Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, Ограниченные когомологии групповых конструкций, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 546–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:38:41

ОГРАНИЧЕННЫЕ КОГОМОЛОГИИ ГРУППОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Р. И. Григорчук

Ограниченные когомологии топологических пространств были определены М. Громовым [1], причем оказалось, что они совпадают с ограниченными когомологиями фундаментальной группы. Основы теории ограниченных когомологий и ℓ^1 -гомологий дискретных групп были заложены в рамках теории когомологий банаховых алгебр [2]. При этом в [2] была подчеркнута особая роль, которую играет в теории ограниченных когомологий свойство аменабельности. В частности, было установлено, что ограниченные когомологии аменабельных групп нулевые.

За последнее десятилетие теория ограниченных когомологий получила заметное развитие, а область ее приложений заметно расширилась (см. [3] и литературу к этой работе).

Пусть G – дискретная группа, $G^n = G \times \cdots \times G$ – ее n -кратное декартово произведение, $C_n = \ell^1(G^n)$ – банахово пространство суммируемых n -цепей с вещественными коэффициентами, $C^{(n)} = \ell^\infty(G^n)$ – банахово пространство ограниченных коцепей со значениями в $\mathbb{R}$, $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$, $\delta^n: C^{(n)} \rightarrow C^{(n+1)}$ – граничный и кограничный операторы, определенные выражениями, идентичными выражениям для соответствующих операторов в классическом бар-комплексе Эйленберга–Маклейна–Экмана.

По определению, $H_n^{\ell^1}(G) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n-1}$, $H_b^{(n)}(G) = \ker \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1}$ – n -е группы (на самом деле, векторные пространства с полунормами) ℓ^1 -гомологий и ограниченных когомологий соответственно. Первые группы $H_1^{\ell^1}(G)$, $H_b^{(1)}(G)$ всегда нулевые, а $H_b^{(2)}(G)$ является банаховым пространством, сопряженным пространству $H_2^{\ell^1}(G)$ [3]. Не известно, всегда ли $H_2^{\ell^1}(G)$ есть банахово пространство.

Определим, как и в работе [4], правый обратный к ∂_2 оператор

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00239.

$\alpha: C_1(G) \rightarrow C_2(G)$ нормы ≤ 1

$$\alpha([g]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} [g^{2^{n-1}} | g^{2^{n-1}}]$$

и сопряженный к нему оператор $\alpha^*: C^{(2)}(G) \rightarrow C^{(1)}(G)$.

Под изоморфизмом пространств с полунормами мы понимаем квазиизометрический изоморфизм.

ТЕОРЕМА 1. *$\text{Im } \alpha$ есть замкнутое пространство в $C_2(G)$, $\text{Im } \alpha \cap \text{Im } \partial_3 = 0$ и имеют место изоморфизмы пространств с полунормами:*

$$\begin{aligned} H_2^{\ell^1}(G) &\approx C_2(G) / \text{Im } \alpha \oplus \text{Im } \partial_3, \\ H_b^{(2)}(G) &\approx \ker \alpha^* \cap \ker \delta^2, \end{aligned}$$

где $\ker \alpha^* \cap \ker \delta^2$ рассматривается как (банахово) подпространство пространства $C^{(2)}(G)$. Кроме того, это подпространство совпадает с подпространством коцепей из $Z_b^2(G) = \ker \delta^2$, обращающихся в нуль на диагонали $\Delta \subset G \times G$.

ТЕОРЕМА 2. *Топологическое векторное пространство $H_b^{(2)}(G)$ со $*$ -слабой топологией $\sigma(H_b^{(2)}(G), H_2^{\ell^1}(G))$ изоморфно топологическому векторному пространству $\ker \alpha^* \cap \ker \delta^2$ с топологией, индуцированной $*$ -слабой топологией $\sigma(C^{(2)}(G), C_2(G))$ пространства $C^{(2)}(G)$.*

Пусть $\varphi: G \rightarrow K$ – гомоморфизм групп. Тогда стандартным образом определены индуцированные отображения:

$$\tilde{\varphi}: H_2^{\ell^1}(G) \rightarrow H_2^{\ell^1}(K), \quad \hat{\varphi}: H_b^{(2)}(K) \rightarrow H_b^{(2)}(G). \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 3. *$\tilde{\varphi}$ и $\hat{\varphi}$ являются непрерывными линейными отображениями нормы ≤ 1 , причем $\hat{\varphi}$ сопряжено к $\tilde{\varphi}$.*

Если φ эпиморфно, то $\tilde{\varphi}$ сюръективно, а $\hat{\varphi}$ инъективно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение об инъективности отображения (1) получено также в [5], где использован иной подход к изучению этого вопроса.

Включение пространства ограниченных n -коцепей в пространство всех n -коцепей определяет индуцированное отображение $\Theta: H_b^{(n)}(G) \rightarrow H^{(n)}(G, \mathbb{R})$ в пространство обычных когомологий тривиального G -модуля $\mathbb{R}$. Ядро этого отображения в [3] названо *сингулярной частью группы* $H_b^{(n)}(G)$ и обозначено $H_{b,2}^{(n)}(G)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G = A *_V B$ есть свободное произведение с объединением, причем число $|A :: V|$ двойных классов смежности A по подгруппе V не меньше 3, а обычный индекс $|B : V| \geq 2$. Тогда $\dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известно, что если обычные индексы $|A : V| \geq 3$, $|B : V| \geq 2$, то группа $G = A *_V B$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими и тем самым неаменабельна. Естественно ожидать, что $H_b^{(2)}(G) \neq 0$ и в этом случае. Однако, это не так, что видно на примере группы $SL_2(\mathbb{Z}[1/p_1 \cdots p_n])$, где $p_1, \dots, p_n$ – различные простые числа и $n \geq 7$. При доказательстве тривиальности второй группы ограниченных когомологий используется свойство ограниченности порождения этой группы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G^* = \langle G, t \mid tat^{-1} = \varphi(a), a \in A \rangle$ есть HNN-расширение, причем A и $B = \varphi(A)$ – свободные подгруппы в G . Тогда $\dim H_{b,2}^{(2)} = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение теоремы 5 становится неверным, если хотя бы одна из объединяемых подгрупп $A, B \subset G$ совпадает с G .

ПРИМЕР. $G^* = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^2 \rangle$ – HNN-расширение с $A = \langle a \rangle$ и, в то же время, разрешимая (а, значит, аменабельная) группа, поэтому $H_b^{(2)}(G^*) = 0$.

Доказательство теоремы 4 приводится примерно по той же схеме, что и в случае свободной группы [3] и основано на построении псевдохарактеров. При этом используется

ЛЕММА 1. Пусть $G = A *_V B$ – свободное произведение с объединением и $g = c_1 \cdots c_i \cdots c_m = d_1 \cdots d_j \cdots d_n$, $c_i, d_j \in A, B$, – два приведенных произведения, представляющих элемент g . Тогда $m = n$ и для каждого i , $1 \leq i \leq m$ элементы c_i и d_i лежат в одном и том же двойном классе смежности по подгруппе V .

Для HNN-расширений имеет место аналогичное утверждение, что позволяет при построении псевдохарактеров работать только с сигнатурой $\sigma(g) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ элемента $g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \cdots t^{\varepsilon_n} g_n$, заданного приведенным словом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Несколько иной подход к построению квазихарактеров на группах, являющихся HNN-расширениями использован в [6].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – группа с одним определяющим соотношением, и число образующих в соответствующем представлении не меньше 3. Тогда $\dim H_{b,2}^{(2)}(G) = \infty$.

Известно, что группа с одним определяющим соотношением аменабельна в том и только том случае, если она изоморфна циклической группе или группе вида $\langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.

ВОПРОС 1. Пусть G – неаменабельная группа с одним определяющим соотношением. Верно ли, что $H_b^{(2)}(G) \neq 0$?

Этот вопрос связан со следующим.

ВОПРОС 2. Пусть F – свободная группа ранга ≥ 2 , $\alpha: F \rightarrow F_0$ – изоморфизм F на подгруппу $F_0 \subset F$. Верно ли, что существует ненулевой α -инвариантный (т.е. $f(\alpha(x)) = f(x)$, $x \in F$) псевдохарактер f на F .

Пусть V – конечное множество слов над алфавитом $x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 2}, \dots$, G – группа, $V(G)$ – вербальная подгруппа, определенная множеством слов V , $W(G, V)$ – ширина этой вербальной подгруппы, т.е. минимальное n такое, что любой элемент из $V(G)$ может быть представлен как произведение не более чем n элементов, являющихся значениями слов из V .

Например, группы $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, разрешимые группы ступени ≤ 3 , полициклические группы имеют конечную, коммутаторную ширину (т.е. ширину коммутанта относительно слова $[x_1, x_2]$) [7]–[9]. В то же время у свободных произведений, HNN-расширений ширина вербальных подгрупп бесконечна (при естественных условиях на группу и множество слов) [10], [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $H_{b,2}^{(2)}(G) \neq 0$ и V – конечное собственное множество слов из коммутанта свободной группы F , порожденной символами $x_1, x_2, \dots$ (здесь “собственное” означает, что $V(F) \neq 1$, $V(F) \neq F$). Тогда $W(G, V) = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для свободных произведений с объединением и HNN-расширений, удовлетворяющих условиям теорем 4, 5 соответственно, ширина вербальных подгрупп, определенных конечными собственными множествами слов из коммутанта F' , бесконечна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Последнее утверждение доказано в [6] для HNN-расширений, однако, при дополнительных условиях на связанные подгруппы A, B . Там же поставлен вопрос о ширине вербальных подгрупп в свободных произведениях $A *_V B$, где $|A : V| \geq 3$, $|B : V| \geq 2$, ответ на который фактически дан в теореме 4. Нам кажется, что и в вопросе о бесконечности коммутаторной ширины условия теоремы 4 не улучшаемы.

Идея использовать группы $SL_2(\mathbb{Z}[1/p_1 \cdots p_n])$ в качестве примера того, что условия теоремы 4 не улучшаемы, возникла в результате обсуждения

этого вопроса с Г. Абельсом и П. Залеским. А. Рапинчук представил дополнительную информацию об этих группах. Им, а также В.Б. Бардакову, предоставившему мне свой препринт, я выражаю свою благодарность.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
27.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gromov M. Volume and bounded cohomology // Publ. Math. IHES. 1982. V. 56. P. 5–100.
- [2] Johnson B. E. Cohomology in Banach Algebras // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1972. V. 127.
- [3] Grigorchuk R. I. Some results an bounded cohomology // Combinatorial and Geometric Group Theory. Edinburg, 1993; // London Math. Soc. Lecture Notes Ser.. V. 284. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. P. 111–163.
- [4] Matsumoto S., Morita S. Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 94. P. 539–544.
- [5] Bouarich A. Suites exactes en cohomologie bornee reelle de groupes discrets // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1995. V. 320.
- [6] Бардаков В. Г. Ширина вербальных подгрупп некоторых HNN-расширений. Препринт №9. Новосибирск, 1995.
- [7] Newman M. Unimodular commutators // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101. №4. P. 605–609.
- [8] Phemtulla A. H. Commutators of certain finitely generated Solvable groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. №5. P. 1160–1164.
- [9] Романьков В. А. О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 66–72. №1.
- [10] Phemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. V. 64. №3. P. 573–584.