Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Дедловская, Гомотопы $(-1, 1)$ -алгебр от двух порождающих, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 551–557

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:15:24

ГОМОТОПЫ $(-1, 1)$ -АЛГЕБР ОТ ДВУХ ПОРОЖДАЮЩИХ

М. Е. Дедловская

Под *алгеброй* будем понимать алгебру над фиксированным полем Φ характеристики нуль.

Пусть имеем алгебру A и элемент $a \in A$. Определим на линейном пространстве A новую операцию умножения формулой

$$x \cdot_a y = (xa)y.$$

Полученную алгебру назовем *гомотопом алгебры* A и обозначим через A_a . Если A содержит единицу и a – обратимый элемент в A , то ее гомотоп A_a называется *изотопом алгебры* A .

Естественным образом возникает задача: какие из свойств алгебры переносятся на ее изотоп или гомотоп.

Ассоциативные алгебры просто изоморфны своим изотопам (в этом легко убедиться, заметив, что отображение A в $A_a x \mapsto xa^{-1}$ является изоморфизмом).

В случае йордановых и альтернативных алгебр имеет место гипотеза, что изотопы не изоморфны алгебрам, от которых образованы. Но они, как показал в [1], [2] К. Маккримон, принадлежат классам, содержащим сами алгебры.

Непосредственной проверкой легко устанавливается, что определяющее тождество алгебры сохраняют также гомотопы правоальтернативных алгебр, т.е. алгебр с тождеством $(x, y, y) = 0$. Однако уже для $(-1, 1)$ -алгебр это не всегда верно.

В работе приводится пример алгебры типа $(-1, 1)$, имеющей изотоп, который не является $(-1, 1)$ -алгеброй. Доказывается, что определяющее тождество сохраняет гомотопы двупорожденных $(-1, 1)$ -алгебр, и более того, многообразие, порожденное свободной $(-1, 1)$ -алгеброй ранга 2, устойчиво относительно операции взятия гомотопа.

Напомним, что правоальтернативная алгебра называется алгеброй типа $(-1, 1)$, если в ней выполнено тождество

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0. \quad (*)$$

Известно [3], что во всякой $(-1, 1)$ -алгебре справедливы следующие равенства:

$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0, \quad (1)$$

$$(xy, z, t) + (x, y, [z, t]) = x(y, z, t) + (x, z, t)y, \quad (2)$$

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + (x, y, z) + (y, x, z), \quad (3)$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \quad (4)$$

Пусть A – алгебра типа $(-1, 1)$, A_a – ее гомотоп. Обозначим через $(x, y, z)_a$ и $[x, y]_a$ ассоциатор и коммутатор в гомотопе алгебры A . С помощью (1) и (3) легко показать, что

$$(x, y, z)_a = (xa, y, a)z + (xa, ya, z), \quad (5)$$

$$[x, y]_a = a[x, y] + [a, y]x + [x, a]y + 2(a, x, y). \quad (6)$$

ПРИМЕР. Очевидно, что гомотоп алгебры типа $(-1, 1)$ является право-альтернативной алгеброй. Построим алгебру, изотоп которой не является $(-1, 1)$ -алгеброй.

Пусть $X = \{x_i\}$, где $i \in I$, I – счетное множество. Рассмотрим A – алгебру типа $(-1, 1)$, порожденную множеством $Y = X \cup \{1, v\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям:

- 1) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого слова a от элементов множества Y ;
- 2) $u \cdot w = 0$ для любых слов u и w , содержащих элемент v ;
- 3) $u \cdot t = t \cdot u = 0$ для любых слов u и t таких, что v входит в запись u , а t – слово от $\{x_i\}$ длины ≥ 2 ;
- 4) слова вида $vT_{x_1} \dots T_{x_n}$ – кососимметричны по x_i , где $x_i \in X$, T_{x_i} – оператор левого и правого умножения;
- 5) $x_i x_j = 0$ для всех x_i, x_j из X .

Из соотношений 2), 3) и 5) следует, что ассоциаторный идеал алгебры A , $D(A)$, порожден ассоциаторами вида (x_i, x_j, v) , $x_i, x_j \in X$.

Построим изотоп алгебры A с помощью элемента $a = 1 + p$, где p – элемент из $D(A)$.

Покажем, что в A_a не выполняется тождество

$$S_a(x, y, z) := (x, y, z)_a + (y, z, x)_a + (z, x, y)_a = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим ассоциатор

$$(x, y, z)_a = ((xa)y)a)z - (xa)((ya)z).$$

Сделаем замену $a = 1 + p$, и, учитывая определяющие соотношения 1), 2) и 3), получим

$$(x, y, z)_{1+p} = ((xp)y)z - x((yp)z) + (x, y, z).$$

Составим сумму $S_{1+p}(x, y, z)$. В силу (*) и определяющего соотношения типа 4), имеем

$$S_{1+p}(x, y, z) = 3[(xp)y, z].$$

Докажем методом от противного, что $S_{1+p}(x, y, z) \neq 0$. Итак, допустим, что $S_{1+p}(x, y, z) = 0$, значит, $[(xp)y, z] = 0$. Так как $p \in D(A)$ и $[A, D(A)]$ лежит в коммутативном центре алгебры A [4], то $[y(xp), z] = 0$.

Учитывая определяющие соотношения, имеем $y(xp) = (y, x, p)$, следовательно, $[(y, x, p), z] = 0$. Это означает $[(A, A, D(A)), A] = 0$ или $[(D(A), A, A), A] = 0$.

Имеем, $(D(A), A, A)A = (D(A), A, A) + D^2$, где $D^2 = 0$ в силу определяющих соотношений. Тогда $((D(A), A, A), A, A) = 0$. Это означает, что A – нильпотентна.

Легко видеть, что A также является разрешимой алгеброй. Получили противоречие [5].

Следовательно, $S_{1+p}(x, y, z) \neq 0$ и A_{1+p} не будет $(-1, 1)$ -алгеброй.

Основная теорема. Пусть теперь A – $(-1, 1)$ -алгебра от двух порождающих.

Введем обозначения:

A' – идеал алгебры A , порожденный коммутаторами;

$N(A)$ – ассоциативный центр алгебры A ;

$Z(A)$ – полный центр алгебры A ;

H_x – оператор коммутирования, т.е. $yH_x = [x, y]$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые тождества и свойства алгебры A , полученные в [3], [6].

$$(x, yz, t) = (x, y, t)z + (x, z, t)y + (x, z, [t, y]), \quad (7)$$

$$(x, y, [z, t]) + (x, z, [t, y]) + (x, t, [y, z]) = 0, \quad (8)$$

$$([x, y], z, t) - ([z, t], x, y) = 0, \quad (9)$$

$$(x, y, z[t, u]) = (x, y, [t, u])z, \quad (10)$$

$$(x, y, [w, z]) = (x, z, [w, y]), \quad \text{где } x, y \in A, w \in A', \quad (11)$$

$$(x, y, \{[w, z], t\} - [[w, t], z])T^n = 0,$$

$$\text{где } x, y, z, t \in A, w \in A', T^n = T_{x_1} \dots T_{x_n}, \quad (12)$$

$$\sum_{\sigma \in G_0} (y_{1\sigma}, x, [y_{2\sigma}, y_{3\sigma}]H^n) = 0, \quad \text{где } H^n = H_{x_1} \dots H_{x_n}, \quad (13)$$

G_0 – знакопеременная группа степени 3,

$$A' \cdot D(A) = D(A) \cdot A' = 0, \quad (14)$$

$$(A')^2 \subseteq N(A), \quad (15)$$

$$(A, A', A') = 0, \quad (16)$$

$$D(A) \subseteq Z(A), \quad (17)$$

$$D^2(A) = 0. \quad (18)$$

ЛЕММА 1. *Гомотоп алгебры типа $(-1, 1)$ от двух порождающих есть $(-1, 1)$ -алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что в алгебре A_a истинно тождество (**).

Так как $S_a(x, y, z) = \sum_{\sigma \in G_0} (x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma)_a$, то преобразуем сначала с помощью тождеств (5), (2), (7) и (17) ассоциатор $(x, y, z)_a$. Получим,

$$\begin{aligned} (x, y, z)_a &= (x, y, z)a^2 + (a, y, a)x \cdot z + (a, a, z)y \cdot x + (x, y, a)z \cdot a \\ &\quad + (a, y, z)x \cdot a + (x, a, z)y \cdot a + (x, a, [a, y])z + (x, a, [z, a])y \\ &\quad + (a, a, [z, y])x + 2(x, a, [z, y])a + (x, a, [a, [z, y]]). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (*), (9), (11) и (16)

$$(x, a, [a, [z, y]]) = (a, a, [x, [z, y]]). \quad (19)$$

Подставляя значение $(x, y, z)_a$ в (**), и, группируя слагаемые надлежащим образом, получим

$$\begin{aligned} S_a(x, y, z) &= \{(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y)\}a^2 \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(a, y^\sigma, a) + (a, a, y^\sigma)\} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(x^\sigma, y^\sigma, a) + (a, x^\sigma, y^\sigma) + (y^\sigma, a, x^\sigma)\}z^\sigma \cdot a \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(y^\sigma, a, [a, z^\sigma]) + (z^\sigma, a, [y^\sigma, a]) + (a, a, [z^\sigma, y^\sigma])\}x^\sigma \\ &\quad + 2 \sum_{\sigma \in G_0} (x^\sigma, a, [z^\sigma, y^\sigma])a + \sum_{\sigma \in G_0} (x^\sigma, a, [a, [z^\sigma, y^\sigma]]). \end{aligned}$$

В силу тождеств (*), (1), (8), (13) и (19) имеем $S_a(x, y, z) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В гомотопе $(-1, 1)$ -алгебры ранга 2 истинны тождества

- (а) $[(x, x, y)_a, z]_a = 0$,
- (б) $((x, x, y)_a, z, t)_a = 0$,
- (в) $\sum_{\sigma \in G_0} (x, y^\sigma, [z^\sigma, t^\sigma]_a)_a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) и (б) следуют из соотношений (5), (6) и (17).

(в). Обозначим $[x, y, z] = [[x, y], z]$ и $[x, y, z, t] = [[[x, y], z], t]$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (x, y, [z, t]_a)_a &= \{\text{ввиду (5)}\} = (xa, y, a)[z, t]_a + (xa, ya, [z, t]_a) \\ &= \{\text{ввиду (6), (14), (18)}\} = (xa, ya, [z, t]_a) \\ &= \{\text{ввиду (7), (3)}\} \\ &= (xa, y, [z, t]_a)a + (xa, a, [z, t]_a)y + (xa, a, [[z, t]_a, y]). \end{aligned}$$

Далее, преобразуем каждое слагаемое отдельно.

1°. Имеем

$$\begin{aligned} (xa, y, [z, t]_a) &= (xa, y, [z, t])a + (xa, y, [a, t])z \\ &\quad + (xa, y, [z, a])t + (xa, y, [a, t, z]) + (xa, y, [z, a, t]) \end{aligned}$$

в силу (6), (10), (15), (17).

2°. Аналогично,

$$\begin{aligned} (xa, a, [z, t]_a) &= (xa, a, [z, t])a + (xa, a, [a, t])z \\ &\quad + (xa, a, [z, a])t + (xa, a, [a, t, z]) + (xa, a, [z, a, t]). \end{aligned}$$

3°. Наконец, в силу (6), (3), (15), (17) и (10) имеем

$$\begin{aligned} (xa, a, [[z, t]_a, y]) &= (xa, a, [z, t, y])a + (xa, a, [z, a, t])t \\ &\quad + (xa, a, [a, t, y])z + (xa, a, [z, a, y, t]) + (xa, a, [a, t, y, z]). \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые из разложений 1°, 2°, 3°, обозначив через $f(x, y, z, t, a)$, $g(x, y, z, t, a)$ и $h(x, y, z, t, a)$ каждую из получившихся сумм:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t, a) &= (xa, y, [z, t])a^2 + (xa, y, [a, t])z \cdot a + (xa, y, [z, a])t \cdot a \\ &\quad + (xa, a, [z, t])a \cdot y + (xa, a, [a, t])z \cdot y + (xa, a, [z, a])t \cdot y, \\ g(x, y, z, t, a) &= (xa, y, [a, t, z])a + (xa, y, [z, a, t])a + (xa, a, [a, t, z])y \\ &\quad + (xa, a, [z, a, t])y + (xa, a, [z, t, y])a \\ &\quad + (xa, a, [z, a, t])t + (xa, a, [a, t, y])z, \end{aligned}$$

$$h(x, y, z, t, a) = (xa, a, [z, a, y, t]) + (xa, a, [a, t, y, z]).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_0} (x, y^\sigma, [z^\sigma, t^\sigma]_a)_a &= \sum_{\sigma \in G_0} f(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a) + \sum_{\sigma \in G_0} g(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} h(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a). \end{aligned}$$

Заметим, что, во-первых,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_0} f(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a) &= \sum_{\sigma \in G_0} (xa, y^\sigma, [z^\sigma, t^\sigma])a^2 \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(xa, y^\sigma, [a, t^\sigma]) + (xa, a, [t^\sigma, y^\sigma]) + (xa, t^\sigma, [y^\sigma, a])\}z^\sigma \cdot a \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(xa, a, [a, z^\sigma]) + (xa, a, [z^\sigma, a])\}t^\sigma \cdot y^\sigma = 0 \end{aligned}$$

ввиду тождества (8), во-вторых,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_0} h(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a) \\ = \sum_{\sigma \in G_0} \{(xa, a, [z^\sigma, a, y^\sigma, t^\sigma]) + (xa, a, [a, z^\sigma, t^\sigma, y^\sigma])\} = 0 \end{aligned}$$

ввиду тождества (12), и наконец, в-третьих, с учетом (11) и (4)

$$g = (xa, a, [z, a, t])y + 2(xa, a, [z, t, y])a + (xa, a, [z, a, t])t + (xa, a, [a, t, y])z,$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G_0} g(x, y^\sigma, z^\sigma, t^\sigma, a) &= 2 \sum_{\sigma \in G_0} (xa, a, [z^\sigma, t^\sigma, y^\sigma])a \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G_0} \{(xa, a, [z^\sigma, t^\sigma, a]) + (xa, a, [t^\sigma, a, z^\sigma]) + (xa, a, [a, z^\sigma, t^\sigma])\}y^\sigma = 0 \end{aligned}$$

ввиду тождества (4).

Итак, $\sum_{\sigma \in G_0} (x, y^\sigma, [z^\sigma, t^\sigma]_a)_a = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Многообразие $(-1, 1)$ -алгебр, порожденное свободной алгеброй от двух образующих, устойчиво относительно взятия гомотопов, т.е. вместе с каждой алгеброй оно содержит и любой ее гомотоп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 1 и 2 и теоремы о базисе тождеств многообразия, порожденного свободной $(-1, 1)$ -алгеброй от двух образующих.

Заметим, что даже в этом многообразии есть алгебры, тождества которых отличаются от тождеств их изотопов. Примером этого служит алгебра S_2 — строгая $(-1, 1)$ -алгебра от порождающих x, y . В ее изотопе $(S_2)_a$, где $a = 1 + x$ не выполняется тождество строгости. Чтобы убедиться в этом, проверим на истинность равенство

$$[[x, y]_a, y]_a = 0. \quad (***)$$

Из соотношений (6), (3), (10), (17) и тождества строгости следует, что

$$[[x, y]_{1+x}, y]_{1+x} = 2[x, y]^2 x + ([x, y], x, y)x + ([x, y], x, y).$$

Выражение не равно нулю, так как сумма содержит слагаемые различных степеней, одно из которых (последнее) очевидно не нуль.

Таким образом, в алгебре $(S_2)_{1+x}$ равенство $(***)$ не выполняется.

В заключение автор благодарит профессора С.В. Пчелинцева за помощь, оказанную в ходе работы над настоящей статьей.

Московский педагогический
государственный университет им. В.И. Ленина

Поступило
22.09.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McCrimmon K. Homotopes of alternative algebras // Math. Ann. 1971. V. 191. № 4. P. 253–262.
- [2] McCrimmon K. Homotopes of noncommutative Jordan algebras // Math. Ann. 1971. V. 191. № 4. P. 263–270.
- [3] Пчелинцев С.В. О многообразии, порожденном свободной алгеброй типа $(-1, 1)$ ранга 2 // Сиб. матем. ж. 1981. Т. 22. № 3. С. 162–178.
- [4] Hentzel I. K. The characterization of $(-1, 1)$ rings // J. Algebra. 1974. V. 30. № 1–3. P. 236–258.
- [5] Дорофеев Г.В. Пример разрешимого, но не нильпотентного $(-1, 1)$ -кольца // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. № 2. С. 162–166.
- [6] Пчелинцев С.В. Свободная $(-1, 1)$ -алгебра с двумя порождающими // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 4. С. 425–449.