Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Беляев, Я. Р. Эфендиев, Усреднение системы уравнений Стокса со случайным потенциалом, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 504–520

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 06:45:02

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТОКСА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. Ю. Беляев, Я. Р. Эфендиев

1. Движение жидкости в пористых средах обычно описывается уравнениями теории фильтрации, которые включают в себя феноменологический закон Дарси, связывающий скорость жидкости и градиент давления [1]. При таком усредненном описании игнорируется мелкомасштабная структура пористой среды, а вся детальная информация о течении в порах между хаотически нагроможденными песчинками учитывается лишь коэффициентом в законе Дарси, который называется проницаемостью пористой среды. Проблема математического обоснования закона Дарси и вычисления коэффициентов проницаемости заключается в асимптотическом исследовании решений уравнений гидродинамики в сложно устроенных областях. Малым параметром в этом исследовании служит типичный размер пор и песчинок, образующих пористую область. При некоторых условиях на геометрию распределения песчинок удастся доказать близость решений “точной” и “усредненной” задач.

Для пористых областей с периодической структурой первые строгие результаты по обоснованию закона Дарси принадлежат Л. Тартару (см. дополнение к [2]). Затем Д. Полишевский [3], Г. Аллер [4], [5] и В. В. Жиков [6] последовательно распространили эти результаты на периодические структуры более общего вида. С. М. Козлов и А. Ю. Беляев [7] исследовали проблему усреднения для случайных пористых областей. В перечисленных работах рассматривались стационарные уравнения Стокса в пористой области с однородными условиями Дирихле на песчинках для скорости жидкости и исследовалось асимптотическое поведение их решений при гомотетическом измельчении структуры. Отметим три группы геометрических условий, при которых доказывалось усреднение. Во-первых, пористая среда должна обладать однородностью относительно трансляций, понимаемой в подходящем смысле. Во-вторых, должно быть ограничено присутствие пор аномально больших размеров, не заполненных песчинками. Для случайных структур это ограничение связано с поведением

Работа первого автора выполнена при поддержке INTAS, грант № 93–2716.

“хвостов” распределений размеров пор. В-третьих, существенным фактором является связность области, занятой жидкостью, и характеризующие эту связность количественные оценки.

Последняя группа условий легко контролируется в периодических структурах, но в случайных моделях требует, как правило, громоздких исследований с привлечением идей теории перколяции [8]. В предлагаемой работе рассматривается проблема усреднения уравнений Стокса в случайной пористой среде. Вместо условий Дирихле в уравнения добавлен член с потенциалом, имеющим носитель в области, занятой песчинками. Физически это соответствует пористым средам, твердый скелет которых пронизаем для жидкости. Потенциальный член в уравнениях описывает сопротивление, которое оказывают твердые частицы текущей сквозь них жидкости. Среда такого типа в физической литературе называются трещиновато-пористыми [9]. Они интенсивно исследуются в связи с прикладными проблемами нефтедобычи.

Формально условие Дирихле на песчинках возникает при бесконечно большом сопротивлении. Поэтому уравнения Стокса с потенциалом можно рассматривать как релаксацию краевой задачи. При усреднении эта релаксация позволяет избежать трудно проверяемых условий, относящихся к связности пористой области, а также проблем с негладкостью границ.

Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} -\nabla p_\varepsilon - \chi_\varepsilon(x)u_\varepsilon + \mu\Delta u_\varepsilon + f(x) = 0, \\ \nabla u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon|_{\partial D} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь векторное поле u_ε обозначает скорость жидкости, p_ε – давление, μ – коэффициент вязкости, $f = f(x)$ – заданный вектор внешних сил, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Информация о структуре пористой среды содержится в случайной быстро осциллирующей неотрицательной функции $\chi_\varepsilon(x) > 0$, подробное описание которой будет дано ниже. Коэффициент вязкости μ можно было бы исключить нормировкой. Нам удобно положить всюду в дальнейшем $\mu = \varepsilon^2$. Для уравнений (1.1) рассматривается задача Дирихле в некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, не зависящей от ε .

Основной результат работы состоит в доказательстве сходимости решений $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ с вероятностью 1 к функциям (u^*, p^*) , являющимся решением уравнений теории фильтрации

$$\nabla u^* = 0, \quad u^* \nu|_{\partial D} = 0, \quad (1.2)$$

$$u^* = k(f - \nabla p^*), \quad (1.3)$$

где ν обозначает вектор нормали к ∂D , а k – постоянный тензор, который определяется структурой пористой среды и не зависит ни от ε , ни от f ,

ни от области D . Тип сходимости будет описан ниже. Как обычно в теории усреднения, сначала мы рассматриваем статистически однородную задачу для уравнений (1.1) с $D = \mathbb{R}^n$ и с постоянным вектором вместо $f(x)$, а затем переходим к общему случаю. Эта вспомогательная однородная задача представляет и самостоятельный интерес, так как через ее решение выражается тензор проницаемости k в законе Дарси (1.3). Разрешимость вспомогательной задачи – нетривиальный факт, так как область, где $\chi_\varepsilon(x) = 0$, неограничена, и спектр оператора, соответствующего уравнениям Стокса (1.1) в $\mathbb{R}^n$, может содержать точку ноль. Мы формулируем условие, гарантирующее разрешимость этой задачи, которое конструктивно проверяется для конкретных законов распределения песчинок, образующих случайную пористую структуру. Основные определения и формулировка вышесказанного условия содержатся в п. 2. Свойства решений однородной задачи исследуются в п. 3. Формулировка и доказательство теоремы о сходимости решений системы (1.1) излагаются в п. 4.

2. Для описания случайной статистически однородной структуры пористой среды, мы используем конструкцию, традиционную для теории усреднения. Эта конструкция обладает достаточной общностью и включает в себя в качестве частных случаев периодические и квазипериодические множества [10], [11].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ – вероятностное пространство и на нем задано семейство отображений $T_y: \Omega \rightarrow \Omega$, измеримых по совокупности переменных $\omega \in \Omega$ и $y \in \mathbb{R}^n$ и сохраняющих меру μ на Ω . Предполагается выполненным следующее групповое свойство: для любых $y', y \in \mathbb{R}^n$ и любого $\omega \in \Omega$

$$T_{y'} \circ T_y \omega = T_{y'+y} \omega, \quad T_0 \omega = \omega.$$

Измеримую функцию φ , заданную на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, мы будем называть случайной статистически однородной, если она имеет вид $\varphi = \Phi(T_y \omega)$. В частности, если Ω – n -мерный тор с естественной группой сдвигов на нем, то однородность функции означает ее периодичность.

Семейство отображений T на Ω образует динамическую систему с n -мерным “временем” y . Всюду в дальнейшем мы будем предполагать эргодичность этой системы в следующей формулировке: для любой функции $\Phi \in L_1(\Omega)$ и любой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ почти наверно выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|D|} \int_D \Phi(T_{x/\varepsilon} \omega) dx = \langle \Phi \rangle.$$

Угловыми скобками мы обозначаем интеграл по Ω с мерой μ , т.е. математическое ожидание. Отметим, что реализации однородных функций $\Phi \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, п.н. принадлежат $L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Этот факт доказан в [10],

[11]. Из эргодичности следует также, что функции $\Phi(T_{x/\varepsilon}\omega)$ п.н. слабо сходятся к $\langle \Phi \rangle$ в $\mathbb{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Пористую структуру мы будем характеризовать ограниченной неотрицательной функцией $\chi \in L^\infty(\Omega)$. Для этой функции быстроосциллирующий потенциал $\chi_\varepsilon(x)$ в уравнениях [1.1] зададим в виде $\chi_\varepsilon(x) = \chi(T_{x/\varepsilon}\omega)$. Для приложений типичен случай, когда $\chi(T_y\omega)$ – характеристическая функция некоторого статистически однородного множества $V(\omega) \in \mathbb{R}^n$, которое после масштабного преобразования $y = x/\varepsilon$ соответствует области, занятой твердым скелетом пористой среды.

Основное и практически единственное условие на пористую структуру, которое нам потребуется для доказательства усреднения, мы сформулируем в виде следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пористая структура называется *невыврожденной*, если существует положительная функция $H = H(\omega)$ такая, что для почти всех ω и для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(T_y\omega) \varphi^2(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} [\chi(T_y\omega) \varphi^2(y) + (\nabla \varphi(y))^2] dy, \quad (2.1)$$

и при этом

$$\langle H^{-1} \rangle < \infty. \quad (2.2)$$

Если спектр оператора $(\chi - \Delta)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ отделен от нуля положительной неслучайной константой, то можно положить функцию H равной этой константе, и неравенства (2.1) и (2.2) будут выполняться. В частности, для периодических структур спектр всегда отделен от нуля при $\langle \chi \rangle > 0$. Типичные модели случайных пористых сред конструируются, как правило, таким образом, что для любого $R > 0$ найдется шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R , в котором $\chi(T_y\omega) = 0$, т.е. свободный от песчинок. В этой ситуации неравенство (2.1) с $H = \text{const}$ не может иметь места. Если же весовая функция $H(T_y\omega)$ принимает малые значения в точках y , удаленных от твердого скелета, то спектр оператора $H^{-1}(\chi - \Delta)$ может оказаться отделенным от нуля и неравенство (2.1) будет выполнено. При этом случайная величина $H^{-1}(\omega)$ не ограничена и условие (2.2) означает, что аномально большие поры встречаются достаточно редко.

Всюду в дальнейшем мы будем считать пористую структуру невырожденной. Для доказательства ряда утверждений нам потребуется более сильное условие, чем (2.2)

$$\langle H^{-(1+m)} \rangle < \infty \quad (2.3)$$

для некоторого $m > 0$.

Приведем пример построения весовой функции H . Рассмотрим пористую среду, твердый скелет $\mathbb{V}(w)$ которой представляет собой объединение шаров в $\mathbb{R}^n$ с радиусами ρ_i , $0 < \rho_i \leq 1$, с центрами в изолированных точках y_i , $i = 1, 2, \dots$, а его характеристическая функция $\chi(T_y w)$ статистически однородна. Шарам разрешается перекрываться друг с другом.

Разобьем $\mathbb{R}^n$ на области $\mathbb{V}_i$, состоящие из точек, для которых y_i – ближайший центр. В кристаллографии такие области называют полиэдрами Вороного. Очевидно, что каждая область $\mathbb{V}_i$ звездна относительно своего центра y_i . Введем обозначения $r = r_w(y)$ для расстояния от y до ближайшего центра y_i и $\rho = \rho_w(y)$ для радиуса ρ_i шара с этим центром y_i . Если $\mathbb{V}(w)$ статистически однородная область, то r и ρ – статистически однородные функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Неравенство (2.1) выполняется, если в качестве $H = H(w)$ взять функцию*

$$H(T_y w) = \begin{cases} C \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+\delta}, & y \notin \mathbb{V}(w), \\ C, & y \in \mathbb{V}(w), \end{cases}$$

где δ – произвольное положительное число, а константу C в этой формуле можно положить равной $\delta/(2(n+\delta))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Достаточным условием невырожденности структуры, соответствующей области $\mathbb{V}(w)$, является условие (2.2), проверка которого сводится к вычислению степенных моментов геометрических параметров r и ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t)$ – гладкая функция на отрезке $[0, R]$. Покажем, что для любого положительного ρ , $0 < \rho < R$,

$$\int_0^R u^2(t) h(t) t^{n-1} dt \leq \int_0^R (u'(t))^2 t^{n-1} dt + \int_0^\rho u^2(t) t^{n-1} dt, \quad (2.4)$$

где $0 < \rho < R$, а функция $h(t)$ задана равенством $h(t) = C \min\{(\rho/t)^{n+\delta}, 1\}$. Для этого запишем равенство

$$u(s) = u(q) + \int_q^s u'(t) dt.$$

После возведения в квадрат и применения неравенства Коши–Буняковского получим неравенство

$$u^2(s) \leq 2u^2(q) + 2 \int_0^s (u'(t))^2 t^{n-1} dt \int_q^s t^{1-n} dt.$$

Это неравенство умножим на q^{n-1} и проинтегрируем по q на интервале $[0, \rho]$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^n}{n} u^2(s) &\leq 2 \int_0^\rho u^2(q) q^{n-1} dq \\ &\quad + 2 \int_0^\rho q^{n-1} dq \int_q^s t^{1-n} dt \int_0^s (u'(t))^2 t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Домножим последнее неравенство на $h(s)s^{n-1}$ и проинтегрируем по s на отрезке $[0, R]$:

$$\begin{aligned} \int_0^R h(s) u^2(s) s^{n-1} ds &\leq \frac{2n}{\rho^n} \int_0^R h(s) s^{n-1} ds \int_0^\rho u^2(q) q^{n-1} dq \\ &\quad + \frac{2n}{\rho^n} \int_0^R I(s) s^{n-1} h(s) ds \int_0^s (u'(t))^2 t^{n-1} dt, \end{aligned}$$

где

$$I(s) = \int_0^\rho q^{n-1} dq \int_q^s t^{1-n} dt.$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем слагаемом, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^R h(s) u^2(s) s^{n-1} ds &\leq \frac{2n}{\rho^n} \int_0^R h(s) s^{n-1} ds \int_0^\rho u^2(q) q^{n-1} dq \\ &\quad + \frac{2n}{\rho^n} \int_0^R (u'(t))^2 t^{n-1} dt \int_t^R h(s) I(s) s^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственными вычислениями нетрудно получить (2.4).

Пусть $\varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладкая финитная функция. В каждом из множеств $\mathbb{V}_i$, определенных выше, введем полярные координаты с центрами в точках y_i . Благодаря звездности $\mathbb{V}_i$ на каждом луче, исходящем из центра y_i , можно применить неравенство (2.4) с $u(t) = \varphi(y)$, $t = |y_i - y|$, $h(t) = H(T_y \omega)$. Величину $(u'(t))^2$ в неравенстве (2.4) заменим большей величиной $(\nabla \varphi)^2$. После интегрирования по полярным углам получим неравенство

$$\int_{\mathbb{V}_i} \varphi^2 H dy \leq \int_{\mathbb{V}_i} \chi \varphi^2 dy + \int_{\mathbb{V}_i} (\nabla \varphi)^2 dy.$$

Суммирование этих неравенств по всем полиэдрам $\mathbb{V}_i$ завершает доказательство предложения 2.2.

Вернемся к общей ситуации. Нам потребуется нормированное пространство однородных функций $\mathbb{H}(\Omega)$, аналогичное соболевскому пространству $\mathbb{H}^1(D)$ функций, заданных на $D \subset \mathbb{R}^n$. Через $\mathbb{S}(\Omega)$ обозначим линейное пространство функций $\Phi(\omega)$, реализации которых $\Phi(T_y \omega)$ есть гладкие

функции переменной y , равномерно по ω ограниченные вместе со всеми производными. Выражение $\|\Phi\| = \langle \chi(T_y\omega)\Phi^2(T_y\omega) + (\nabla\Phi(T_y\omega))^2 \rangle^{1/2}$, в котором $\Phi \in \mathbb{S}(\Omega)$ обладает свойствами нормы на $\mathbb{S}(\Omega)$. В силу свойств семейства сдвигов это выражение не зависит от y . Если, следуя авторам [10], [11], ввести в рассмотрение оператор дифференцирования $\partial: \mathbb{S}(\Omega) \rightarrow \mathbb{S}(\Omega)^n$ формулой

$$(\partial\Phi)(T_y\omega) = \nabla\Phi(T_y\omega),$$

то выражение для нормы примет вид $\|\Phi\| = \langle \chi\Phi^2 + (\partial\Phi)^2 \rangle^{1/2}$. Замыкание пространства $\mathbb{S}(\Omega)$ по этой норме мы будем обозначать $\mathbb{H}(\Omega)$. Очевидно $\mathbb{H}(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Для случайных структур, невырожденных в смысле определения 2.1, имеет место вложение $\mathbb{H}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$. Оно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2.4. *Для любой функции $\Phi \in \mathbb{S}(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\langle \Phi^2 H \rangle \leq \langle \chi\Phi^2 + (\partial\Phi)^2 \rangle, \quad (2.5)$$

$$\langle |\Phi|^2 \rangle \leq \langle H^{-1} \rangle \langle \Phi^2 H \rangle, \quad (2.6)$$

где функция $H(\omega)$ задана определением 2.1.

Близкое по смыслу утверждение доказано в [7]. Поэтому мы приведем лишь схему доказательства. Оценка (2.6) следует непосредственно из неравенства Коши–Буняковского. Неравенство (2.5), если в нем, воспользовавшись эргодичностью, перейти к реализациям случайных функций Φ , χ и H почти совпадает с (2.1). Однако носитель функции $\Phi(T_y\omega)$ не компактен, поэтому прежде, чем воспользоваться неравенством (2.1), необходимо эту функцию “подправить”, применив стандартную процедуру срезки, как это сделано в [7].

Если выполняется условие (2.1) в усиленном варианте (2.3), то имеет место компактное вложение $\mathbb{H}(\Omega)$ в соболевское пространство $L_p(\Omega)$ с некоторым показателем p , превышающим единицу. Это вложение гарантируется следующей леммой.

ЛЕММА 2.5. *Если выполнено свойство (2.3), то для любой функции Φ из $\mathbb{S}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\langle |\Phi|^p \rangle^{2/p} \leq C \langle \chi\Phi^2 + (\partial\Phi)^2 \rangle, \quad (2.7)$$

где $C > 0$ – неслучайное число, не зависящее от Φ , а показатель p определен равенством

$$p = 1 + \frac{m}{2 + m}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По неравенству Гёльдера

$$\langle |\Phi|^p \rangle \leq \langle (|\Phi| H^{1/2})^{p\alpha} \rangle^{1/\alpha} \langle (H^{-1/2})^{p\beta} \rangle^{1/\beta},$$

где α и β – положительные константы и $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Положим $\alpha = 2/p$, $\beta = 2/(2-p)$. Получим

$$\langle |\Phi|^p \rangle^{2/p} \leq \langle \Phi^2 H \rangle \langle H^{-p/(2-p)} \rangle^{(2-p)/p}.$$

Так как $p/(2-p) = 1 + m$ и выполнено (2.3), то неравенство (2.7) доказано.

Справедлива также аналогичная (2.7) оценка для функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Этот факт нам потребуется в дальнейшем, и мы сформулируем его в виде отдельной леммы.

ЛЕММА 2.6. *Для любой функции $\psi \in \mathbb{H}_0^1(D)$ с носителем в ограниченной области D п.н. справедлива оценка*

$$\left(\int_D |\psi(x)|^p dx \right)^{2/p} \leq C Q_\varepsilon(\psi),$$

$$Q_\varepsilon(\psi) = \int_D [\chi_\varepsilon(x) \psi^2(x) + (\varepsilon \nabla \psi(x))^2] dx$$

с константой $C = C(\omega) > 0$, не зависящей от ε при $\varepsilon < \varepsilon_0(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6 с учетом эргодичности практически повторяет приведенное выше доказательство леммы 2.5.

3. Для исследования однородной вспомогательной задачи введем в рассмотрение пространство $(\mathbb{H}(\Omega))^n$ векторных полей на Ω с компонентами из $\mathbb{H}(\Omega)$. На этом пространстве имеется гильбертова структура со скалярным произведением

$$\langle \partial U : \partial V + \chi U \cdot V \rangle = \langle \partial_i U_j \partial_i V_j \rangle + \langle \chi U_i V_i \rangle$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Для учета условия несжимаемости жидкости нам предстоит выделить на этом пространстве подпространство соленоидальных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Пространство соленоидальных статистически однородных векторных полей $\mathbb{H}_{\text{sol}}$ есть множество всех $U \in (\mathbb{H}(\Omega))^n$, для которых выполнено равенство*

$$\langle U \cdot \partial P \rangle = 0 \tag{3.1}$$

для любой функции $P \in \mathbb{S}(\Omega)$.

Градиенты $\partial P(\omega)$ функций $P(\omega)$, $P \in \mathbb{S}(\Omega)$, задают линейные непрерывные функционалы на $(\mathbb{H}(\Omega))^n$ по формуле (3.1). Замыкание линейного пространства таких функционалов в норме двойственного к $(\mathbb{H}(\Omega))^n$ пространства мы обозначим через $\mathbb{S}_{\text{pot}}(\Omega)$. Отметим, что элементы пространства потенциальных полей не обязательно представимы в виде градиента ∂P какой-либо статистически однородной функции $P(\omega)$. Периодическая задача представляет собой исключение. Контрпримеры в квазипериодическом случае можно найти в [12]. Тем не менее мы сохраним для них обозначение ∂P , понимаемое как единый символ.

В дальнейшем нам потребуется дополнительная информация о пространстве $\mathbb{S}_{\text{pot}}$. По построению его элементы могут быть аппроксимированы градиентами однородных функций с гладкими ограниченными реализациями. Точная формулировка этого свойства состоит в том, что для любого $\delta > 0$ найдутся однородные функции $P_\delta \in \mathbb{S}(\Omega)$ и $G_\delta \in (\mathbb{H}(\Omega))^n$ такие, что

$$\partial P = \partial P_\delta - \partial^2 G_\delta + \chi G_\delta, \quad \|G_\delta\| \leq \delta. \quad (3.2)$$

Вспомогательная задача для уравнений (1.1) после замены $y = x/\varepsilon$ имеет вид

$$\partial P - \partial^2 U + \chi U = I, \quad \partial U = 0, \quad (3.3)$$

где I – постоянный вектор. Обобщенная формулировка этой задачи такова: требуется найти однородные функции $\partial P \in \mathbb{S}_{\text{pot}}$ и $U \in \mathbb{H}_{\text{sol}}(\Omega)$ такие, что для любой функции $W \in (\mathbb{H}(\Omega))^n$

$$\langle \partial P \cdot W \rangle + \langle \partial U : \partial W + \chi U \cdot W \rangle = I \langle W \rangle. \quad (3.4)$$

Здесь угловые скобки в первом слагаемом обозначают соотношение двойственности между $(\mathbb{H}(\Omega))^n$ и сопряженным к нему пространством. При $W \in \mathbb{H}_{\text{sol}}(\Omega)$ это слагаемое обращается в нуль. Из леммы 2.4 следует непрерывность линейного функционала в правой части (3.4). Это гарантирует существование и единственность решения $U \in \mathbb{H}_{\text{sol}}(W) \subset (\mathbb{L}_1(\Omega))^n$. После того, как найдена функция U , равенство (3.4) определяет градиент давления $\partial P \in \mathbb{S}_{\text{pot}}$.

Решение линейно зависит от компонент I_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$, вектора I

$$U^i(\omega) = U_\alpha^i(\omega) I_\alpha, \quad \partial_i P = \partial_i P_\alpha I_\alpha.$$

Очевидно, что функции U_α , ∂P_α являются решениями вспомогательной задачи (3.3), если в качестве постоянного вектора I взять единичные орты координатных осей e_α .

Через решение вспомогательной задачи определяется тензор проницаемости в законе Дарси.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Проницаемостью среды, отвечающей функции χ , называется тензор k такой, что*

$$\langle U \rangle = kI.$$

Компоненты $k_{i\alpha}$ тензора проницаемости совпадают со слабыми в $\mathbb{L}_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ пределами определенных выше функций $U_\alpha^i(T_y\omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Тензор проницаемости k симметричен, неотрицательно определен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество (3.4), взяв в качестве $W(\omega)$ решение $U' \in \mathbb{H}_{\text{sol}}(\Omega)$ той же задачи, но с другим вектором I' вместо I в правой части. Получим

$$\langle \partial U : \partial U' \rangle + \langle \chi U \cdot U' \rangle = (kI', I). \quad (3.5)$$

Отсюда следует симметричность k . Положив $U = U'$, получим, что матрица k неотрицательно определена. Покажем теперь, что тензор проницаемости положительно определен и выполнено неравенство

$$(kI, I) \geq |I|^2 \langle \chi \rangle^{-1}. \quad (3.6)$$

В (3.4) возьмем в качестве пробной функции $W = I'$. Получим равенство

$$\langle \chi U \rangle = I. \quad (3.7)$$

Неравенство (3.6) вытекает из следующих оценок

$$|I|^2 = \langle \chi U \rangle^2 \leq \langle \chi \rangle \langle \chi U^2 \rangle \leq \langle \chi \rangle \langle \chi U^2 + \partial U : \partial U \rangle = \langle \chi \rangle (kI, I).$$

4. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнений Стокса (1.1) с потенциалом $\chi_\varepsilon(x) = \chi(T_{x/\varepsilon}\omega)$ в ограниченной области D с липшицевой границей.

Основной результат работы состоит в доказательстве утверждения, которое на физическом уровне строгости означает, что компоненты скорости жидкости $u_\varepsilon^i(x)$ близки при малых значениях параметра ε к функции

$$v_\varepsilon^{*i}(x) = U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)(f_\alpha(x) - \nabla_\alpha p^*(x)) = U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)(k^{-1})_{\alpha j} u^{*j}(x), \quad (4.1)$$

где $U_\alpha^i(\omega)$ – решения вспомогательной задачи (3.3), k^{-1} – матрица, обратная к k , а u^* , p^* – решение усредненных уравнений. Напомним, что функция $v_\varepsilon^*(x)$ в слабом смысле близка к $u^* = k(f - \nabla p^*)$, следовательно, при малых ε скорости жидкости подчиняются закону Дарси (1.3) в том же слабом смысле.

Точная формулировка этого утверждения такова.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть пористая структура невырождена и выполняется (2.3) с показателем $m > (n - 2)/n$. Пусть также поле $f(x)$ из правой части уравнений (1.1) принадлежит соболевскому пространству $(\mathbb{L}_q(D))^n$ с показателем q , где $1/p + 1/q = 1$, а число p определено равенством (2.8) (из ограничения на m следует, что $2 > p > 2n/(n + 2)$, $2 < q < 2n/(n - 2)$). Тогда почти наверное решения $u_\varepsilon(x)$ слабо сходятся в $(\mathbb{L}_p(D))^n$ к $u^*(x)$, давления $p_\varepsilon(x)$ сильно сходятся к $p^*(x)$ в $\mathbb{L}_2(D)/\mathbb{R}$ и функции p^* и u^* удовлетворяют усредненным уравнениям (1.2), (1.3). Кроме того п.н. имеет место сходимость следующего вида

$$\int_D |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon^*(x)| dx \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать прямые вариационные методы [13] и нам понадобится вариационное представление задачи (1.1)

$$\bar{\Lambda}_\varepsilon = \sup \{ \Lambda_\varepsilon(v), v \in (\mathbb{H}_0^1(D))^n, \operatorname{div} v = 0 \}, \quad (4.3)$$

где функционал $\Lambda_\varepsilon(v)$ задается формулой

$$\Lambda_\varepsilon(v) = L(f, v) - \frac{1}{2} Q_\varepsilon(v), \quad L(f, v) = \int_D f(x) v(x) dx,$$

а квадратичная форма $Q_\varepsilon(v)$ была определена выше (см. лемму 2.6). Верхняя грань функционала (4.3) достигается на решении u_ε задачи (1.1).

Введем также в рассмотрение прямой и двойственный вариационные принципы усредненной задачи (1.2), (1.3)

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_0 &= \sup \left\{ L(f, g) - \frac{1}{2} \int_D (k^{-1}g, g) dx, \right. \\ &\quad \left. g \in (\mathbb{L}_2(D))^n, \operatorname{div} g = 0, g\nu|_{\partial D} = 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_D (k(f - \nabla r), (f - \nabla r)) dx, f - \nabla r \in (\mathbb{L}_2(D))^n \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что уравнения Эйлера для усредненных функционалов совпадают с уравнениями усредненной задачи. Верхняя грань первого функционала достигается при $g = u^*(x)$, а нижняя грань второго – при $r = p^*(x) + \text{const}$.

Схема доказательства теоремы следующая. Сначала мы докажем сходимость энергий $\bar{\Lambda}_\varepsilon$ к $\bar{\Lambda}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для п.в. $\omega \in \Omega$. При построении оценки $\bar{\Lambda}_\varepsilon$ снизу мы предъявим пробную функцию $v = v_\varepsilon(x)$ в вариационном принципе (4.3), близкую к выражению (4.1) в норме соболевского

пространства $(\mathbb{L}_1(D))^n$ и докажем, что значение функционала $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ при малых ε близко к $\bar{\Lambda}_0$ и, следовательно, к $\bar{\Lambda}_\varepsilon$. (Само выражение (4.1) не входит в область определения функционала (4.3).) Затем мы воспользуемся неравенством

$$\bar{\Lambda}_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon(v) \geq 2\Lambda_\varepsilon\left(\frac{u_\varepsilon + v}{2}\right) - \Lambda_\varepsilon(u_\varepsilon) - \Lambda_\varepsilon(v) = \frac{1}{4}Q_\varepsilon(u_\varepsilon - v). \quad (4.4)$$

Это неравенство означает сильную выпуклость функционала $-\Lambda_\varepsilon(v)$ и показывает, что если значение $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ близко к $\bar{\Lambda}_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon(u_\varepsilon)$, то пробная функция v_ε близка к решению задачи u_ε . Благодаря лемме 2.6, через правую часть неравенства (4.4) оценивается норма разности $u_\varepsilon - v_\varepsilon$ в соболевском пространстве $(\mathbb{L}_p(D))^n$, что влечет за собой сходимости (4.2). Сходимость давлений и слабая сходимость скоростей будут получены в качестве следствий из (4.2) и вспомогательных априорных оценок для решений системы Стокса (1.1).

Для вывода априорных оценок умножим первое из уравнений на u_ε и проинтегрируем его по области D . Получим оценку

$$Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = L(f, u_\varepsilon) \leq \left(\int_D |f|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_D |u_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда по лемме 2.6 следуют неравенства

$$\begin{aligned} \left(\int_D |u_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p} &\leq C \cdot \left(\int_D |f|^q dx\right)^{1/q}, \\ (Q_\varepsilon(u_\varepsilon))^{1/2} &\leq C \cdot \left(\int_D |f|^q dx\right)^{1/q} \end{aligned} \quad (4.5)$$

с константой $C = C(\omega) > 0$, не зависящей от f и ε .

Первая оценка (4.5) показывает, что последовательность функций $u_\varepsilon(x)$ слабокомпактна в $(\mathbb{L}_p(D))^n$. Сходимость (4.2) гарантирует единственность предельной функции и, следовательно, слабую в $(\mathbb{L}_p(D))^n$ сходимость u_ε к u^* . Для доказательства сходимости давлений заметим, что первое из уравнений (1.1) определяет градиент давлений ∇p_ε как элемент пространства $(\mathbb{H}^{-1}(D))^n$, двойственного к $(\mathbb{H}_0^1(D))^n$. По теореме Нечаса [14] (см. также [2], [15]) сходимость ∇p_ε в $(\mathbb{H}^{-1}(D))^n$ эквивалентна сходимости давлений $p_\varepsilon(x)$ в $\mathbb{L}_2(D)/\mathbb{R}$ (так обозначается пространство функций из $\mathbb{L}_2(D)$, в котором все константы отождествлены между собой). Покажем, что градиенты давлений ∇p_ε сходятся к ∇p^* . Согласно оценкам (4.5) последовательность $\chi_\varepsilon u_\varepsilon$ п.н. ограничена в $(\mathbb{L}_2(D))^n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, следовательно, компактна в $(\mathbb{H}^{-1}(D))^n$. Член $\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon$ сильно в

$(\mathbb{H}^{-1}(D))^n$ сходится к нулю, так как функции $\varepsilon u_\varepsilon$ ограничены в $(\mathbb{H}_0^1(D))^n$, а оператор Лапласа осуществляет изоморфизм между этим пространством и его двойственным. Таким образом, последовательность ∇p_ε п.н. компактна и ее предельное поведение определяется асимптотикой члена $\chi_\varepsilon u_\varepsilon$. Представим его в виде

$$\chi_\varepsilon u_\varepsilon = \chi_\varepsilon (u_\varepsilon - v_\varepsilon^*) + \chi_\varepsilon v_\varepsilon^*. \quad (4.6)$$

Из свойств регулярности эллиптических уравнений следует, что в усредненной задаче (1.2), (1.3) $u^* \in (\mathbb{L}_q(D))^n$. Элементы матрицы $\chi_\varepsilon(x) U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)$ в силу эргодичности сходятся к своим средним значениям, которые определяются формулой (3.7) и равны элементам δ_α^i единичной матрицы, поэтому второе слагаемое в (4.6) стремится к $k^{-1}u^*$. Если сходимость (4.2) будет доказана, то единственная предельная функция последовательности $\chi_\varepsilon u_\varepsilon$ равна $k^{-1}u^*$, откуда вытекает сходимость градиентов давлений ∇p_ε к $f - k^{-1}u^* = \nabla p^*$.

Таким образом, нам осталось установить сходимость энергий и предъявить “удачные” пробные функции v_ε в вариационном принципе (4.3). Докажем сначала верхнюю оценку для $\bar{\Lambda}_\varepsilon$ следующего вида

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\Lambda}_\varepsilon \leq \frac{1}{2} \int_D (k\xi, \xi) dx, \quad \xi(x) = f(x) - \nabla r(x), \quad (4.7)$$

выполненную для любой функции r такой, что $\xi \in (\mathbb{L}_2(D))^n$. Справа стоит лагранжиан усредненной задачи, и его минимум по допустимым функциям $r(x)$ равен $\bar{\Lambda}_0$. Благодаря неравенствам (4.5) энергетическую оценку достаточно доказать для функций f из плотного подмножества в $(\mathbb{L}_2(D))^n$, и мы будем считать, что $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^n))^n$. Функцию $r(x)$, не ограничивая общности, также считаем гладкой.

Используя правило множителей Лагранжа, вариационный принцип (4.3) можно представить в виде

$$\bar{\Lambda}_\varepsilon \leq \sup \left\{ L(f - \nabla q, v) - \frac{1}{2} Q_\varepsilon(v), v \in (\mathbb{H}_0^1(D))^n \right\}, \quad (4.8)$$

где с помощью функции q , $\nabla q \in (\mathbb{H}^{-1}(D))^n$, учтено условие соленоидальности. Мы положим $q(x) = r(x) + \varepsilon P_\alpha^\delta(T_{x/\varepsilon}\omega)\xi_\alpha(x)$, где градиенты однородных функций $P_\alpha^\delta \in \mathbb{S}(\Omega)$ приближают решения ∂P_α вспомогательной задачи (3.3) по формуле (3.2) с точностью до малого числа $\delta > 0$. Через G_α^δ , $G_\alpha^\delta \in (\mathbb{H}(\Omega))^n$, обозначим соответствующие невязки, определяемые равенством (3.2).

Из (3.2)–(3.4) следуют равенства

$$\partial P_\alpha^\delta = \partial P_\alpha + \partial^2 G_\alpha^\delta - \chi G_\alpha^\delta = \partial^2 U_\alpha - \chi U_\alpha + e_\alpha + \partial^2 G_\alpha^\delta - \chi G_\alpha^\delta.$$

Если в них перейти к реализациям однородных функций $P_\alpha^\delta, G_\alpha^\delta, U_\alpha$ и произвести масштабную замену $y = x/\varepsilon$, то линейную часть функционала в (4.8) можно представить в виде

$$L(f - \nabla q, v) = L_1 + L_2 + L_3, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_D [-P_\alpha^\delta(T_{x/\varepsilon}\omega)\delta_j^i + \varepsilon \nabla_j U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega) \\ &\quad + \varepsilon \nabla_j G_\alpha^{\delta i}(T_{x/\varepsilon}\omega)] \varepsilon v^i(x) \nabla_j \xi_\alpha(x) dx, \\ L_2 &= \int_D [\varepsilon \nabla_j G_\alpha^{\delta i}(T_{x/\varepsilon}\omega) \cdot \varepsilon \nabla_j v^i(x) + \chi_\varepsilon(x) G_\alpha^{\delta i}(T_{x/\varepsilon}\omega) v^i(x)] \xi_\alpha(x) dx, \\ L_3 &= \int_D [\varepsilon \nabla_j U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega) \cdot \varepsilon \nabla_j v^i(x) + \chi_\varepsilon(x) U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega) v^i(x)] \xi_\alpha(x) dx. \end{aligned}$$

Напомним, что $P_\alpha^\delta \in \mathbb{S}(\Omega)$, а $U_\alpha^i, G_\alpha^{\delta i} \in \mathbb{H}(\Omega)$. Отсюда следует, что функции $P_\alpha^\delta(T_{x/\varepsilon}\omega)$, $\varepsilon \nabla_j U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)$, $\chi_\varepsilon(x) U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)$, $\varepsilon \nabla_j G_\alpha^{\delta i}(T_{x/\varepsilon}\omega)$, $\chi_\varepsilon(x) G_\alpha^{\delta i}(T_{x/\varepsilon}\omega)$ в формулах для L_1, L_2, L_3 п.н. ограничены в $\mathbb{L}_2(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это приводит к оценке

$$|L(f - \nabla q, v)| \leq (C Q_\varepsilon(v))^{1/2}$$

с константой C , не зависящей от ε и v . Отсюда следует, что верхняя грань функционала в (4.8) достигается на векторном поле $v = w_\varepsilon(x)$, удовлетворяющем неравенству $Q_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq C$. Из этого в свою очередь следует, что последовательность функций $\varepsilon w_\varepsilon(x)$ сильно сходится к нулю в $(\mathbb{L}_2(D))^n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, по теореме Реллиха из ограниченности $Q_\varepsilon(w_\varepsilon)$ следует компактность этой последовательности в $(\mathbb{L}_2(D))^n$, а из леммы 2.6 – единственность ее нулевой предельной точки в $(\mathbb{L}_p(D))^n$ и, тем более, в $(\mathbb{L}_2(D))^n$.

Таким образом, в выражении (4.9) слагаемое L_1 сходится к нулю. Слагаемое L_2 может быть сделано сколь угодно малым выбором параметра δ , так как $\|G_\alpha^\delta\| \leq \delta$. Наконец, третье слагаемое с помощью неравенства Минковского $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_D [\varepsilon \nabla U_\alpha(T_{x/\varepsilon}\omega) : \varepsilon \nabla U_\beta(T_{x/\varepsilon}\omega) \\ &\quad + \chi_\varepsilon(x) U_\alpha(T_{x/\varepsilon}\omega) U_\beta(T_{x/\varepsilon}\omega)] \xi_\alpha(x) \xi_\beta(x) dx + \frac{1}{2} Q_\varepsilon(w_\varepsilon). \end{aligned}$$

В результате из (4.8) получим

$$\begin{aligned} \varlimsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\Lambda}_\varepsilon &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_D [\varepsilon \nabla U_\alpha(T_{x/\varepsilon}\omega) : \varepsilon \nabla U_\beta(T_{x/\varepsilon}\omega) \\ &\quad + \chi_\varepsilon(x) U_\alpha(T_{x/\varepsilon}\omega) U_\beta(T_{x/\varepsilon}\omega)] \xi_\alpha(x) \xi_\beta(x) dx. \end{aligned}$$

Существование предела в правой части этого неравенства следует из эргодичности, так как $\varepsilon U_\alpha(T_{x/\varepsilon}\omega) = (\partial U_\alpha)(T_{x/\varepsilon}\omega)$. В силу соотношения (3.5) этот предел совпадает с правой частью неравенства (4.7), что и требовалось.

Теперь перейдем к доказательству оценки снизу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\Lambda}_\varepsilon \geq \int_D [(fg) - \frac{1}{2}(k^{-1}g, g)] dx, \quad (4.10)$$

выполненную для любого векторного поля $g \in (\mathbb{L}_2(D))^n$, $\operatorname{div} g = 0$, $g\nu|_{\partial D} = 0$. Наилучшая оценка, равная $\bar{\Lambda}_0$, получается при $g = u^*$, однако мы будем доказывать (4.10) для гладкого соленоидального поля $g \in (\mathbb{C}_0^\infty(D))^n$ близкого к u^* в норме соболевского пространства $(\mathbb{L}_q(D))^n$, сопряженного к $(\mathbb{L}_p(D))^n$.

В вариационном принципе (4.3) нам надо указать пробное поле $v = v_\varepsilon(x)$, на котором величина $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ близка к значению правой части (4.10). Будем искать его в виде

$$v_\varepsilon = v_{1\varepsilon} + v_{2\varepsilon}, \quad v_{1\varepsilon}^i(x) = U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)(k^{-1})^{\alpha j} g_j(x).$$

Здесь первое слагаемое $v_{1\varepsilon}(x)$ аппроксимирует выражение $v_\varepsilon^*(x)$ из (4.1) в норме $(\mathbb{L}_1(D))^n$, а невязка $v_{2\varepsilon}(x)$ выбирается так, чтобы поле $v_\varepsilon(x)$ было соленоидально и входило в область определения функционала $\Lambda_\varepsilon(v)$. Мы покажем, что функция $v_{2\varepsilon}(x)$ может быть выбрана, во-первых, малой в норме $(\mathbb{L}_2(D))^n$ и, во-вторых, так, что предел $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет равен правой части (4.10). Это завершит доказательство энергетической оценки снизу (4.10) и всей теоремы 4.1.

Для построения функции $v_{2\varepsilon}(x)$ с требуемыми свойствами нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\varphi(x)$ – последовательность функций в $\mathbb{L}_2(D)$ такая, что $\varepsilon\varphi_\varepsilon$ сходится к нулю сильно в $\mathbb{L}_2(D)$, а φ_ε сходится к нулю слабо в $\mathbb{L}_p(D)$, $2n/(n+2) < p \leq 2$. Пусть также для всех ε выполнено равенство $\int_D \varphi_\varepsilon(x) dx = 0$. Тогда найдутся векторные поля $\psi_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon \in (\mathbb{H}_0^1(D))^n$, такие, что $\operatorname{div} \psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ и последовательности $\varepsilon \nabla_j \psi_\varepsilon$, ψ_ε сходятся к нулю сильно в $(\mathbb{L}_2(D))^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\psi_\varepsilon \in (\mathbb{H}_0^1(D))^n$ решения неоднородной системы Стокса следующего вида:

$$-\nabla q + \Delta \psi_\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div} \psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon. \quad (4.11)$$

Из результатов о регулярности решений системы Стокса [15] следуют оценки

$$\int_D |\nabla \psi_\varepsilon|^s dx \leq C \cdot \int_D |\varphi_\varepsilon|^s dx, \quad s > 1,$$

Положив в них $s = 2$, мы получим требуемую сходимость градиентов $\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon$. При $s = p$ получается ограниченность последовательности ψ_ε в соболевском пространстве $(W_0^{1,p}(D))^n$, которое по теореме Соболева–Кондрашова при $p > 2n/(n+2)$ компактно вкладывается в $(\mathbb{L}_2(D))^n$. Поэтому последовательность ψ_ε компактна в $(\mathbb{L}_2(D))^n$, а то, что она сходится именно к нулю следует непосредственно из уравнений (4.11), записанных в виде соответствующих интегральных тождеств. Лемма доказана.

Чтобы пробное поле $v_\varepsilon(x)$ входило в область определения функционала $\Lambda_\varepsilon(v)$, невязка $v_{2\varepsilon} \in (\mathbb{H}_0^1(D))^n$ должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} v_{2\varepsilon} = \varphi_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(x) = -U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)(k^{-1})^{j\alpha} \nabla_i g_j(x).$$

Проверим, что правая часть этого равенства φ_ε удовлетворяет условиям леммы 4.2. Так как $\operatorname{div} g = 0$, а функции $U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)$ слабо сходятся в $\mathbb{L}_p(D)$ к компонентам тензора проницаемости k , то φ_ε слабо сходятся к нулю в $\mathbb{L}_p(D)$. Функции $\varepsilon U_\alpha^i(T_{x/\varepsilon}\omega)$ п.н. сходятся к нулю сильно в $\mathbb{L}_2(D)$. Это нетрудно показать с помощью рассуждений, аналогичных тем, которыми мы воспользовались для оценки функций $\varepsilon w_\varepsilon(x)$, доказывая неравенство (4.7). Следовательно последовательность φ_ε удовлетворяет условиям леммы 4.2, и мы выберем функции $v_{2\varepsilon}(x)$ так, что $v_{2\varepsilon}, \varepsilon \nabla_i v_{2\varepsilon} \rightarrow 0$ в $(\mathbb{L}_2(D))^n$.

При таком выборе пробной функции обеспечивается требуемая близость функций $v_\varepsilon(x)$ и $v_\varepsilon^*(x)$. Осталось установить сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ к правой части (4.10). Подставив пробную функцию $v_\varepsilon(x)$ в функционал $\Lambda_\varepsilon(v)$, получим неравенство

$$\bar{\Lambda}_\varepsilon \geq \Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \Lambda_\varepsilon(v_{1\varepsilon}) + \Lambda_\varepsilon(v_{2\varepsilon}) - [Q_\varepsilon(v_{1\varepsilon})Q_\varepsilon(v_{2\varepsilon})]^{1/2},$$

где для оценки перекрестных членов между $v_{1\varepsilon}$ и $v_{2\varepsilon}$ в квадратичной части функционала мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского. Из доказанных выше свойств невязки $v_{2\varepsilon}(x)$ следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $\Lambda_\varepsilon(v_{2\varepsilon})$ и $Q_\varepsilon(v_{2\varepsilon})$ стремятся к нулю. Линейная часть $L(f, v_{1\varepsilon})$ функционала $\Lambda_\varepsilon(v_{1\varepsilon})$ п.н. сходится к $L(f, g)$ благодаря слабой сходимости $v_{1\varepsilon}$ к g в $(\mathbb{L}_p(D))^n$. Квадратичный функционал $Q_\varepsilon(v_{1\varepsilon})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(v_{1\varepsilon}) &= \int_D [\chi_\varepsilon(x) U_\alpha^k(T_{x/\varepsilon}\omega) U_\beta^k(T_{x/\varepsilon}\omega) \\ &\quad + \varepsilon \nabla_l U_\alpha^k(T_{x/\varepsilon}\omega) \varepsilon \nabla_l U_\beta^k(T_{x/\varepsilon}\omega)] (k^{-1})^{\alpha j} (k^{-1})^{\beta i} g_j(x) g_i(x) \\ &\quad + 2 \int_D [\varepsilon U_\alpha^k(T_{x/\varepsilon}\omega) \varepsilon \nabla_l U_\beta^k(T_{x/\varepsilon}\omega)] (k^{-1})^{\alpha j} (k^{-1})^{\beta i} (\nabla_l g_j(x)) g_i(x) dx \\ &\quad + \int_D [\varepsilon U_\alpha^k(T_{x/\varepsilon}\omega) \varepsilon U_\beta^k(T_{x/\varepsilon}\omega)] (k^{-1})^{\alpha j} (k^{-1})^{\beta i} (\nabla_l g_j(x)) (\nabla_l g_i(x)) dx. \end{aligned}$$

В первом слагаемом член, выделенный квадратными скобками, сходится к $k_{\alpha\beta}$ благодаря равенству (3.5). Второе слагаемое п.н. сходится к нулю, так как под знаком интеграла стоит произведение ограниченной в $\mathbb{L}_2(D)$ функции $\varepsilon \nabla_l U_\beta^k(T_{x/\varepsilon}\omega)$ на функцию $\varepsilon U_\alpha^k(T_{x/\varepsilon}\omega)$, стремящуюся в $\mathbb{L}_2(D)$ к нулю. Следовательно, выражение $Q_\varepsilon(v_{1\varepsilon})$ почти наверное имеет предел, равный $\int (k^{-1}g, g) dx$, и мы приходим к оценке (4.10), которая вместе с верхней оценкой (4.7) гарантирует близость величин $\bar{\Lambda}_\varepsilon$, $\Lambda_\varepsilon(v_\varepsilon)$ к энергии усредненной задачи. Теорема доказана.

Институт водных проблем РАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: beliaev@iwapr.msk.su

Поступило
10.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
- [2] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [3] Polishevsky D. On the homogenization of fluid flows through periodic media // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1987. V. 45. № 2. P. 129–139.
- [4] Allaire G. Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium // Asymptotic Analysis. 1989. V. 2. № 3. P. 203–222.
- [5] Allaire G. Homogenization of the unsteady Stokes equations in porous media // Progress in PDE: calculus of variations, applications. Research Notes in Math. Series 267. New York, 1992. P. 109–122.
- [6] Жиков В. В. Об усреднении уравнений Стокса в перфорированной области // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 144–147.
- [7] Beliaev A. Yu., Kozlov S. M. Darcy equation for random porous // Comm. Pure and Appl. Math. 1996. V. 49. № 1. P. 1–34.
- [8] Grimmet G. Percolation. New York: Springer Verlag, 1989.
- [9] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
- [10] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
- [11] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
- [12] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 1978.
- [13] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
- [14] Nečas J. Equations aux dérivées partielles: Presses de l'Université de Montréal, 1965.
- [15] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.