну общую точку S с гиперболой (15) и, значит, средняя ветвь $Z(F)$ всегда остается в области d_3 . На средней и нижней ветвях $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Докажем, что на верхней ветви $v(t) \rightarrow \alpha$ при $t \rightarrow -\infty$.

Нижнюю и верхнюю ветви $Z(F)$ можно получить как пределы последовательностей (6) и (7) соответственно, так как $Z(F)$ является множеством неподвижных точек отображения (8). При $\alpha = \beta$ справедливы соотношения $v_{2k}(t) = \alpha e^{v_{2k-1}(t)}$, $k = 1, 2, \dots$, а поскольку

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{2k-1}(t) = 0,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{2k}(t) = \alpha.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\alpha > \beta$. График решения задачи Коши (9), (10) не имеет общих точек с множеством $P(F)$, так как он изначально расположен выше графика решения дифференциального уравнения (9) с вырожденным начальным условием $v(0) = \alpha_0 = \beta$ и не пересекает его ни в одной регулярной точке. В противном случае нарушилась бы единственность решения задачи Коши в точке пересечения. Заметим, что в силу леммы 2 решение задачи Коши (9), (10) не может попасть в сингулярную точку S . Отделенность продолжения решения задачи Коши (9), (10) от множества $P(F)$ означает возможность этого продолжения на всю отрицательную полуось. Полученное продолжение удовлетворяет конечному уравнению (5) и является пределом последовательности (7).

Аналогично рассматривается случай $\alpha < \beta$. Полученное при этом продолжение является пределом последовательности (6), что и завершает доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Построенное продолжение функции $v_\infty(t)$ является пределом последовательности (6) при $0 < \alpha < \beta$ и последовательности (7) при $\alpha > \beta > 0$, т.е. является частичным пределом последовательности экспонент конечной кратности (3).

Из леммы 3 следует, что при $\alpha = \beta > 0$ функция $v_\infty(t)$ не имеет гладкого продолжения, являющегося предельной функцией последовательности (3) экспонент конечной кратности, за пределы отрезка $[e/\beta, (e\beta)^{-1}]$. Однако существуют два различных непрерывных продолжения этой функции на множество $\{t : t < (e\beta)^{-1}\}$, одно из которых является пределом последовательности (6), а другое – пределом последовательности (7) экспонент конечной кратности. Это объясняет причину осцилляции последовательности (3) вне области сходимости, установленной Эйлером, при наличии частичных пределов.

Оказывается, что и при $\alpha \neq \beta$ область существования экспоненты бесконечной кратности остается конечным интервалом, хотя и существенно расширяется.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \neq \beta$. Тогда существуют числа $T > e/\beta$ и $V \in (0, \alpha)$ такие, что множество точек $(t, v) \in Z(F)$ состоит из одной ветви при $t \in (-T, 0)$ и трех непересекающихся ветвей, выходящих из точки $(-T, V)$, при $t \in (-\infty, -T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу Коши (9), (11) при условии, что точка (t_0, v_0) является регулярной и лежит в области o_1 между средней и верхней или в области o_2 между средней и нижней ветвями решения уравнения (5) при $\alpha = \beta$. Ее решение удовлетворяет уравнению (13). Введем обозначение

$$\alpha_1 = v_0 e^{-\beta t_0} e^{v_0 t_0}.$$

Тогда уравнение (13) совпадет с уравнением (5) при $\alpha = \alpha_1$. Пользуясь такими же рассуждениями, как в доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что решение задачи Коши продолжается влево на область $(-\infty, t_0)$ и вправо до некоторой точки $(-T, V)$, которая является точкой поворота $Z(F)$ при $\alpha = \alpha_1$, единственным образом. При этом $T = T(\alpha_1, \beta) > e/\beta$, $V = V(\alpha_1, \beta) \in (0, \alpha_1)$. В этой точке из $P(F)$ гладко соединяются две ветви решения уравнения (5). Вторая ветвь также существует на всей области $(-\infty, -T)$. Точка поворота однозначно определяет значение α_1 для линии, состоящей из этих ветвей и образующей отдельную компоненту связности $Z(F)$. Другой компонентой связности является график продолжения решения задачи Коши (9), (10) на отрицательную полуось.

Непрерывно дифференцируемая функция $\alpha_1(v_0)$ достигает своего минимума на верхней ветви множества $P(F)$ и максимума – на нижней. Следовательно, $\alpha_1 > \beta$ в области o_2 и $\alpha_1 < \beta$ в области o_1 .

Пусть $\alpha_1 < \beta$. Поскольку графики решений задачи Коши (9), (11) при различных начальных условиях не могут пересекаться в регулярной точке, то из графиков двух решений с разными α_1 точка поворота левее у того, у которого α_1 меньше. Значение α_1 в точке (t_0, v_0) на $P(F)$ задается формулой $\alpha_1 = v_0 e^{-1/(v_0 t_0)}$. В предыдущей теореме

мы доказали, что если на верхней ветви $P(F)$ $t \rightarrow -\infty$, то $v \rightarrow +0$ и $vt \rightarrow -\infty$. Следовательно, $\alpha_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ на этой ветви, а это значит, что при фиксированном β для любого $\alpha < \beta$ найдется точка $T(\alpha, \beta) > 0$ такая, что на интервале $(-T, 0)$ множество $Z(F)$ состоит из одной ветви, а на интервале $(-\infty, -T)$ – из трех ветвей. Верхняя и средняя ветви выходят из одной точки поворота $(-T, V)$. Нижняя ветвь является пределом последовательности (6), а верхняя – пределом последовательности (7).

В случае $\alpha_1 > \beta$ доказательство сводится к предыдущему, так как с точки зрения сходимости последовательности (3) параметры α и β эквивалентны. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ область существования экспоненты бесконечной кратности (4) ограничена.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых $\beta > 0$ и $T > 0$ можно подобрать $\alpha > 0$ такое, что экспонента бесконечной кратности (4) будет существовать на интервале $(-T, L)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ экспонента бесконечной кратности (4) имеет бесконечно много разрывных продолжений, являющихся предельными функциями последовательности (3) экспонент конечной кратности, на область $(-\infty, L)$.

В случае, когда параметры α и β имеют разные знаки, удастся доказать глобальное существование экспоненты бесконечной кратности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha\beta < 0$. Тогда экспонента бесконечной кратности (4) существует на всей числовой оси и является непрерывно дифференцируемой ограниченной функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем решение задачи Коши (9), (10) при $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Лемма 1 в этом случае остается в силе. Уравнение (12) не имеет решения. Решение $v(t)$ уравнения (5) ограничено константой α при $t > 0$ и функцией $f = \alpha e^{\beta t}$ при $t < 0$. Следовательно, существует единственное продолжение решения задачи Коши на всю числовую ось. Все точки из $Z(F)$ регулярны, и конечное уравнение (5) определяет $v(t)$ как однозначную непрерывно дифференцируемую функцию на всей числовой прямой.

Отображение (8) является монотонно убывающим. К последовательности экспонент конечной кратности (3) добавим еще одну функцию $v_{-1} \equiv 0$. Заметим, что $v_0 = E(v_{-1})$. Тогда при любом $k = 0, 1, \dots$ справедливы соотношения $v_{2k-1} < v_{2k+1} < v_{2k+2} < v_{2k}$, из которых следует, что последовательность (6) монотонно возрастает и ограничена сверху функцией $v_0(t)$, а последовательность (7) монотонно убывает и ограничена снизу функцией $v_1(t)$. Отображение (8) при фиксированном t имеет одну неподвижную точку. Следовательно, последовательности (6) и (7) сходятся к одной и той же функции, являющейся экспонентой бесконечной кратности, на всей числовой прямой. Точка пересечения гиперболы (15) и графика экспоненты бесконечной кратности является точкой максимума для этой экспоненты.

Случай $\alpha < 0$, $\beta > 0$ рассматривается аналогично. Теорема 3 доказана.

Авторы выражают признательность А. П. Буланову за вызванный им интерес к данной задаче и за поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Буланов А. П. Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 49–78.
- [2] Knoebel A. Exponentials reiterated // Amer. Math. Monthly. 1981. V. 88. № 4. P. 235–252.
- [3] Буланов А. П. О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1998. С. 31.
- [4] Амбарцумян Г. А., Буробин А. В. О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 16.
- [5] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [6] Буланов А. П. О сходимости кратной степени, являющейся решением нелинейного дифференциального уравнения // Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева (16–22 июня 1997 г., г. Казань). Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1997. С. 40–41.
- [7] Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.

Обнинский институт атомной энергетики
E-mail: zokhaik@mail.ru, avbur@chat.ru

Поступило
12.10.2000