Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Аржанцева, А. Ю. Ольшанский, Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 489–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:27:26

ОБЩНОСТЬ КЛАССА ГРУПП, В КОТОРЫХ ПОДГРУППЫ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ПОРОЖДАЮЩИХ СВОБОДНЫ

Г. Н. Аржанцева, А. Ю. Ольшанский

0. Введение. Хорошо известно, что в фундаментальной группе ориентируемой замкнутой компактной поверхности рода g все подгруппы бесконечного индекса свободны. Отсюда следует, в частности, что в группе

$$S_g = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

с $2g$ порождающими всякая подгруппа с меньшим числом порождающих (не обязательно из множества $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$) свободна. В связи с этим второй автор ставил задачу нахождения условий на определяющие соотношения, при которых все подгруппы конечно определенной группы с “малым” числом порождающих свободны. Такие условия были найдены в работе В. С. Губы [1], рассматривавшего подгруппы с двумя порождающими. Кроме условия малого сокращения налагалось условие на “длинные 2-подслова” определяющих слов.

Для изучения групп со свободными k -порожденными подгруппами при $k > 2$ требовалось найти соответствующее обобщение последнего условия, что представлялось совсем не очевидным. Поэтому в [1] (а затем в [2, 11.75]) поднимался вопрос об “общности” класса m -порожденных групп, в которых любая $(m - 1)$ -порожденная подгруппа свободна. Эта задача решена в настоящей заметке.

При фиксированных числах m и n порождающих и определяющих соотношений соответственно мы называем подкласс C конечных копредставлений общим, если почти каждая группа с m порождающими и n соотношениями попадает в C , если только определяющие соотношения достаточно длинны. Нахождение общих свойств полезно хотя бы потому, что сочетание любого конечного числа общих свойств является опять-таки общим свойством групп.

Работа второго автора выполнена при поддержке Международного научно-го фонда, грант MID000, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-0101541.

Для уточнения формулировок рассмотрим групповой алфавит $X_m = \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\}$, где $m > 1$, и множество циклически приведенных слов $\{r_1, \dots, r_n\}$ в этом алфавите, имеющих длины $|r_i| \leq t$. Обозначим $N_{m,n,t}$ число всех копредставлений групп вида

$$G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1 = 1, \dots, r_n = 1 \rangle \quad (1)$$

с этим условием, а $N_{m,n,t}^f$ — число таких копредставлений, что любая $(m-1)$ -порожденная подгруппа в G свободна (а, кроме того, G действительно содержит свободные подгруппы любых конечных рангов).

ТЕОРЕМА 1. *Найдется число $c = c(m, n) > 0$ такое, что отношение $N_{m,n,t}^f / N_{m,n,t}$ больше $1 - \exp(-ct)$.*

Как следствие получается ответ на вопросы из [1] и [2, 11.75]. Именно, обозначим $N_d = N_d(m, n)$ число всех копредставлений групп вида (1) таких, что $|r_1| + \dots + |r_n| = d$, где r_i — циклически приведенное слово в алфавите X_m , а N_d^f — число таких копредставлений среди них, что любая $(m-1)$ -порожденная подгруппа в G свободна.

ТЕОРЕМА 2. *При любом $m > 1$ и любом фиксированном n*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{N_d^f}{N_d} = 1.$$

При решении основного вопроса вспомогательным инструментом служат размеченные графы. Очевидно, например, что любое слово от переменных $x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}$ может быть прочитано при обходе букета из трех циклов длины 1, изображенном на рис. 1.

Рис. 1.

Рис. 2.

Если же рассмотреть граф рис. 2, то, обходя его, можно прочесть сколь угодно длинные слова, например:

$$x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_3 x_1 \dots,$$

и число таких слов экспоненциально растет вместе с их длиной, но в то же время экспоненциально убывает с ростом ℓ их доля среди всех несократимых слов длины ℓ от трех переменных. (Слово x_3^2 или $x_1 x_2 x_1^{-1}$ уже не читаемо по этому графу.)

1. Размеченные графы и подгруппы. Пусть Γ – связный размеченный граф, т.е. конечный связный 1-комплекс, каждому ориентированному ребру e которого приписана метка $\varphi(e) = x$, где $x \in X_m$, причем $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1}$. Одну из вершин – o – считаем выделенной в Γ . Очевидно, что все слова, которые могут быть прочитаны на циклах графа Γ с началом (и концом) в вершине o , образуют подгруппу $H = H(\Gamma)$ свободной группы $F_m = F(X_m)$ с базисом X_m (хотя один и тот же элемент из H может быть представлен разными циклами из-за возможных сокращений).

Понятно, что $H(\Gamma)$ – гомоморфный образ фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma)$ при гомоморфизме, индуцированном размечающей функцией φ . Ясно также, что всякая конечно порожденная подгруппа $H \subset F_m$ может быть представлена таким образом. Достаточно выбрать в H какую-то систему порождающих $\{w_1, w_2, \dots\}$ и отождествить начальные вершины простых циклов с метками $w_1, w_2, \dots$ каждый. (Под меткой $\varphi(p)$ симплициального пути $p = e_1 \dots e_n$ понимается слово $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$.) О пользе такого задания подгруппы свободной группы см., например, [3].

Если G – m -порожденная группа, заданная копредставлением (1), то всякая ее подгруппа H также может быть задана некоторым графом Γ , – достаточно рассмотреть какой-то ее прообраз при естественном гомоморфизме $F_m \rightarrow G$.

Размеченный связный граф назовем приведенным, если в Γ нет вершины, из которой выходит два ребра с одинаковыми метками, и нет вершин валентности 1, кроме, может быть, отмеченной вершины o . Любой граф Γ , задающий подгруппу H , можно заменить приведенным (см., например, [3]) с помощью преобразований 1-го рода (склеивание пары ребер с общим началом и одинаковыми метками) и 2-го рода (удаление вершины степени 1 вместе с входящим в нее ребром).

Под дугой будем понимать далее такой путь p , все вершины которого, кроме, быть может, начальной p_- и конечной p_+ , отличны от выделенной вершины o и имеют валентность 2.

Для графа Γ , задающего подгруппу H в группе G с копредставлением (1), определим еще преобразование 3-го рода:

Присоединение дуги. Пусть вершины o_1 и o_2 в Γ соединены некоторым путем p таким, что $\varphi(p) \equiv w$, и слово w равно в G некоторому слову v . Присоединим тогда к Γ новый граф, состоящий из одной дуги q с меткой $\varphi(q) \equiv v$ и имеющий с Γ только $o_1 = q_-$ и $o_2 = q_+$ (начало и конец пути q) в качестве общих точек.

Обратное преобразование. Пусть q – некоторая дуга в Γ , $q_- = o_1$ и $q_+ = o_2$, причем вершины o_1 и o_2 можно соединить в Γ другим путем p , таким, что p и q не имеют общих неориентированных ребер, а $\varphi(p) = \varphi(q)$ в группе G . Тогда разрешается удалить из Γ все ребра и вершины пути q , кроме o_1 и o_2 .

ЛЕММА 1. Если граф Γ' получен из графа Γ с помощью нескольких

преобразований 1–3-го рода (или обратных), то он определяет в G ту же подгруппу, что и граф Γ .

Утверждение получается с помощью очевидного перебора возможных типов преобразований.

2. μ -читаемые слова. Пусть $m \geq 2$. Назовем непустое несократимое слово w длины ℓ в алфавите $X_m = \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\}$ μ -читаемым (или (μ, m) -читаемым) для некоторого μ , где $0 < \mu \leq 1$, если существует X_m -размеченный приведенный граф Γ со следующими свойствами:

- (а) число ребер этого графа не больше $\mu\ell$;
- (б) эйлерова характеристика графа Γ больше $1 - m$ (другими словами, $\pi_1(\Gamma)$ имеет ранг меньше m , т.е. в Γ меньше m независимых циклов);
- (с) слово w может быть прочитано на некотором пути графа Γ .

Без второго условия определение становится бессодержательным, так как любое слово от m переменных может быть прочитано на букете из m окружностей длины 1.

Оценим число μ -читаемых слов длины ℓ . Рассмотрим граф из определения μ -читаемого слова. Поскольку в нем не более одной вершины валентности 1, а эйлерова характеристика больше $1 - m$, число вершин валентности ≥ 3 не больше $2m - 3$. Из тех же соображений число максимальных дуг в Γ не больше $3m - 4$. Отсюда понятно, что число топологических типов графов ограничено некоторой константой $C(m)$.

Число возможных разбиений простых дуг графа определенного типа на $\leq \mu\ell$ ребер можно оценить сверху величиной

$$\sum_{1 \leq k \leq [\mu\ell]} \binom{3m + k - 5}{k - 1} \leq (\mu\ell)^{3(m-1)}.$$

Каждому из $\leq \mu\ell$ ребер приписывается одна из $2m$ букв, что можно сделать не более чем $(2m)^{\mu\ell}$ способами.

В итоге число размеченных графов из определения μ -читаемого слова меньше

$$C(m)(\mu\ell)^{3(m-1)}(2m)^{\mu\ell}. \quad (2)$$

Оценим далее число несократимых слов длины ℓ , которые читаются на данном графе Γ , начиная с произвольной вершины. Начальное ребро может быть выбрано $\leq 2\mu\ell$ способами. После прохождения каждого ребра имеется $\leq 2m - 2$ способов для продолжения пути, поскольку валентность каждой вершины не больше $2m - 1$ (следует из ограничения на эйлерову характеристику и наличия не более одной вершины валентности 1). Значит, на Γ можно прочитать не более $2\mu\ell(2m - 2)^{\ell-1}$ слов длины ℓ .

Вместе с (2) мы можем заключить, что число μ -читаемых слов длины ℓ не больше

$$2C(m)(\mu\ell)^{3m-2}(2m)^{\mu\ell}(2m-2)^{\ell-1}. \quad (3)$$

Пусть теперь

$$\mu < \log_{2m} \left(1 + \frac{1}{4(m-1)} \right). \quad (4)$$

Тогда из (3) вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *При условии (4) можно указать константу $k = k(\mu, m)$ такую, что число μ -читаемых слов длины ℓ в алфавите X_m меньше $k(2m - 3/2)^\ell$.*

3. Условие на определяющие слова. Рассмотрим в этом пункте (λ, μ) -условие на систему определяющих слов. При этом выберем $\lambda > 0$, а положительное μ — с условием (4).

Напомним (см. также [4]), что условие малого сокращения $C'(\lambda)$ на копредставление (1) означает, что если R — множество всех циклических перестановок слов $\{r_1, \dots, r_n\}$ и им обратных, то для различных $r, r' \in R$ длина общего начала слов r и r' меньше $\lambda \min(|r|, |r'|)$.

ЛЕММА 3. *Среди всех кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$ циклически несократимых слов, длины которых не больше t , доля тех, которые удовлетворяют условию $C'(\lambda)$, не меньше чем $1 - a(2m - 1)^{-\lambda t/5}$ при $t \geq a$, где $a = a(m, n, \lambda) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что число $N_{t,m}$ циклически несократимых слов длины $\leq t$ не меньше $(2m - 1)^{t-1}$, а, значит, число кортежей $N_{t,m,n}$, составленных из них, не меньше

$$(2m - 1)^{n(t-1)}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь циклически приведенное слово r такое, что $t/2 < |r| \leq t$, и допустим, что система $\{r\}$ не удовлетворяет условию $C'(\lambda)$. Легко видеть тогда, что в циклическом слове r найдутся два непересекающихся подслова u и v таких, что $u = v^{\pm 1}$ и $|u| \geq \lambda t/4$. Но число всех слов с этим ограничением меньше $3t^2(2m - 1)^{t-\lambda t/4}$. Отсюда число кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$ из слов длины $\leq t$, содержащих такое слово r , меньше $3nt^2(2m - 1)^{tn-\lambda t/4}$. Аналогично можно оценить сверху число кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$, составленных из циклически приведенных слов с длинами в промежутке $(t/2, t]$, таких, что для некоторых $i \neq j$ слова r_i и r_j имеют общее подслово длины $\geq \lambda t/2$. Достаточно взять оценку $3t^2(2m - 1)^{tn-\lambda t/2}$. Наконец, число слов длины $\leq t/2$ не больше $2m(2m - 1)^{t/2}$. Значит, число кортежей длины n , содержащих такие слова, меньше $2mn(2m - 1)^{t(n-1)+t/2}$. Складывая полученные оценки и относя сумму к $N_{t,m,n}$ (см. [5]), получаем утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под (λ, μ) -условием для кортежа $\{r_1, \dots, r_n\}$ циклически несократимых слов от m переменных будем понимать справедливость следующих ограничений:

- (а) кортеж $\{r_1, \dots, r_n\}$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$;
- (б) среди слов $r_1, \dots, r_n$ нет истинных степеней;
- (в) если w является циклическим подсловом некоторого r_i , $1 \leq i \leq n$, и $|w| \geq |r_i|/2$, то w не является μ -читаемым.

Число циклически несократимых слов r_i длины $\leq t$, имеющих вид s^d , не больше $(2m-1)^{t/d} \leq (2m-1)^{t/2}$, если $d \geq 2$. Суммируя по всем $d = 2, \dots, t$, $i = 1, \dots, n$ и имея в виду оценку (5), получаем, что число всех кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$ циклически несократимых слов длины $\leq t$, не удовлетворяющих условию (б), меньше

$$nt(2m-1)^{(n-1/2)t}. \quad (6)$$

ЛЕММА 4. Если μ удовлетворяет неравенству (4), то доля кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$ циклически приведенных слов в алфавите X_m с (λ, μ) -условием среди всех кортежей слов длины $\leq t$ не меньше $1 - \exp(-\alpha t)$ при всех $t > T = T(\mu, \lambda, m, n)$ для некоторого $\alpha = \alpha(\mu, \lambda, m, n) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим число кортежей, для которых нарушен пункт (в) (λ, μ) -условия для $i = 1$. Число таких слов r_1 по лемме 2 меньше

$$\sum_{1 \leq d \leq t} d \sum_{d/2 \leq \ell \leq d} k \left(2m - \frac{3}{2}\right)^\ell (2m-1)^{d-\ell} < 2kt^2 \left(2m - \frac{5}{4}\right)^t.$$

Значит, число кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$, где r_1 не удовлетворяет пункту (в), меньше $2kt^2(2m - 5/4)^t(2m-1)^{t(n-1)}$. Отсюда, а также из утверждения леммы 3 и оценок (5), (6), следует утверждение леммы.

4. Подгруппы с малым числом порождающих. Ввиду леммы 4, при доказательстве теорем достаточно доказать свободу подгрупп $s \leq (m-1)$ порождающими в любой группе G с (λ, μ) -условием для некоторых λ и μ с условием (4) соответственно. (При $t \leq T$ достаточно выбрать просто положительный параметр $s = s(m, n)$ достаточно малым, имея в виду, что $N_{m,n,t}^f \geq 1$, можно взять пустые слова $r_1, \dots, r_n$ в (1).) Пусть теперь

$$\lambda \leq \frac{\mu}{15m + 3\mu} < \frac{1}{6}. \quad (7)$$

Доказывая “от противного”, рассмотрим в G подгруппу H , минимальное число порождающих s которой $\leq m-1$. В этом случае размеченный граф Γ , задающий подгруппу H , имеет эйлерову характеристику $> 1-m$.

Будем считать, что граф Γ выбран с минимальным числом ребер. В частности, он является приведенным.

Предполагая, что H не свободна, имеем нетривиальный элемент в ядре естественного гомоморфизма $\pi_1(\Gamma) \rightarrow H$, т.е. в Γ есть цикл p , метка которого – тривиальное в G слово. При этом путь p редуцирован, т.е. не содержит подпутей вида ee^{-1} . В силу приведенности графа Γ слово $w \equiv \varphi(p)$ также приведено.

По лемме Гриндлингера для $C'(\lambda)$ -групп при $\lambda \leq 1/6$ (см. [4]), в w найдется подслово v , которое одновременно является подсловом циклической перестановки r некоторого определяющего слова $r_i^{\pm 1}$, причем $|v| > (1 - 3\lambda)|r_i|$.

Пусть $p = p_1 \dots p_t$ – разложение пути p на максимальные дуги, а слово v читается на дугах $\bar{p}_k, \bar{p}_{k+1}, \dots, \bar{p}_\ell$, т.е. $v \equiv v_k v_{k+1} \dots v_\ell$, где $\varphi(\bar{p}_{k+1}) \equiv v_{k+1}, \dots, \varphi(\bar{p}_{\ell-1}) \equiv v_{\ell-1}$, а $\varphi(\bar{p}_k) \equiv v_k$, $\varphi(\bar{p}_\ell) \equiv v_\ell$, где $\bar{p}_k$ – конец дуги p_k , $\bar{p}_\ell$ – начало дуги p_ℓ , $\bar{p}_j = p_j$ при $j = k+1, \dots, \ell-1$.

Рассмотрим несколько возможностей.

1. Среди слов $v_k, v_{k+1}, \dots, v_\ell$ найдется слово v_j , где $|v_j| \geq 5\lambda|r|$.

В силу условий (а) и (б), дуга $p_j^{\pm 1}$ не может тогда дважды встречаться в ряду $p_{k+1}, \dots, p_{\ell-1}$. Эти же условия означают, что если $j \neq k, \ell$ и $p_j^{\pm 1}$ дважды встречается в ряду $p_k, \dots, p_\ell$, скажем $p_{j_0} = p_j$ при $j_0 \neq j$, то $j_0 = k$ (или $j_0 = \ell$), причем в этом случае $|v_k| < \lambda|r|$ (соответственно $|v_\ell| < \lambda|r|$).

Если $p_j^{\pm 1}$ встречается только один раз среди $p_k, \dots, p_\ell$, то можно провести преобразование 3-го рода, соединив сначала дугой длины $|r| - |v|$ с меткой u такой, что $r \equiv vu^{-1}$, вершины $(\bar{p}_k)_-$ и $(\bar{p}_\ell)_+$, а затем выбросив дугу p_j из Γ (мы пользуемся тем, что $\varphi(u) = \varphi(v)$ в G). При этом число ребер в Γ уменьшится, ибо $|r| - |v| < 3\lambda|r| < |p_j|$, а эйлерова характеристика не изменится. Получаем противоречие с минимальностью в выборе Γ .

Во втором варианте дугой соединим вершины $(\bar{p}_k)_+$ и $(\bar{p}_\ell)_+$, если $|v_k| < \lambda|r|$. Ее метка будет иметь длину $|r| - |v| + |v_k| < 4\lambda|r|$ (или $|r| - |v| + |v_k| + |v_\ell| < 5\lambda|r|$, если еще и $|v_\ell| < \lambda|r|$), и она равна в G элементу, представленному словом $v_{k+1} \dots v_\ell$. Поэтому, выбрасывая затем дугу p_j , получаем противоречие, как и выше.

Рассмотрим еще возможность $p_k = p_\ell^{\pm 1}$ и $|v_k| \geq 5\lambda|r|$. При $p_k = p_\ell^{-1}$, как и выше имеем, что $|v_\ell| < \lambda|r|$ из условия $C'(\lambda)$. Если же $p_k = p_\ell$, то при разложении $p_k = q'q$, где $|q| = |v_k| - [\lambda|r|]$, ребра дуги q уже не встречаются в подпути пути p_ℓ , на котором написано слово v_ℓ . В этом случае противоречие получается при стирании дуги q (и добавлении новой дуги длины $< 4\lambda|r|$).

2. $|v_j| < 5\lambda|r|$ для $j = k, \dots, \ell$.

В этом случае заметим предварительно, что, ввиду приведенности графа Γ и ограничения на эйлерову характеристику, число различных максимальных дуг в Γ не превосходит $3m - 1$. Поэтому слово v прочитывается

ся на некотором связном подграфе графа Γ с эйлеровой характеристикой $\geq 1 - m$ и числом ребер $\leq 3m5\lambda|r| \leq \mu(1 - 3\lambda)|r| < \mu|v|$ по выбору μ и λ . Поскольку v – подслово в r длины $> |r|/2$, получили противоречие с (λ, μ) -условием.

Для окончания доказательства достаточно найти в любой группе рассматриваемого класса свободную подгруппу ранга 2. При этом можно дополнительно считать, что $|r_i| \geq 12$ для $i = 1, \dots, n$. (Это условие нарушено для кортежей, число которых экспоненциально мало по сравнению с $N_{m,n,t}$, так как оно меньше $n(2m - 1)^{(n-1)t+11}$.)

Выберем число d так, что $d = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|$, и проверим, что x_1^d и x_2^d порождают свободную подгруппу. Допустив, что $w(x_1^d, x_2^d) = 1$ в G для непустого циклически несократимого слова w , получаем с помощью цитированной выше леммы Гриндлингера, что в некотором слове $r_i^{\pm 1}$ есть циклическое подслово $v \equiv x_j^\ell$, где $j = 1$ или $j = 2$, а $\ell > |r_i|/4$. Но в случае $|r_i| \geq 12$ это противоречит условиям (а), (б) и (7), поскольку два различных циклических вхождения слова $x_j^{\ell-1}$ в $r_i^{\pm 1}$ имеют длину $\geq |r_i|/6$.

Легко видеть, что при доказательстве теоремы 2 можно пренебречь числом кортежей $\{r_1, \dots, r_n\}$ таких, что $|r_1| + \dots + |r_n| = d$, но $|r_i| < \sqrt{d}$ хотя бы для одного $i \leq n$. Предполагая же, что $|r_i| = d_i \geq \sqrt{d}$ для всех i , получим для всех отношений $N_{d_1 \dots d_n}^f / N_{d_1 \dots d_n}$ равномерно близкие к 1 (т.е. независимые от выбора чисел $d_1 \dots d_n$ таких, что $d_1 + \dots + d_n = d$) оценки таким же образом, как и в леммах 3 и 4 выше. Для завершения доказательства теоремы 2 параметры μ и λ можно выбрать так же, как и в теореме 1.

В последующей статье предполагается снять ограничение “ $< m$ ” на число порождающих, заменив произвольной наперед заданной границей “ $< L$ ” (где возможно $L \gg m$), доказав общность свойства свободы всех $\leq L$ -порожденных подгрупп группы G бесконечного индекса.

Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

E-mail: olsh@nw.math.msu.su

Поступило

05.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Губа В.С. Об условиях, при которых 2-порожденные подгруппы в группах с малым сокращением свободны // Изв. вузов. Матем. 1986. № 7. С. 12–19.
- [2] Коуровская тетрадь. (Нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Наука, 1990. 11-е изд.
- [3] Margolis S.W., Meakin J.C. Free inverse monoids and graph immersions // Int. J. Algebra and Comput. 1993. V. 3. № 1. P. 79–100.
- [4] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М: Мир, 1980.