Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Алиев, А. Х. Ханмамедов, Энергетические
оценки решений смешанной задачи для линейно-
го гиперболического уравнения второго порядка,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 4, 483–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1743>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:44:59

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Б. Алиев, А. Х. Ханмамедов

В настоящей заметке рассматривается смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка с антидиссипацией внутри области и с диссипацией на части границы. Доказывается, что при определенных соотношениях между антидиссипацией внутри области и диссипацией на части границы энергия системы экспоненциально убывает, а при достаточно большой антидиссипации внутри области граничная диссипация никак не влияет на энергию системы, и последняя в этом случае остается неограниченной.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть Π — n -мерный открытый единичный куб. Через $x'_{r,i}$ обозначим точку $(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n)$, а через Π'_i — $(n-1)$ -мерный куб, который состоит из множества точек $x'_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, где $0 \leq x_j \leq 1, j = \overline{1, n}, j \neq i$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$u_{tt}(t, x) - \beta u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Pi, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t, x'_{0,i}) &= 0 \\ \alpha u_{x_i}(t, x'_{1,i}) + u_t(t, x'_{1,t}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad t > 0, \quad x'_i \in \Pi'_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Pi, \quad (3)$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$ и $u_0(x), u_1(x)$ — заданные функции.

Пусть ${}_0H^k$ — подпространство функций, принадлежащих пространству Соболева $W_2^k(\Pi)$ и равных нулю в точках $x'_{0,i}$ ($i = \overline{1, n}$). Введем также пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= {}_0H^1 \times L_2(\Pi), \\ \mathcal{H}_\alpha^1 &= \{(u, v) \mid (u, v) \in {}_0H^2 \times {}_0H^1, \\ &\quad \alpha u_{x_i}(x'_{1,i}) + v(x'_{1,i}) = 0, \quad x'_i \in \Pi'_i, \quad i = \overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

В пространстве $\mathcal{H}$ определим линейный замкнутый оператор $A_{\alpha,\beta}$ следующими равенствами

$$\begin{cases} D(A_{\alpha,\beta}) = \mathcal{H}_\alpha^1, \\ A_{\alpha,\beta} w = (v, \Delta u + \beta v), \quad w = (u, v) \in D(A_{\alpha,\beta}), \end{cases}$$

Заменой $\theta_1 = u$, $\theta_2 = u_t$ задача (1)–(3) сводится к задаче

$$\theta_t(t) = A_{\alpha,\beta} \theta(t), \quad (4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (5)$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_0 = (u_0, u_1)$.

Нетрудно видеть, что $A_{\alpha,\beta} - \beta I$ – максимально диссипативный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ [1, с. 107]. Тогда, используя [1, с. 112], получим, что оператор $A_{\alpha,\beta}$ порождает сильно непрерывную полугруппу. Обозначим ее через $U_{\alpha,\beta}(t)$.

Определим число β_0 , зависящее от данных задачи, следующим образом

$$\beta_0 = \min \left\{ \frac{-4n + 1 + \sqrt{(4n-1)^2 + 8}}{2}, \frac{2\alpha}{n\alpha^2 + (n+1)\alpha + n} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\beta < \beta_0$, то существуют такие $c(\alpha, \beta) > 0$ и $\delta(\alpha, \beta) > 0$, что при любых $\varphi \in \mathcal{H}$ и $t \geq 0$

$$\|U_{\alpha,\beta}(t)\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq c(\alpha, \beta) \exp(-\delta(\alpha, \beta)t) \|\varphi\|_{\mathcal{H}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_\alpha^1$. Обе части (1) умножим на $u_t + \mu_0 u + \mu \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$ ($\mu, \mu_0 > 0$) и проинтегрируем по области Π [2], [3]. Тогда, после несложных преобразований, получим следующее тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_{x_i}^2(t, x) dx \right. \\ & + \mu \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} x_i u_t(t, x) u_{x_i}(t, x) dx + \mu_0 \int_{\Pi} u(t, x) u_t(t, x) dx \\ & \left. - \frac{1}{2} \beta \mu_0 \int_{\Pi} u^2(t, x) dx + \frac{1}{2\alpha} \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u^2(t, x'_{1,i}) dx'_i \right] \\ & + \left[-\beta \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx + \frac{1}{2} \mu n \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx \right. \\ & - \mu \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} x_i u_t(t, x) u_{x_i}(t, x) dx + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_{x_i}^2(t, x) dx \\ & \left. - \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\Pi} u_{x_j}^2(t, x) dx - \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_{x_i}^2(t, x) dx \Big] + \Big[- \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u_t(t, x'_{1,i}) u_{x_i}(t, x'_{1,i}) dx'_i \\
& - \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u_t^2(t, x'_{1,i}) dx'_i - \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u_{x_i}^2(t, x'_{1,i}) dx'_i \\
& + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\Pi'_i} u_{x_j}^2(t, x'_{1,i}) dx'_i \\
& - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\Pi'_j} x_i u_{x_i}(t, x'_{1,j}) u_{x_j}(t, x'_{1,i}) dx'_j \Big] = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Квадратные скобки обозначим соответственно через $E(t), F(t), G(t)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
F(t) \geq & \left(\frac{1}{2} \mu n - \beta - \mu_0 - \frac{1}{2} \beta \mu n \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx \right. \\
& \left. + \left(\mu_0 - \frac{1}{2} \beta \mu - \frac{1}{2} \mu(n-2) \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_{x_i}^2(t, x) dx, \right.
\end{aligned} \tag{8}$$

$$G(t) \geq \left(\alpha - \frac{1}{2} \mu \alpha^2 - \frac{1}{2} \mu n \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u_{x_i}^2(t, x'_{1,i}) dx'_i. \tag{9}$$

ЛЕММА 1. Если $\beta < \beta_0$, то найдутся $\mu > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что

$$\alpha - \frac{1}{2} \mu \alpha^2 - \frac{1}{2} \mu n \geq 0, \tag{10}$$

$$\mu_0 - \frac{1}{2} \beta \mu - \frac{1}{2} \mu(n-2) > 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} \mu n - \beta - \mu_0 - \frac{1}{2} \beta \mu n > 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu n - \frac{1}{2} \mu_0 > 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu_0(1 + \beta) > 0. \tag{14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции $f_i(\cdot)$ и $\varphi_i(\cdot)$ ($i = 1, 2$) следующим образом

$$f_1(s) = \frac{2s}{2-s(n+1)}, \quad f_2(s) = \min \left\{ \frac{2}{3n-2+s}, \frac{2\alpha}{\alpha^2+n} \right\},$$

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2} s(n-2+\beta),$$

$$\varphi_2(s) = \min \left\{ \frac{1}{2} s n (1-\beta) - \beta, 1 - s n, \frac{1-s}{1+\beta} \right\}.$$

Легко показать, что если $\beta < \beta_0$, то $f_1(\beta) < f_2(\beta)$ и при любых $\mu \in]f_1(\beta), f_2(\beta)[$, $\varphi_1(\mu) < \varphi_2(\mu)$. Кроме того, при любых $\mu \in]f_1(\beta), f_2(\beta)[$ и $\mu_0 \in]\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu)[$ выполняются неравенства (10)–(14).

Теперь вернемся к доказательству теоремы 1. Из (7)–(9) получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) + \left(\frac{1}{2}\mu n - \beta - \mu_0 - \frac{1}{2}\beta\mu n \right) \int_{\Pi} u_t^2(t, x) dx \\ + \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\beta\mu - \frac{1}{2}\mu(n-2) \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} u_{x_i}^2(t, x) dx \\ + \left(\alpha - \frac{1}{2}\mu\alpha^2 - \frac{1}{2}\mu n \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Pi'_i} u_{x_i}^2(t, x'_{1,i}) dx'_i \leq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Выберем μ и μ_0 таким образом, чтобы выполнялись неравенства (10)–(14). Тогда из (15) имеем

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{k_1}{k_2}E(t) \leq 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \min \left\{ \frac{1}{2}\mu n - \beta - \mu_0 - \frac{1}{2}\beta\mu n, \mu_0 - \frac{1}{2}\beta\mu - \frac{1}{2}\mu(n-2) \right\}, \\ k_2 &= \max \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu n + \frac{1}{2}\mu_0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2\alpha}\mu_0 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая (13), (14), из (16) получим (6).

В теореме 1 рассмотрен случай $\beta < \beta_0$. Оказывается, если $\beta > \beta_0$, то утверждение теоремы, вообще говоря, перестает быть справедливым. В нижеследующей теореме показывается, что если β больше определенного критического значения, то при любых положительных значениях α энергия системы неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\beta \geq 2\pi\sqrt{n}$, то каково бы ни было число $\alpha > 0$, для любых $M > 0$ и $\omega \in (0, \beta/2)$ существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, что

$$\|U_{\alpha, \beta}(t_n)\|_{L(\mathcal{H})} > M \exp(\omega t_n), \quad (17)$$

где $L(\mathcal{H})$ – пространство линейных непрерывных операторов в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем вести доказательство от противного. Допустим, что существуют такие $\alpha > 0$, $M > 0$ и $\omega \in (0, \beta/2)$, что

$$\|U_{\alpha, \beta}(t)\|_{L(\mathcal{H})} \leq M \exp(\omega t) \quad \forall t \geq 0.$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = B_{\alpha,\beta}\eta(t), \quad (18)$$

$$\eta(0) = \eta_0, \quad (19)$$

где $B_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta} - \omega_1 I$ и $\omega_1 \in (\omega, \beta/2)$. Если через $V_{\alpha,\beta}(t)$ обозначим полугруппу, порожденную задачей (18), (19), то получим

$$V_{\alpha,\beta}(t) = \exp(-\omega_1 t) U_{\alpha,\beta}(t). \quad (20)$$

Введем в пространстве $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение по формуле [1, с. 115]

$$[x, y] = \int_0^{+\infty} (U_{\alpha,\beta}(s)x, U_{\alpha,\beta}(s)y)_{\mathcal{H}} \exp(-\omega_1 s) ds.$$

Через $\|x\|_1 = \sqrt{[x, x]}$ обозначим соответствующую норму. Очевидно, что она не сильнее исходной нормы в $\mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что

$$\|U_{\alpha,\beta}(t)\varphi\|_1 \leq \exp(\omega_1 t) \|\varphi\|_1. \quad (21)$$

Учитывая (20) в (21), получим

$$\|V_{\alpha,\beta}(t)\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

Тогда, согласно [1, с. 110], для любого $\varphi \in D(B_{\alpha,\beta})$, имеем

$$[B_{\alpha,\beta}\varphi, \varphi] \leq 0.$$

Отсюда, для любого $\lambda > 0$ из [1, с. 107] следует

$$\|\varphi\|_1 \leq \frac{1}{\lambda} \|B_{\alpha,\beta}\varphi - \lambda\varphi\|_1. \quad (22)$$

С другой стороны, существует такое $\lambda \in (0, \beta - \omega_1)$, что уравнение

$$B_{\alpha,\beta}\varphi = \lambda\varphi \quad (23)$$

имеет нетривиальное решение. В самом деле, если взять $\varphi = (u, v) \in D(B_{\alpha,\beta}) = \mathcal{H}_\alpha^1$, то уравнение (23) эквивалентно задаче

$$\Delta u(x) + (\beta - \lambda_1 - \omega)(\lambda_1 + \omega)u(x) = 0, \quad x \in \Pi, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x'_{0,i}) &= 0, \\ \alpha u_{x_i}(x'_{1,i}) + (\lambda + \omega_1)u(x'_{1,i}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad x'_i \in \Pi'_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Введем обозначение:

$$K(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{n}(\beta - \lambda - \omega_1)(\lambda + \omega_1)}.$$

В интеграле $(0, \beta - \omega_1)$ уравнение

$$\alpha = -\frac{\lambda + \omega_1}{K(\lambda)} \operatorname{tg} K(\lambda)$$

имеет решение относительно λ , так как $K(\lambda)$ заполняет отрезок $[\pi/2, \pi]$. Это значит, что задача

$$\begin{aligned} \psi_{zz}(z) + K^2(\lambda)\psi(z) &= 0, \quad z \in (0, 1), \\ \psi(0) &= 0, \quad \alpha\psi_z(1) + (\lambda + \omega_1)\psi(1) = 0, \end{aligned}$$

имеет нетривиальное решение $\psi(z) = \sin K(\lambda)z$. Следовательно, задача (24), (25) имеет решение

$$u(x) = \prod_{i=1}^n \sin K(\lambda)x_i.$$

Итак, при некотором $\lambda \in (0, \beta - \omega_1)$ уравнение (23) имеет нетривиальное решение

$$\varphi = \left(\prod_{i=1}^n \sin K(\lambda)x_i, (\lambda + \omega_1) \prod_{i=1}^n \sin K(\lambda)x_i \right).$$

Так как (22) и (23) противоречат друг другу, то наше предположение неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно в одномерном случае $\beta_0 \leq 1/2$, а теорема 2 верна, когда $\beta \geq 2\pi$. Зазор между $1/2$ и 2π остается открытым.

Азербайджанский технический университет

Поступило
27.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [2] Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 1. С. 36–39.
- [3] Алиев А. Б. Смешанная задача с диссипацией на границе для квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 6. С. 1289–1292.