Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Амиршадян, Граничная интерполяционная задача
в классах обобщенных неванлинновских матриц-функций,
Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 2, 173–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:36:52

ГРАНИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ НЕВАНЛИННОВСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

А. А. Амиршадян

В работе изучается граничная индефинитная интерполяционная проблема в классах обобщенных неванлинновских матриц-функций. Установлено биективное соответствие между множеством всех решений рассматриваемой задачи и классом так называемых G -регулярных самосопряженных расширений модельного симметрического оператора, связанного с задачей. Получены достаточные условия G -регулярности самосопряженных расширений (в терминах функции Вейля) и формула для описания всех решений рассматриваемой задачи.

Библиография: 15 названий.

Скалярная граничная проблема Неванлинны–Пика в классе сжимающих функций рассматривалась в [1], а для классов Неванлинны и Стилтьеса – в [2], [3]. Матричная граничная проблема с кратными точками интерполяции рассматривалась в [4]. В настоящей работе в рамках операторного подхода изучается граничная индефинитная интерполяционная проблема в классах $N_\kappa(\mathbb{C}^n)$ обобщенных неванлинновских матриц-функций. Установлено биективное соответствие между множеством всех решений рассматриваемой задачи и классом так называемых G -регулярных самосопряженных расширений модельного симметрического оператора, связанного с задачей. Получены достаточные условия G -регулярности самосопряженных расширений в терминах функции Вейля. Другой подход к этой задаче, связанный с индефинитным вариантом теоремы Берлинга–Лакса, применялся в [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(n \times n)$ -матриц-функций $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$, голоморфных в области $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, называется *обобщенной неванлинновской парой* (или N_κ -парой, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$), если

- (1) ядро $N_{\phi\psi}(\lambda, \mu) = (\phi(\mu)^* \psi(\lambda) - \psi(\mu)^* \phi(\lambda)) / (\lambda - \bar{\mu})$ имеет κ отрицательных квадратов в $\mathcal{O}$;
- (2) $\psi(\bar{\lambda})^* \phi(\lambda) - \phi(\bar{\lambda})^* \psi(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathcal{O}$;
- (3) $\text{rank}\{\phi(\lambda)^* : \psi(\lambda)^*\} = n$ для всех $\lambda \in \mathcal{O}$.

Две пары $\{\phi, \psi\}$ и $\{\phi_1, \psi_1\}$ называются *эквивалентными*, если $\phi_1(\lambda) = \phi(\lambda)H(\lambda)$, $\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda)H(\lambda)$ для некоторой голоморфной и обратимой в $\mathcal{O}$ матрицы-функции $H(\lambda)$. Множество эквивалентных N_κ -пар обозначим $\tilde{N}_\kappa(\mathbb{C}^n)$. Класс $N_\kappa(\mathbb{C}^n)$ матриц-функций рассматриваем как подмножество $\tilde{N}_\kappa(\mathbb{C}^n)$, отождествляя матрицу-функцию $F(\lambda)$ с парой $\{I, F(\lambda)\}$. Напомним, что *пространством Понтрягина* называется гильбертово

пространство Π , снабженное индефинитным скалярным произведением $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = J^* = J^{-1}$ – линейный оператор в Π с конечным отрицательным индексом $\text{sq}_- \Pi = \dim(I - J)\Pi$. Пусть S – замкнутый не плотно заданный симметрический линейный оператор в пространстве Понтрягина $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ с непустым множеством $\hat{\rho}(S)$ точек регулярного типа такой, что дефектные подпространства $\mathcal{N}_\lambda = \ker(S^+ - \lambda)$, $\lambda \in \hat{\rho}(S)$, конечномерны и индексы дефекта равны: $n_+(S) = n_-(S) (= \dim \mathcal{N}_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm \cap \hat{\rho}(S)$. Здесь S^+ – линейное отношение в Π , сопряженное к оператору S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где $\mathcal{H}$ – вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_0, Γ_1 – линейные отображения из S^+ в $\mathcal{H}$, называется *граничной тройкой* отношения S^+ , если отображение $\Gamma: \hat{f} \rightarrow \{\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{f}\}$ из S^+ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ является сюръективным и для всех $\hat{f} = \{f, f'\}$, $\hat{g} = \{g, g'\} \in S^+$ выполняется соотношение

$$[f', g] - [f, g'] = (\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g})_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g})_{\mathcal{H}}. \quad (1)$$

С каждой граничной тройкой естественно связаны два самосопряженных расширения $A_j = \ker \Gamma_j$, $j = 0, 1$, и голоморфные в $\rho(A_0)$ оператор-функции $M(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ со значениями в $[\mathcal{H}]$ и $[\mathcal{H}, \mathcal{N}_\lambda]$, называемые *функцией Вейля* и γ -*полем* оператора S соответственно. Последние определяются равенствами

$$\hat{\gamma}(\lambda) = (\Gamma_0 | \widehat{\mathcal{N}_\lambda})^{-1}, \quad M(\lambda) = \Gamma_1 \hat{\gamma}(\lambda), \quad \gamma(\lambda) = \pi_1 \hat{\gamma}(\lambda), \quad (2)$$

где $\widehat{\mathcal{N}_\lambda} = \{\{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} : f_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda\}$, а π_1 – проектор на первую компоненту $\widehat{\mathcal{N}_\lambda}$ (см. [7]–[9]). В [7], [8] показано, что функция Вейля $M(\lambda)$ является Q -функцией оператора S в смысле [10], т.е. справедливо тождество

$$M(\lambda) - M(\mu) = (\lambda - \mu) \gamma(\bar{\lambda})^+ \gamma(\mu), \quad \lambda, \mu \in \rho(A_0).$$

Пусть $\tilde{A}$ – самосопряженное расширение оператора S в пространстве Понтрягина $\tilde{\Pi} = \Pi \oplus \Pi'$. Обобщенную резольвенту

$$\mathbf{R}_\lambda = P_{\tilde{\Pi}}(\tilde{A} - \lambda)^{-1}|_{\Pi}, \quad \lambda \in \rho(\tilde{A}),$$

относят к классу $\Omega_{\kappa'}(S)$, если $\text{sq}_- \Pi' = \kappa'$ и выполнено условие минимальности:

$$\overline{\text{span}}\{\Pi + (\tilde{A} - \lambda)^{-1}\Pi \mid \lambda \in \rho(\tilde{A})\} = \tilde{\Pi}. \quad (3)$$

Если выполнено условие минимальности (3) и $\text{sq}_- \Pi' = 0$, то $\tilde{A}$ называют *регулярным расширением*. Если $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ и $M'(\lambda_0) > 0$, то для любого регулярного самосопряженного расширения $\tilde{A}$ подпространства $\ker(\tilde{A} - \lambda_0)$ являются равномерно положительными [10].

Следующая теорема в случае $\overline{\text{dom}} S = \Pi$ и $\text{sq}_- \Pi' = 0$ получена в [10], а в случае $\overline{\text{dom}} S \neq \Pi$ – в [9].

ТЕОРЕМА 3. Пусть S – замкнутый симметрический оператор в пространстве Понтрягина Π , $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка линейного отношения S^+ , $M(\lambda)$ – соответствующая функция Вейля. Тогда равенство

$$\mathbf{R}_\lambda = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\phi(\lambda)(\psi(\lambda) + M(\lambda)\phi(\lambda))^{-1}\gamma(\bar{\lambda})^+ \quad (4)$$

устанавливает биективное соответствие между множеством обобщенных резольвент класса $\Omega_{\kappa'}(S)$, голоморфных в точке $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, и множеством $N_{\kappa'}$ – пар $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$ таких, что $\det(\psi(\lambda_0) + M(\lambda_0)\phi(\lambda_0)) \neq 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка отношения S^+ такая, что A_0 – оператор. Если $\tilde{A} = \tilde{A}^+$ – минимальное самосопряженное расширение оператора S , действующее в пространстве Понтрягина $\tilde{\Pi} \supseteq \Pi$, $\tilde{\kappa} := \text{sq}_- \tilde{\Pi} \geq \kappa := \text{sq}_- \Pi$, и $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\} - N_{\tilde{\kappa}-\kappa}$ -пара, соответствующая расширению $\tilde{A}$ в силу (4), то равномерная положительность (отрицательность) подпространства $\ker(\tilde{A} - \lambda_0)$, $\lambda_0 \in \rho(A_0)$, эквивалентна условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\phi(\lambda)(M(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1} \geq 0 \quad (\leq 0). \quad (5)$$

В случае $\lambda_0 = \infty$ условие (5) принимает вид

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\phi(\lambda)(M(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1}}{\lambda} \geq 0 \quad (\leq 0). \quad (6)$$

Условие $\lambda_0 \notin \sigma_p(\tilde{A})$ эквивалентно условию (5), в котором имеет место точное равенство. В том случае, когда $\Pi, \tilde{\Pi}$ – гильбертовы пространства и $\lambda_0 = \infty$, аналогичный вариант этого равенства имеется в [7] (см. также [11]).

Рассматривается следующая

ЗАДАЧА $\partial \text{IP}_\kappa$. Даны вещественные точки z_j и симметрические матрицы W_j, D_j , $j = 1, \dots, m$. Требуется найти матрицу-функцию $F(\lambda) \in N_\kappa(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющую условиям

$$\lim_{\lambda \rightarrow z_j} F(\lambda) = W_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow z_j} F'(\lambda) \leq D_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad (8)$$

Предполагается, что некасательные пределы в (7), (8) существуют. Условие разрешимости задачи формулируется в терминах матрицы Пика $\mathbf{P} = (P_{jk})_{j,k=1}^m$, имеющей вид [1], [2]

$$P_{jk} = \begin{cases} \frac{W_j - W_k}{z_j - z_k} & \text{при } j \neq k, \\ D_j, & \text{при } j = k. \end{cases}$$

В дальнейшем считаем, что $\det \mathbf{P} \neq 0$. При получении основной теоремы используется функциональная модель Крейна–Лангера [12] и Надя–Кораньи [13] (см. также [2]). А именно, рассматривается пространство Π формальных сумм

$$\Pi = \left\{ f(t) \mid f(t) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j f_j = \sum_{j=1}^m \frac{t - z_1}{t - z_j} f_j, \quad f_j \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \right\}$$

со скалярным произведением

$$[f(t), g(t)] = \sum_{j,k}^m g_k^* P_{jk} f_j.$$

Пространство Π является пространством Понтрягина ($\text{sq}_- \Pi = \text{sq}_- \mathbf{P}$). На подпространстве $\overline{\text{dom}} S = \{f(t) \mid \sum_{j=1}^m f_j = 0\}$ определяется модельный оператор S умножения на независимую переменную:

$$Sf(t) = tf(t) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j z_j f_j.$$

Оператор S является симметрическим с индексами дефекта $n_+(S) = n_-(S) = n$. Пусть G – оператор вложения $\mathbb{C}^n$ в Π , т.е. $Gf := \varepsilon_1 f$, $f \in \mathbb{C}^n$. Для произвольного минимального самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора S , действующего в пространстве Понтрягина $\tilde{\Pi} \supseteq \Pi$, $\text{sq}_- \tilde{\Pi} \supseteq \text{sq}_- \Pi$, обозначим

$$\Pi_G := \overline{\text{span}}\{(I + (\lambda - z_1)(\tilde{A} - \lambda)^{-1})Gf \mid \lambda \in \rho(\tilde{A}), f \in \mathbb{C}^n\}. \quad (9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Минимальное самосопряженное расширение $\tilde{A}$ будем называть *G -регулярным*, если $\text{sq}_- \tilde{\Pi} = \text{sq}_- \Pi_G$ (см. (9)).

Следующая теорема является основной. Она устанавливает биективное соответствие между всеми решениями задачи $\partial \text{IP}_\kappa$ и соответствующими G -регулярными расширениями модельного оператора S .

ТЕОРЕМА 6. Пусть матрица $\mathbf{P}$ невырождена и $\text{sq}_- \mathbf{P} \leq \kappa$. Для того чтобы функция $F(\lambda)$ являлась решением задачи $\partial \text{IP}_\kappa$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$F(\lambda) = W_1 + (\lambda - z_1)G^+(I + (\lambda - z_1)(\tilde{A} - \lambda)^{-1})G, \quad (10)$$

где $\tilde{A}$ ($= \tilde{A}^+$) – произвольное G -регулярное расширение оператора S , действующее в пространстве Понтрягина $\tilde{\Pi} \supseteq \Pi$, $\text{sq}_- \tilde{\Pi} = \kappa$, такое, что подпространства $\ker(\tilde{A} - z_j)$ являются равномерно положительными при $j = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 7. Если $z_j \in \rho(\tilde{A})$, $j = 1, \dots, m$, то минимальность самосопряженного расширения $\tilde{A}$ эквивалентна его G -регулярности.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\det \mathbf{P} \neq 0$. Тогда условие $\text{sq}_- \mathbf{P} \leq \kappa$ является необходимым и достаточным для разрешимости задачи $\partial \text{IP}_\kappa$.

Утверждение следствия 8 следует из леммы 7 и [14, предложение 1.9]. Таким образом, в случае $z_j \in \rho(\tilde{A})$, $j = 1, \dots, m$, описание всех решений задачи $\partial \text{IP}_\kappa$ сводится к описанию соответствующих минимальных самосопряженных расширений оператора S (см. (10)) и может быть легко получено из теоремы 3. Заметим, что тогда в условиях (8) будут иметь место точные равенства. Эффективное описание всех G -регулярных расширений нам не известно, однако в лемме 9 и следствии 10 приводятся простые достаточные условия G -регулярности расширения $\tilde{A}$ модельного оператора S .

ЛЕММА 9. Пусть $\text{sq}_- \mathbf{P} = \kappa$, $\tilde{A}$ – минимальное регулярное самосопряженное расширение оператора S , действующее в пространстве Понтрягина $\tilde{\Pi} \supseteq \Pi$, такое, что подпространства $\ker(\tilde{A} - z_j)$ равномерно положительно, $j = 1, \dots, m$. Тогда расширение $\tilde{A}$ является G -регулярным.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\text{sq}_- \mathbf{P} = \kappa$, $z_j \in \rho(A_0)$ и $M'(z_j) > 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда любое минимальное регулярное самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора S является G -регулярным.

При описании решений задачи $\partial \text{IP}_\kappa$ используются методы теории представлений Крейна [15] и формула резольвентной матрицы, полученная в [8], [9]. Выбирая определенным образом граничную тройку [14], находим вид функции Вейля $M(\lambda)$ и ее производной:

$$M(\lambda) = V((Z - \lambda)\mathbf{P} + V^*W)^{-1}V^* := V\Phi_\lambda^{-1}V^*, \quad M'(\lambda) = V\Phi_\lambda^{-1}\mathbf{P}\Phi_\lambda^{-1}V^*. \quad (11)$$

Здесь $V = (I_n, \dots, I_n)$, $W = (W_1, \dots, W_m)$, $Z = \text{diag}(z_1 I_n, \dots, z_m I_n)$.

Условие $\det \Phi_\lambda \neq 0$ эквивалентно условию $\lambda \in \rho(A_0)$. Теперь определим матрицу решений $\Omega(\lambda)$ задачи $\partial \text{IP}_\kappa$:

$$\Omega(\lambda) = (\Omega_{ij})_{i,j=1}^2 = I_{2n} + \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} (Z - \lambda)^{-1} \mathbf{P}^{-1} (-V^*, W^*). \quad (12)$$

Вид матрицы решений (12) для задачи $\partial \text{IP}_\kappa$ совпадает с хорошо известным видом матрицы решений классической интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика ([4], см. также [14]). Если в условиях (8) $p = m$, то, используя леммы 4, 9, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\text{sq}_- \mathbf{P} = \kappa$, $\det \Phi_{z_j} \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, $p = m$. Тогда формула

$$F(\lambda) = (\Omega_{12}(\lambda)\psi(\lambda) - \Omega_{11}(\lambda)\phi(\lambda))(\Omega_{22}(\lambda)\psi(\lambda) - \Omega_{21}(\lambda)\phi(\lambda))^{-1} \quad (13)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством решений задачи $\partial \text{IP}_\kappa$ и множеством N_0 -пар $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$ таких, что

$$\det(\Omega_{22}(\lambda)\psi(\lambda) - \Omega_{21}(\lambda)\phi(\lambda)) \neq 0, \quad (14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow z_j} (\lambda - z_j)\phi(\lambda)(V\Phi_\lambda^{-1}V^*\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В том случае, когда $M'(z_j) = V\Phi_{z_j}^{-1}\mathbf{P}\Phi_{z_j}^{-1}V^* > 0$, $j = 1, \dots, m$ (см. (11)), условия (15) выполняются автоматически (см. следствие 10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sarason D. Nevanlinna–Pick interpolation with boundary data // *Integral Equations Operator Theory*. 1998. V. 30. P. 231–250.
- [2] Alpay D., Dijksma A., Langer H. Classical Nevanlinna–Pick interpolation with real interpolation points // IWI-preprint 1998-3-02: Groningen University, 1998.
- [3] Кацнельсон В. Э. Интерполяция “на спектре” в классе функций Стильтьеса (случай одного узла) // *Функцион. анализ и прикладная матем.* 1982. С. 33–42.
- [4] Нудельман А. А. Многоточечная матричная проблема моментов // *Докл. АН СССР*. 1988. Т. 298. № 4. С. 812–815.
- [5] Ball J. A., Helton J. W. Interpolation problem of Pick–Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions: parametrization of the set of all solutions // *Integral Equations Operator Theory*. 1986. V. 9. P. 155–203.
- [6] Горбачук М. Л., Горбачук В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984.
- [7] Маламуд М. М. О формуле обобщенных резольвент неплотно заданного эрмитова оператора // *Укр. матем. ж.* 1992. Т. 44. № 12. С. 1658–1688.
- [8] Derkach V., Malamud M. The extension theory of hermitian operators and the moment problem // *J. Math. Sci.* 1995. V. 73. № 2. P. 141–242.
- [9] Derkach V. On generalized resolvents of hermitian relations in Krein spaces // *J. Math. Sci.* 1999. V. 97. № 5. P. 4420–4460.
- [10] Крейн М. Г., Лангер Г. К. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // *Функцион. анализ и его прилож.* 1971. Т. 5. № 2. С. 59–71; № 3. С. 54–69.
- [11] Derkach V., Hassi S., Malamud M., Snoo H. S. V. Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility // Preprint № 252. Helsinki: University of Helsinki, 2000.
- [12] Krein M. G., Langer H. Über die Q -Funktion eines π -hermiteschen Operator in Raume Π_κ // *Acta Sci. Math.* 1973. V. 34. P. 191–230.
- [13] Nagy Sz., Koranyi A. Relations d'une problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien // *Acta Math. Acad. Hung.* 1956. V. 7. P. 295–303.
- [14] Amirshadyan A., Derkach V. Interpolation in generalized Nevanlinna and Stieltjes classes // *J. Operator Theory*. 1999. V. 42. P. 145–188.
- [15] Krein M. G. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // *Укр. матем. ж.* 1949. Т. 1. № 2. С. 3–66.

Донецкий национальный университет

E-mail: amirshadyan@mail.ru, amirshadyan@yahoo.com

Поступило

01.04.2002