Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Асимметрично разложимые абелевы группы, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:28:48

АСИММЕТРИЧНО РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

И. В. Протасов

Бесконечную абелеву группу G назовем *асимметрично разложимой*, если существует такое разбиение группы G на два подмножества A_1, A_2 , что $(g + S) \cap A_1 \neq \emptyset$, $(g + S) \cap A_2 \neq \emptyset$ для любого элемента $g \in G$ и бесконечного симметричного подмножества $S \subseteq G$. Подмножество S *симметрично*, если $S = -S$. Цель заметки – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Группа G асимметрично разложима тогда и только тогда, когда G принадлежит одному из двух классов групп:*

- (1) *счетные периодические группы с конечным числом элементов порядка 2;*
- (2) *$\mathbb{Z} \times K$, где K – конечная группа.*

Сначала введем некоторые определения и обозначения. Фиксируем разбиение $G = A_1 \cup A_2$ произвольной бесконечной группы G . Два элемента группы назовем одноцветными, если они принадлежат одному подмножеству разбиения. Подмножество группы одноцветно, если оно содержится в одном из подмножеств разбиения. Элементы $g_1, g_1 \in G$ симметричны относительно элемента $a \in G$, если $g_1 + g_2 = 2a$. Для элемента $a \in G$ и подмножества $A \subseteq G$ положим

$$S(a) = \{g \in G, 2a - g - \text{одноцветные элементы}\},$$

$$S(A) = \cup \{S(a) : a \in A\}.$$

Доказательство теоремы составим из следующих утверждений.

1. *Если $g \notin S(0)$ и $g \notin (-S(a))$, то элементы $g, g + 2a$ одноцветны.*

Пусть для определенности $g \in A_1$. Так как $g \notin S(0)$, то $(-g) \in A_2$. Поскольку $(-g) \notin S(a)$, то $2a + g \in A_1$.

2. *Пусть H – подгруппа группы G , порожденная некоторым подмножеством $A \subseteq G$, $2H = \{2h : h \in H\}$. Если $(g + 2H) \cap (S(0) \cup (-S(a))) = \emptyset$, то смежный класс $g + 2H$ одноцветный.*

Возьмем произвольный элемент $b \in g + 2H$ и индукцией по числу m покажем, что элементы b и $b + 2a_1 + \dots + 2a_m$ одноцветны для любых $a_1, \dots, a_m \in A$. Для $m = 1$ это следует из утверждения 1. Рассмотрим элемент $b + 2a_1 + \dots + 2a_m + 2a_{m+1}$. По предположению индукции элементы $b, b + 2a_1 + \dots + 2a_m$ одноцветны. Так как $b + 2a_1 + \dots + 2a_m \in g + 2H$ и $S(a_{m+1}) \subseteq S(A)$, то по условию $b + 2a_1 + \dots + 2a_m \notin (S(0) \cup (-S(a_{m+1})))$. Применяя утверждение 1, заключаем, что элементы $b + 2a_1 + \dots + 2a_m, b + 2a_1 + \dots + 2a_{m+1}$ одноцветны.

Произвольный элемент $c \in g + 2H$ представим в виде $c = g + 2a_1 + \dots + 2a_m - 2a'_1 - \dots - 2a'_k$, где $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_k \in A$. По доказанному выше пары элементов $g, g + 2a_1 + \dots + 2a_m$ и $c, c + 2a'_1 + \dots + 2a'_k$ одноцветны. Так как $g + 2a_1 + \dots + 2a_m = c + 2a'_1 + \dots + 2a'_k$, то элементы g и c одноцветны. Таким образом, все элементы смежного класса $g + 2H$ имеют тот же цвет, что и элемент g .

3. Если асимметрично разложимая группа G содержит бесконечную конечно порожденную подгруппу H , то факторгруппа G/H конечна.

Пусть $G = A_1 \cup A_2$ – асимметричное разбиение группы G . Очевидно, что подмножество $S(a)$ конечно для любого элемента $a \in G$. Поэтому конечно и подмножество $S(0) \cup (-S(A))$, где A – конечное множество образующих подгруппы H . Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Так как подгруппа $2H$ бесконечна, то смежный класс $g + 2H$ не может быть одноцветным. Из утверждения 2 следует, что $g \in ((S(0) \cup (-S(A))) + H)$.

4. Асимметрично разложимая группа содержит лишь конечное число элементов порядка 2.

Действительно, всякое подмножество группы, состоящее из элементов порядка 2, симметрично.

5. Асимметрично разложимая группа счетна.

Допустим противное и фиксируем асимметричное разбиение $A_1 \cup A_2$ несчетной группы G . Выделим счетную подгруппу H группы G . Так как подмножество $S(a)$ конечно для любого элемента $a \in G$, то подмножество $S(0) \cup (-S(H))$ счетно. Поскольку группа G несчетна, то найдется такой элемент $g \in G$, что $(S(0) \cup (-S(H))) \cap (g + 2H) = \emptyset$. По утверждению 2 смежный класс $g + 2H$ одноцветен, а по утверждению 4 подгруппа $2H$ бесконечна. Получили противоречие с тем, что $A_1 \cup A_2$ – асимметричное разбиение группы G .

6. Счетная периодическая группа G с конечным числом элементов порядка 2 асимметрично разложима.

Заметим, что факторгруппа G/H по любой конечной подгруппе H имеет лишь конечное число элементов порядка 2. Поэтому группу G можно представить в виде объединения такой возрастающей цепочки конечных подгрупп

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset G_{n+2} \subset \dots,$$

что G_{n+1}/G_n содержит все элементы порядка 2 группы G_{n+2}/G_n . Поэтому для подходящего подмножества $K_n \subset (G_{n+2} \setminus G_{n+1})$ существует следующее разложение подмножества $G_{n+2} \setminus G_{n+1}$ на смежные классы по подгруппе G_n :

$$G_{n+2} \setminus G_{n+1} = (K_n + G_n) \cup (-K_n + G_n).$$

Положим $A_1 = \{K_n + G_n : n < \omega\}$, $A_2 = G \setminus A_1$. Фиксируем произвольные элемент $g \in G$ и симметричное бесконечное подмножество $s \subseteq G$. Выберем такой номер m , что $g \in G_m$. Так как подмножество S бесконечно, а подгруппа G_m конечна, то найдется такой номер $n \geq m$, что $S \cap (G_{n+2} \setminus G_{n+1}) \neq \emptyset$. Пусть $a \in S \cap (G_{n+2} \setminus G_{n+1})$ и для определенности $a \in K_n + G_n$. Тогда $a + g \in K_n + G_n$ и $g + a \in A_1$. С другой стороны, $(-a) \in (-K_n + G_n)$ и $(-a + g) \in (-K_n + G_n)$. Значит, $g - a \in A_2$. Таким образом, $(g + S) \cap A_1 \neq \emptyset$ и $(g + S) \cap A_2 \neq \emptyset$.

7. Группа $G = \mathbb{Z} \times K$ асимметрично разложима для любой конечной группы K .

Элемент (z, a) группы G отнесем к подмножеству A_1 , если $z \geq 0$, и положим $A_2 = G \setminus A_1$. Фиксируем произвольные элемент $g = (z_0, a_0)$ группы G и бесконечное симметричное подмножество $S \subseteq G$. Так как группа K конечна, а подмножество S бесконечно, то найдется такой элемент $(z, a) \in S$, что $z + z_0 > 0$, $z_0 - z < 0$. Тогда $g + (z, a) \in A_1$, $g - (z, a) \in A_2$. Значит, $(g + S) \cap A_1 \neq \emptyset$, $(g + S) \cap A_2 \neq \emptyset$.

Завершим доказательство теоремы. Если асимметрично разложимая группа G содержит элемент бесконечного порядка, то G принадлежит классу (2) по утверждению 3. Периодическая асимметрично разложимая группа принадлежит классу (1) по утверждениям 4, 5. Асимметричная разложимость групп из классов (1), (2) вытекает из утверждений 6, 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого конечного разбиения бесконечной группы $G = A_1 \cup \dots \cup A_m$ и любого натурального числа n найдутся такие элемент $g \in G$ и конечное симметричное подмножество $S \subseteq G$, что $|S| > n$ и $g + S \subseteq A_i$ для некоторого $i \leq m$. Действительно, если группа G содержит бесконечную подгруппу конечной экспоненты, то по теореме Грэхема–Либа–Росчайльда [1] в одном из подмножеств разбиения содержится смежный класс по конечной подгруппе порядка $> n$. Если группа G содержит элемент бесконечного порядка, то применима теорема Ван дер Вардена об арифметических прогрессиях. Наконец, если порядки конечных циклических подгрупп группы G неограничены в совокупности, то также работает теорема Ван дер Вардена, но в следующей конечной форме. Для любых натуральных чисел k, m найдется такое натуральное число M , что при любом раскрашивании отрезка $\{1, \dots, M\}$ натуральных чисел в m цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любого разбиения бесконечной группы G на три подмножества $G = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ найдется такое бесконечное симметричное подмножество S , что $S \cap A_i = \emptyset$ для некоторого $i \leq 3$. Положим $A_{kj} = \{g \in G : g \in A_k, -g \in A_j\}$. Поскольку $A_{kj} = -A_{jk}$, то подмножество $A_{kj} \cup A_{jk}$ симметрично. Так как группа G бесконечна, то по крайней мере одно из этих подмножеств бесконечно. Выберем номер i , отличный от j, k . Тогда $(A_{kj} \cup A_{jk}) \cap A_i = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что бесконечную группу G можно разбить на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_m$ так, что $g + S \not\subseteq A_i$ для любых $i \leq m$, элемента $g \in G$ и бесконечного симметричного подмножества $S \subseteq G$. Наименьшее число m , для которого такое разбиение существует, обозначим $\nu(G)$. Положим $\nu(G) = \infty$, если конечного разбиения группы G с таким свойством не существует. Таким образом, $\nu(G)$ – это наименьшее число цветов, которыми можно раскрасить группу G так, чтобы не было бесконечных одноцветных подмножеств, симметричных относительно некоторого элемента группы. Заметим, что $\nu(G) > 1$ и $\nu(G) = 2$ тогда и только тогда, когда группа G асимметрично разложима. Автор располагает лишь следующей весьма скудной информацией о числах $\nu(G)$:

$$\nu(\mathbb{Z}^2) = 3, \quad \nu(\mathbb{Z}^n) \leq n + 1, \quad \nu(\mathbb{Q}^n) \leq 2(n + 1), \quad \nu(\mathbb{R}) > 3.$$

Таким образом, автору неизвестны даже числа $\nu(\mathbb{Z}^3)$, $\nu(\mathbb{Q})$, $\nu(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В статье [2] бесконечная группа G названа абсолютно разложимой, если ее можно разбить на два подмножества, плотные в любой недискретной групповой топологии на G . Очевидно, что любая асимметрично разложимая группа абсолютно разложима. Однако, класс абсолютно разложимых групп существенно шире класса асимметрично разложимых групп. Например, свободная группа любого ранга абсолютно разложима. Более того, не отвергнута гипотеза об абсолютной разложимости любой группы с конечным числом элементов порядка 2.

Киевский государственный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило
26.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грэхем Р. Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.
2. Comfort W. W., Van Mill J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1994, V. 120, № 3. P. 687–696.