Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Темирбулатов, Спектральная задача, связанная с P_1 -приближением по сферическим гармоникам для нестационарного односкоростного уравнения переноса, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 3, 472–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:13:06

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕМ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Н. С. Темирбулатов

1. Настоящая заметка посвящена исследованию спектральной краевой задачи с параметром в граничных условиях, полученной из P_1 -приближения по сферическим гармоникам для нестационарного односкоростного уравнения переноса. Метод сферических гармоник является одним из эффективных методов при решении уравнения переноса численными методами, см., например, [1], [2].

Нестационарное уравнение переноса имеет следующий вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{\omega} \nabla \varphi + \sigma \varphi - \frac{\sigma s}{4\pi} \int_{\Omega} g(\omega, \omega') \varphi(t, \bar{r}, \bar{\omega}') d\omega' = f(t, \bar{r}, \bar{\omega}). \quad (1)$$

Ставится следующая смешанная задача: рассматривается уравнение (1) с начальными и граничными условиями вида

$$\varphi(0, \bar{r}, \bar{\omega}) = \Phi(\bar{r}, \bar{\omega}), \quad (2)$$

$$\varphi(t, \bar{r}, \bar{\omega}) = 0 \quad \text{при} \quad (\bar{n}, \bar{\omega}) < 0, \quad (t, \bar{r}) \in [0, \infty) \times \partial G, \quad (3)$$

в цилиндре $S = [0, \infty) \times G \times \Omega$, где G – выпуклая область в $\mathbb{R}^3$, Ω – единичная сфера, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к ∂G . Условие (3) означает отсутствие потока частиц через границу ∂G в область G со стороны вакуума.

Система уравнений P_1 -приближения сферическими гармониками задачи (1)–(3) имеет вид (см. вывод в [1])

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \nabla \varphi_1 + \sigma_0 \varphi_0 = f_0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \sigma_1 \bar{\varphi}_1 = \bar{f}_1, \end{cases} \quad (4)$$

$$(2\bar{\varphi}_1)\bar{n} - \varphi_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial G, \quad (5)$$

где $\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\varphi_i = \varphi_i(t, \bar{r})$, $i = 1, 2, 3$, $\sigma_m = \sigma - g_m \sigma_s$, g_m – коэффициенты разложения функции $g(\bar{\omega}, \bar{\omega}') = g(\mu_0)$, $\mu_0 = (\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, по полиномам Лежандра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Международного научного фонда.

Для удобства запишем систему в координатной форме. Продифференцируем первое уравнение по переменной t , а последующие три по переменным x_1, x_2, x_3 соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t \partial x_3} = \frac{\partial f_0}{\partial t} - \sigma_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} + \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t \partial x_3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2} + \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Просуммируем последние три уравнения и получим

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t \partial x_3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2} \right) + \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) = F_0. \quad (7)$$

Подставляя вместо первой и третьей скобок в уравнении (7) их выражения, полученные из (4) и (6), имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - a \Delta \varphi_0 + \gamma \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \beta \varphi_0 = F, \quad \text{где } a = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \sigma_0 + \sigma_1, \quad \beta = \sigma_0 \sigma_1.$$

Теперь сделаем соответствующие преобразования с граничным условием. Запишем второе уравнение в системе (4) для граничных точек, считая, что на границе нет источников, т.е. $\bar{f}_1 \equiv 0$,

$$-\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} + \frac{1}{3\sigma_1} \nabla \varphi_0 \quad \text{на } \partial G.$$

Подставим это выражение для φ_1 в условие (5)

$$\frac{2}{\sigma_1} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} \right)_{\bar{n}} \frac{2}{3\sigma_1} (\nabla \varphi_0)_{\bar{n}} + \varphi_0 = 0 \quad \text{на } \partial G. \quad (8)$$

Дифференцируя условие (5) по переменной t , имеем

$$2 \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial t} \right)_{\bar{n}} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \quad \text{на } \partial G. \quad (9)$$

Исключая переменные $\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ из (8) и (9), получаем условие

$$\sigma_1 \varphi_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + 2a \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{на } \partial G, \quad a = \frac{1}{3}.$$

Таким образом получено дифференциальное уравнение второго порядка относительно φ_0 с граничным условием на ∂G . Запишем соответствующую однородную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - a \Delta \varphi_0 + \gamma \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \beta \varphi_0 &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sigma_1 \varphi_0 + 2a \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{n}} &= 0 \quad \text{на } \partial G. \end{aligned}$$

Для уничтожения первой производной по переменной t произведем замену $u(x, t) = e^{\frac{1}{2}\gamma t} \varphi_0(x, t)$, а затем, разделяя переменные $u(x, t) = e^{\lambda t} y(x)$, приходим к спектральной задаче

$$\begin{aligned} -a \Delta y(x) + (\lambda^2 - \alpha^2) y(x) &= 0, \\ (\lambda + \alpha) y(x) + 2a \frac{\partial y}{\partial \bar{n}} &= 0 \quad \text{на } \partial G, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_0)$. В дальнейшем будем предполагать, что рассеяние частиц изотропно. Это означает, что $g(\mu_0) \equiv 1$, тогда $\sigma_0 = \sigma - \sigma_s$, $\sigma_1 = \sigma$, параметр $\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_0) = \frac{1}{2}\sigma_s \geq 0$.

2. Операторная постановка задачи. Пусть, далее, $H^l(G)$ – соболевские пространства функций $y(x) = y(x_1, x_2, x_3)$ в области G с нормой $\|y\|_l = \sum_{s=0}^l \|y^{(s)}\|_{L_2(G)}$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(G) \times L_2(\partial G)$ с элементами $\tilde{y} = (y(x), \varphi(x))$, $y(x) \in L_2(G)$, $\varphi(x) \in L_2(\partial G)$ и нормой $\|\tilde{y}\| = (\|y\|_{L_2(G)}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_2(\partial G)}^2)^{1/2}$ определим операторы A, B, C, R как

$$\begin{aligned} A\tilde{y} &= (y(x), 0), \quad B\tilde{y} = (0, \varphi(x)), \quad R\tilde{y} = (-\alpha^2 y(x), \alpha \varphi(x)), \\ C\tilde{y} &= \left(-a \Delta y(x), 2a \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}\right), \quad D(A) = D(B) = D(R) = \mathcal{H}, \\ D(C) &= \left\{ \tilde{y} \in \mathcal{H} \mid \tilde{y} = (y(x), y(x)|_{\partial G}), y(x) \in H^2(G) \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. *Спектральная задача (10) эквивалентна задаче на собственное значение (СЗ) и собственную функцию (СФ) для квадратичного операторного пучка $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C + R$, действующего в пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения $D(L(\lambda)) = D(C)$ и удовлетворяющего следующим условиям.*

- 1) Оператор C неотрицателен и существенно самосопряжен, причем $(\bar{C} + I)^{-1} \in \mathcal{S}_p$ при $p > 1$, где $\bar{C}$ – замыкание оператора C . Операторы A, B, R – ограниченные самосопряженные в пространстве $\mathcal{H}$.
- 2) Для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Omega_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus S_\varepsilon$ комплексной плоскости, где S_ε – набор секторов раствора ε , биссектрисами которых являются лучи $e^{\pm \frac{\pi}{2}it}$ (т.е. $\pm it$), $t > 0$, задача (10) является эллиптической с параметром в смысле Аграновича–Вишика [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим квадратичную форму оператора C . Для любых $\tilde{v}, \tilde{g} \in D(C)$ имеет место тождество

$$(C\tilde{v}, \tilde{g}) = \int_G -a\Delta v \bar{g} dx + \int_{\partial G} a \frac{\partial v}{\partial n} \bar{g} ds = a \int_G (\nabla v, \nabla \bar{g}) dx.$$

Тогда при любых $\tilde{v} \in D(C)$ $(C\tilde{v}, \tilde{v}) = a \sum_{i=1}^3 \|D_i v\|_{L_2(G)}^2 \geq 0$, так как $a = \frac{1}{3}$.

Легко понять, что $D(C)$ плотно в $\mathcal{H}$. Итак, оператор C симметричен и неотрицателен. Следовательно, ядро спектра оператора C лежит на $\mathbb{R}^+$, а точки $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ принадлежат его полю регулярности. Рассмотрим любую точку из поля регулярности, например, $\mu = -1$. Оператор $C + I$ отображает $H^2(G) \times H^{3/2}(\partial G) \rightarrow L_2(G) \times H^{1/2}(\partial G)$. Поэтому он не может быть ограниченно обратимым в пространстве $\mathcal{H}$ и оператор C не является самосопряженным. В работе [4] показано, что $\overline{C} = \overline{C}^*$, т.е. оператор C существенно самосопряжен.

Остальные утверждения теоремы доказываются как в работе [5].

Из условия 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [6, гл. 1] следует дискретность спектра пучка $L(\lambda)$. Пусть $(\lambda, \tilde{y})$ – собственная пара. Рассмотрим квадратичную форму пучка

$$\begin{aligned} (L(\lambda)\tilde{y}, \tilde{y}) &= (A\tilde{y}, \tilde{y})\lambda^2 + (B\tilde{y}, \tilde{y})\lambda + (C\tilde{y}, \tilde{y}) + (R\tilde{y}, \tilde{y}) \\ &= (t^2 - \tau^2)(A\tilde{y}, \tilde{y}) + t(B\tilde{y}, \tilde{y}) + (C\tilde{y}, \tilde{y}) \\ &\quad + (R\tilde{y}, \tilde{y}) + i\tau[(B\tilde{y}, \tilde{y}) + 2t(A\tilde{y}, \tilde{y})] = 0, \end{aligned}$$

где $\lambda = t + i\tau$.

1) $\text{Im}(L(\lambda)\tilde{y}, \tilde{y}) = i\tau[\frac{1}{2}\|y\|_{L_2(G)}^2 + 2t\|y\|_{L_2(\partial G)}^2]$. Следовательно, если $t > 0$, то $\tau = 0$.

Пусть $t > 0$, тогда

2) $\text{Re}(L(\lambda)\tilde{y}, \tilde{y}) = (t^2 - \alpha^2)\frac{1}{2}\|y\|_{L_2(G)}^2 + (2t + \alpha)\frac{1}{2}\|y\|_{L_2(\partial G)}^2 > 0$, если $t > \alpha$, и поэтому нет СЗ в области $t > \alpha$.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр задачи (10) дискретный, состоит из СЗ конечной кратности, симметрично расположенных относительно вещественной оси. В правой открытой полуплоскости СЗ задачи действительные и лежат на отрезке $[0, \sigma s/2]$, а в левой полуплоскости, за исключением конечного числа точек, находятся в произвольно малых углах, примыкающих к мнимой оси.*

Теперь сформулируем теорему о полноте и минимальности.

В пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ рассмотрим производные по Келдышу цепочки элементов $\hat{y}_j^h = \{\tilde{y}_j^h, \lambda_j \tilde{y}_j^h + \tilde{y}_j^{h-1}\}$, построенные по канонической системе СПЭ задачи (10). Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Система всех элементов $Y_1 = \{y_k^h, \lambda_k y_k^h + y_k^{h-1}\}$, где y_k^h – первая компонента элементов $\tilde{y}_k^h$, полна и минимальна в пространстве $H^1(G) \times L_2(G)$.*

Система $Y_2 = \{\tilde{y}_k^h, \lambda_k \tilde{y}_k^h + \tilde{y}_k^{h-1}\} = \{y_k^h, y_k^h|_{\partial G}, \lambda_k y_k^h + y_k^{h-1}\}$ полна и минимальна в пространстве $L_2(G) \times L_2(\partial G) \times L_2(G)$.

Доказательство проводится как в работе [5], лишь с разницей, что вместо расширения по Фридрихсу, в нашем случае надо рассматривать замыкание оператора S .

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность своему научному руководителю Шкаликову А. А., а также Акишеву А. Ш., который обратил внимание автора на спектральные задачи, связанные с P -приближениями уравнения переноса.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
06.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.
2. Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.
3. Агранович М. С., Вишик М. И. // УМН. 1964. Т. 19. № 3.
4. Ercolano J., Schechter M. // Comm. Pure and Appl. Math. 1965. V. 18. № 1.
5. Шкаликов А. А., Шкред А. В. // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 8.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.