Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Модули над квантовыми полиномами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 497–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:29:24

МОДУЛИ НАД КВАНТОВЫМИ ПОЛИНОМАМИ

В. А. Артамонов

В работе [1] рассмотрены общие квантовые алгебры полиномов A . Показано, что проективные A -модули ранга не меньше двух свободны. Целью настоящей работы является описание строения конечнопорожденных модулей над общими квантовыми лорановскими полиномами. Это описание основано на работах [1]–[3]. Кроме того, в статье доказана цикличность артиновых модулей над общими квантовыми полиномами. Все рассматриваемые в работе модули являются левыми модулями. Основные результаты работы изложены в теоремах 1.6, 1.7, 2.4.

Отметим, что квантовые полиномы играют важную роль в построении некоммутативной геометрии [4]. Отметим также работу [5], где рассматриваются близкие вопросы.

§ 1. Модули над лорановскими квантовыми многочленами

Пусть D – тело над полем k с k -автоморфизмами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Предположим, что заданы элементы $q_{ij} \in D^*$, $i, j = 1, \dots, n$, причем

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1,$$

где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$. Через $A_Q(r, n)$, $1 \leq r \leq n$, обозначим ассоциативную k -алгебру, порожденную элементами $X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1}$ из D и заданную определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, & i &= 1, \dots, r; \\ X_i z &= \alpha_i(z) X_i, & z &\in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, & i, j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Как отмечено в [1], алгебра $A = A_Q(n, n)$ разлагается в скрещенное произведение $A = D \#_t kG$, где G – свободная абелева группа с базой

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–1544, и программы INTAS, грант № 93–2618.

$X_1, \dots, X_n$. Таким образом, A является свободным левым и правым D -модулем, базу которого составляют одночлены

$$X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}, \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что A является *общей алгеброй лорановских полиномов*, т.е. образы элементов q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной абелевой группе D^*/H , где H – подгруппа в D^* , порожденная коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1}\alpha_i(z)$, $z \in D^*$, $i = 1, \dots, n$. В силу предложения 4 [1] и следствия из него, как и в [3], справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Алгебра A простая, нетерова, имеет левую (правую) размерность Крулля 1 и левую (правую) глобальную размерность 1. В частности, алгебра A является слева и справа наследственной областью.*

Пусть F – тело частных алгебры A . Если M – конечнопорожденный A -модуль, то рангом M назовем число

$$r(M) = \dim_F(F \otimes_A M).$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть M – конечнопорожденный A -модуль без кручения. Если $r(M) \geq 2$, то модуль M свободен. Если $r(M) = 1$, то модуль M изоморфен левому идеалу в A . Во всех случаях модуль M проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $0 \rightarrow A \rightarrow F$ индуцирует вложение модулей

$$M \hookrightarrow \overline{M} = F \otimes_A M.$$

Пусть $e_1, \dots, e_r$ – базис $\overline{M}$ над F . Предположим, что $u_1, \dots, u_d$ – система порождающих модуля M . Тогда в $\overline{M}$ имеем $u_i = \sum_j a_{ij} e_j$, где $a_{ij} \in F$. Следовательно, найдется такое $f \in F \setminus 0$, что

$$u_i = \sum_j b_{ij} f^{-1} e_j, \quad b_{ij} \in A.$$

В этом случае для любого $m \in M$ имеем

$$m = \sum_{t,i} c_{ti} u_i = \sum_{t,i,j} c_{ti} b_{ij} f^{-1} e_j. \quad (1)$$

Рассмотрим отображение $\varphi: M \rightarrow A^r$, полагая для m из (1)

$$\varphi(m) = \left(\sum_{ti} c_{ti} b_{i1}, \dots, \sum_{ti} c_{ti} b_{ir} \right).$$

Тогда φ является вложением A -модулей. В силу наследственности алгебры A модуль M проективен. Если $r(M) = r = 1$, то M изоморфен левому идеалу в A . Если же $r(M) = r > 1$, то нужно воспользоваться [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Периодической частью $t(M)$ модуля M над A назовем множество всех периодических элементов в M , т.е. множество всех таких элементов из M , аннулятор которых в A отличен от нуля. Модуль M периодический, если $M = t(M)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *$t(M)$ является подмодулем в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что A – область Оре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть M – конечнопорожденный периодический A -модуль и W – свободный A -модуль с базой $e_1, \dots, e_m$, причем существует эпиморфизм $\varphi: W \rightarrow M$. Тогда существует такой элементарный автоморфизм $\alpha \in E(m, A)$, что*

$$\alpha(e_2), \dots, \alpha(e_m) \in \ker \varphi. \quad (2)$$

В частности, модуль M циклический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль M является артиновым, ибо $\text{K. dim } A = 1$ [1], [3]. По [2, теорема 2.2] можно считать, что $\varphi(e_1)$ порождает M . Применяя элементарный автоморфизм α , можно добиться того, чтобы выполнялось условие (2).

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть M – конечнопорожденный A -модуль ранга $r \geq 0$. Тогда $M = t(M) \oplus N$, где $t(M)$ – циклический артинов A -модуль, N – проективный A -модуль ранга r . Если $r = 0$, то $N = 0$. Если $r = 1$, то модуль N изоморфен левому идеалу в A . Если $r > 1$, то модуль N свободен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $t(M/t(M)) = 0$, т.е. $M/t(M)$ – конечнопорожденный A -модуль без кручения. По теореме 1.2 модуль $M/t(M)$ проективен. Следовательно, существует такой конечнопорожденный A -подмодуль без кручения N в M , что $M = t(M) \oplus N$. При этом

$$F \otimes_A M = F \otimes_A N.$$

Кроме того, $t(M)$ и N являются конечнопорожденными A -модулями. Остается воспользоваться теоремой 1.2 и предложением 1.5.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть M – конечнопорожденный A -модуль ранга r , P – проективный A -модуль и $\psi: P \rightarrow M$ – эпиморфизм модулей. Тогда имеют место прямые разложения*

$$M = t(M) \oplus N, \quad P = P_0 \oplus P_1 \oplus P_2,$$

где P_0 имеет ранг 1,

$$\psi(P_0) = t(M), \quad P_1 \subseteq \ker \psi \subseteq P_0 \oplus P_1,$$

и ψ отображает P_2 изоморфно на N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.6 имеем $M = t(M) \oplus N$, где модуль N проективен. Пусть π – композиция ψ и проекции M на N . Тогда $P = \ker \pi \oplus P_2$, где π отображает P_2 изоморфно на N . В частности, $\psi(P_2)$ изоморфно проектируется на N . Таким образом, $M = t(M) \oplus \psi(P_2)$. Заменяя N на $\psi(P_2)$, можно считать, что $N = \psi(P_2)$.

Заметим, что ядро проекции M на N совпадает с $t(M)$. Поэтому $\psi(\ker \pi) \subseteq t(M)$ и, следовательно, $\psi(\ker \pi) = t(M)$. Если ранг $\ker \pi$ равен 1, то положим $P_0 = \ker \pi$, $P_1 = 0$.

Пусть ранг $\ker \pi$ больше 1. По теореме 1.2 и предложению 1.5 модуль $\ker \pi$ свободен и в нем существует такой базис $e_1, \dots, e_r$, что $\psi(e_1)$ порождает $t(M)$, и $e_2, \dots, e_r \in \ker \pi$. Остается положить

$$P_0 = Ae_1, P_1 = Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_r.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть I – левый идеал в A , порожденный элементами $u_1, \dots, u_m$, причем $u_1 \neq 0$. Тогда существуют такие элементы $f_3, \dots, f_m \in A$, что I порождается u_1 и $u_2 + f_3u_3 + \dots + f_mu_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.1 модуль I/Au_1 является периодическим. Остается воспользоваться предложением 1.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть M, M', N – конечнопорожденные A -модули, причем $M \oplus N \simeq M' \oplus N$. Если ранг M отличен от 1 и периодическая часть $t(M)$ полупроста, то $M \simeq M'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Периодические части модулей $M \oplus N$ и $M' \oplus N$ изоморфны, т.е. $t(M) \oplus t(N) \simeq t(M') \oplus t(N)$. Кроме того,

$$M/t(M) \oplus N/t(N) \simeq M'/t(M') \oplus N/t(N).$$

Отсюда вытекает, что ранги модулей M, M' совпадают. Следовательно, если ранг M больше 1, то модули $M/t(M)$ и $M'/t(M')$ свободны. Если ранг M равен нулю, то $M = t(M) \simeq M' = t(M')$.

Остается показать, что $t(M) \simeq t(M')$. Без ограничения общности можно считать, что модули M, M', N периодические. Факторизуя по радикалам модулей M, M', N , можно считать, что M, M', N являются прямыми суммами простых модулей. В силу леммы Шура можно предполагать, что M, M', N являются прямыми суммами простых модулей, изоморфных фиксированному простому модулю F . Пусть

$$M \simeq F^d, \quad M' \simeq F^{d'}, \quad N \simeq F^r.$$

Тогда

$$F^{d+r} \simeq F^{d'+r}. \quad (3)$$

Обозначим через E тело эндоморфизмов модуля F . В силу (3) получаем изоморфизм алгебр

$$\text{Mat}(d+r, E) \simeq \text{End}_A F^{d+r} \simeq \text{End}_A F^{d'+r} \simeq \text{Mat}(d'+r, E). \quad (4)$$

Как известно, из (4) вытекает $d+r = d'+r$, т.е. $d = d'$.

§ 2. Модули над квантовыми многочленами

В этом параграфе будет доказана цикличность артиновых модулей над алгеброй $A_Q(r, n)$, $r \leq n$. Отметим, что если $r = n$, то класс конечнопорожденных модулей над $A_Q(n, n)$ совпадает с классом артиновых модулей в силу предложения 1.1. Если же $r < n$, то класс артиновых модулей является собственным подклассом в классе всех периодических модулей над $A_Q(r, n)$. Например, модуль $A_Q(r, n)/A_Q(r, n)X_n$ является периодическим неартиновым модулем над $A_Q(r, n)$.

Пусть M – простой модуль над $A_Q(r, n)$. Если $j \geq r + 1$, то $X_j M$ является подмодулем в M . В силу простоты M получаем, что либо $X_j M = 0$, либо $X_j M = M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $X_j M = M$. Тогда M является модулем над локализованной алгеброй $A_Q(r, n)_{X_j} \simeq A_Q(r + 1, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in M \setminus 0$. Тогда $a = X_j b$ для некоторого $b \in M \setminus 0$. Предположим, что $X_j u = X_j v$, где $u, v \in M$. В этом случае $X_j(u - v) = 0$. Положим $N = \{z \in M \mid X_j z = 0\}$. Тогда N является подмодулем в M . В силу простоты M получаем $N = 0$. Следовательно, $u = v$ и отображение $z \rightarrow X_j z$ является биекцией на M . Отсюда вытекает утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть M – простой $A_Q(r, n)$ -модуль. Обозначим через $I(M)$ множество всех таких индексов $1 \leq i \leq n$, что $X_i M = M$. Тогда M является модулем над алгеброй, получающейся из $A_Q(r, n)$ локализацией по мультипликативной полугруппе, порожденной произведением всех X_j , $j \in I(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть M – простой $A_Q(r, n)$ -модуль и E – тело эндоморфизмов M . Тогда E антиизоморфно подтелу в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – произвольный ненулевой элемент из M . Тогда $M \simeq A_Q(r, n)/\text{Ann}(a)$. Если $\varphi \in E \setminus 0$ и $\varphi(a) = za$, $z \in A_Q(r, n)$, то $\text{Ann}(za) \supseteq \text{Ann}(a)$. Так как $za \neq 0$, то по тем же соображениям $\text{Ann}(za) = \text{Ann}(a)$. Но $\text{Ann}(za) = \text{Ann}(a) \cap A_Q(r, n)z$. Отсюда $\text{Ann}(a) = \text{Ann}(a) \cap A_Q(r, n)z$, т.е. $\text{Ann}(a) \subseteq A_Q(r, n)z$. Если z необратимо в $A_Q(r, n)$, то в силу максимальной $\text{Ann}(a)$ получаем $\text{Ann}(a) = A_Q(r, n)z$, откуда $za = 0$, что неверно. Итак, z – обратимый элемент из $A_Q(r, n)$, т.е.

$$z = r_0 X_1^{l_1} \cdots X_r^{l_r}, \quad l_i \in \mathbb{Z}, \quad r_0 \in D.$$

Заметим, что $\varphi^2(a) = z^2 a$ и поэтому $(\varphi^2 + \varphi)(a) = (z^2 + z)a$. Если $\varphi^2 + \varphi \neq 0$, то $z^2 + z$ является одночленом по доказанному выше. Это возможно лишь в случае, когда $l_1 = \cdots = l_r = 0$, т.е. $z = r_0 \in D$. Если

же $\varphi^2 + \varphi = 0$, то снова $l_1 = \dots = l_r = 0$. Итак, $z \in D$. Кроме того, если $\psi \in E$ и $\psi(a) = z'a$, $z' \in D$, то

$$(\varphi\psi)(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(z'a) = z'(\varphi(a)) = z'za.$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть M – модуль над $A_Q(r, n)$, J – радикал M , причем модуль M/J является артиновым. Предположим, что при $r = 0$ тривиальный $A_Q(0, n)$ -модуль D является прямым слагаемым M/J кратности не больше 1. Тогда модуль M циклический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [6, предложение 18.3, с. 58], можно считать, что $J = 0$. Таким образом, M является прямой суммой простых модулей. Будем вести доказательство индукцией по числу t простых прямых слагаемых в M . Случай $t = 1$ очевиден. Пусть для $t - 1$ утверждение доказано и $M = M' \oplus N$, где M' – прямая сумма $t - 1$ простого слагаемого, причем $N \not\subseteq D$ при $r = 0$. Тогда $X_j N = N$ для некоторого j . Без ограничения общности можно считать, что $X_j N = N$ для некоторого $j \geq r + 1$, ибо в противном случае необходимо воспользоваться теоремой 1.6, поскольку в этом случае $M = t(M)$ является модулем над $A_Q(r, r)$.

Итак, $X_j N = N$. Пусть a, b – порождающие модулей M', N соответственно. Предположим, что $\text{Ann}(a) \not\subseteq \text{Ann}(b)$ и $z \in \text{Ann}(a) \setminus \text{Ann}(b)$. Тогда

$$A_Q(r, n)(a + b) \ni z(a + b) = zb \neq 0.$$

Отсюда

$$A_Q(r, n)(a + b) \supseteq A_Q(r, n)zb = N.$$

Так как $A_Q(r, n)(a + b) \supseteq A_Q(r, n)a = M'$, то

$$A_Q(r, n)(a + b) = M' \oplus N = M.$$

Предположим теперь, что $\text{Ann}(a) \subseteq \text{Ann}(b)$. В этом случае существует эпиморфизм $\tau: M' \rightarrow N$. Пусть $M' = M_1 \oplus \dots \oplus M_{m-1}$ – разложение M' в прямую сумму простых подмодулей. Тогда τ индуцирует изоморфизм $\tau: M_i \rightarrow N$ для некоторого $i = 1, \dots, m - 1$. При этом $\tau(a_i) = b$, где $a = a_1 + \dots + a_{m-1}$ как и выше порождающий элемент модуля M' , $a_i \in M_i$, b – порождающий модуля N . В силу предложения 2.3 для достаточно большого натурального числа q и любого $i = 1, \dots, m - 1$ не существует таких изоморфизмов $\eta_i: M_i \rightarrow N$, что $\eta_i(a_i) = X_j^q b$. Таким образом, в силу изложенного выше элемент $a + X_j^q b$ порождает M .

Отметим, что теорема 2.4 близка результатам [2]. Вместе с тем необходимо отметить, что алгебра $A_Q(r, n)$, $r < n$, не является простой, как это требуется в [2]. В работе [2] подчеркивается роль идеально инвариантных колец для рассматриваемых вопросов. Напомним, что кольцо A идеально инвариантно, если для любого левого идеала T в A и любого идеала I в A справедливо неравенство $\text{K. dim}(T/IT) \leq \text{K. dim}(R/I)$.

ВОПРОС 2.5. Является ли алгебра $A_Q(r, n)$ идеально инвариантной?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть модуль M из теоремы 2.4 порождается элементами $u_1, \dots, u_d$. Существует такая последовательность элементарных преобразований, переводящая систему $u_1, \dots, u_d$ в систему вида $u, 0, \dots, 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 2.4 можно считать, что $J = 0$, $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_m$, где M_i – простые модули. Будем вести доказательство индукцией по m . Случай $m = 1$ очевиден. Пусть для $m - 1$ утверждение доказано. Выберем $N = M_m$ как и в теореме 2.4. По индукции можно считать, что $u_1 = w + v$, где $w \in M_1 \oplus \dots \oplus M_{m-1}$, $v \in M_m$, и $u_2, \dots, u_d \in M_m$. Если $u_2 = \dots = u_d = 0$, то предложение доказано. Пусть, например, $u_2 \neq 0$. Совершая элементарные преобразования, можно считать, что $u_3 = \dots = u_d = 0$. Пусть $v = au_2$, $a \in A_Q(r, n)$. Как и в теореме 2.4 существует такое X_j^q , что $u = u_1 + (-a + X_j^q)u_2$ порождает M . Отсюда вытекает утверждение.

В заключение приведем пример тела D с набором автоморфизмов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и элементов q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, удовлетворяющих наложенным выше соотношениям. Пусть k – поле, $D = k(q_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n)$ – алгебра рациональных функций от q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$. Тогда элементы q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, независимы в мультипликативной группе D^* .

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: artamon@nw.math.msu.su

Поступило

31.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Артамонов В. А. Проективные модули над квантовыми алгебрами полиномов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 3–12.
- [2] Stafford J. T. Stable structure of noncommutative Noetherian rings // J. Algebra. 1977. V. 47. № 2. P. 244–267.
- [3] McConnell J. C., Pettit J. J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. 1988. V. 38. № 1. P. 47–55.
- [4] Демидов Е. Е. О некоторых аспектах теории квантовых групп // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 39–74.
- [5] Jordan D. A. Iterated skew polynomial rings and quantum groups // J. Algebra. 1993. V. 156. № 1. P. 194–218.
- [6] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.