Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Лосев, Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 558–564

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:07:47

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Г. Лосев

Данная статья посвящена изучению поведения ограниченных гармонических функций на полных римановых многообразиях некоторого специального вида в зависимости от геометрии многообразия.

Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ является константой. Однако класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. Так, например, М. Андерсоном [1] и Д. Сулливаном [2] была решена задача Дирихле для полного односвязного многообразия с секционной кривизной, ограниченной двумя отрицательными константами. В развитие данного вопроса С. Т. Яу [3] предложил следующую классификацию римановых многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть многообразие *строго параболическим*, если всякая положительная гармоническая функция на нем равна константе.

Многообразие называют *параболическим*, если множество положительных гармонических функций на нем имеет конечную размерность.

Остальные многообразия являются *гиперболическими*, т.е. непараболическими.

В данной работе приведен критерий гиперболичности полных римановых многообразий некоторого специального вида.

Пусть $\mathcal{M}$ – полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $\mathcal{M} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$, где $\mathcal{B}$ – некоторый компакт, а $\mathcal{D}$ изометрично прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$), а $\mathcal{S}$ – компактное риманово многообразие с метрикой

$$ds^2 = h^2(r) dr^2 + g^2(r) d\theta^2.$$

Здесь $h(r)$ и $g(r)$ – положительные, гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, а $d\theta^2$ – метрика на $\mathcal{S}$. Примерами таких многообразий могут служить евклидово

пространство $(h(r) = 1, g(r) = r)$, пространство Лобачевского $(h(r) = 1, g(r) = \operatorname{sh}(r))$, поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n$ ($h(r) = \sqrt{1 + |f'(r)|^2}$, $g(r) = f(r)$) и другие.

Введем обозначение

$$I = \int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t h(\xi) g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt,$$

где $r_0 = \operatorname{const} > 0$, $n = \dim \mathcal{M}$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. 1) Пусть риманово многообразие $\mathcal{M}$ таково, что $I = \infty$. Тогда оно является строго параболическим.

2) Пусть риманово многообразие $\mathcal{M}$ таково, что $I < \infty$. Тогда оно является гиперболическим. Более того, для любой непрерывной на $\mathcal{S}$ функции $\Phi(\theta)$ существует гармоническая функция u такая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия $I < \infty$ следует, что

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t) dt < \infty.$$

Последнее эквивалентно существованию функции Грина многообразия $\mathcal{M}$ (см. [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Прежде всего заметим, что первое утверждение теоремы доказано в [4]. Докажем второе утверждение теоремы. Заметим вначале, что в координатах (r, θ) оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{h^2(r)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)} \left((n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{g^2(r)} \Delta_{\theta}, \quad (1)$$

где Δ_{θ} – внутренний лапласиан на $\mathcal{S}$. Формула проверяется непосредственно по определению оператора Лапласа–Бельтрами (см. также [4]).

Пусть w_k – ортонормированный базис в $L^2(\mathcal{S})$ из собственных функций оператора Лапласа Δ_{θ} , а λ_k – соответствующие собственные числа. Тогда для любого r имеем

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$

где

$$v_k(r) = \int_{\mathcal{S}} u(r, \theta) w_k(\theta) d\theta, \quad \Delta_{\theta} w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0.$$

Из (1) следует, что для любого номера k функция $v_k(r)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$v''(r) + \left((n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) v'(r) - \lambda \frac{h^2(r)}{g^2(r)} v(r) = 0, \quad (2)$$

где $\lambda = \lambda_k$.

Последнее эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{g^{n-1}(r)}{h(r)} v'(r) \right)' = \lambda g^{n-3}(r) h(r) v(r).$$

Проинтегрируем данное уравнение от r_0 до r . В результате получим

$$v'(r) = \lambda \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^r g^{n-3}(\xi) h(\xi) v(\xi) d\xi + \frac{v'(r_0) g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)} \cdot \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)}. \quad (3)$$

Интегрируя еще раз от r_0 до r , получаем

$$\begin{aligned} v(r) &= \lambda \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^t g^{n-3}(\xi) h(\xi) v(\xi) d\xi \right) dt \\ &\quad + \frac{v'(r_0) g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)} \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt + v(r_0). \end{aligned}$$

Переобозначим решение уравнения (2) $v(r)$ с $\lambda = \lambda_k$ и граничными условиями $v(r_0) = 1$, $v'(r_0) = 0$ через $l_k(r)$. Тогда из (3) очевидно следует, что $l_k(r)$ – монотонно возрастающая, положительная функция.

Покажем теперь ограниченность $l_k(r)$ на $(r_0, +\infty)$. Так как $l_k(r)$ монотонно возрастает на $(r_0, +\infty)$ и положительна, то из (3) следует, что

$$l'_k(r) \leq \lambda_k g^{1-n}(r) h(r) l_k(r) \int_{r_0}^r h(\xi) g^{n-3}(\xi) d\xi.$$

Отсюда

$$(\ln l_k(r))' \leq \lambda_k \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^r h(\xi) g^{n-3}(\xi) d\xi.$$

Интегрируя данное неравенство от r_0 до r , получаем

$$l_k(r) \leq \exp \left(\lambda_k \int_{r_0}^r h(t) g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t g^{n-3}(\xi) h(\xi) d\xi \right) dt \right).$$

Из условия $I < \infty$ получаем ограниченность $l_k(r)$.

Из монотонного возрастания и ограниченности функции $l_k(r)$ следует существование предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l_k(r) = b_k$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Заметим, далее, что для любого числа c_k функция

$$v_k(r) = \frac{c_k}{b_k} l_k(r)$$

является решением уравнения (1) и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = c_k.$$

Кроме того, очевидно, $|v_k(r)|$ – монотонно возрастающая функция.

Далее докажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$$

равномерно сходится на $(r_0, +\infty)$.

Пусть $\Phi(\theta)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathcal{S}$. Заметим, что

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta),$$

где

$$c_k = \int_{\mathcal{S}} \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta,$$

а $w_k(\theta)$ определена выше.

Используя формулу Грина и определение $w_k(\theta)$, для $k \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left| \int_{\mathcal{S}} \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_k} \left| \int_{\mathcal{S}} \Phi(\theta) \Delta_{\theta} w_k(\theta) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \left| \int_{\mathcal{S}} \Delta_{\theta} \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина p раз (где p – произвольное натуральное число), получим

$$|c_k| = \frac{1}{\lambda_k^p} \left| \int_{\mathcal{S}} \Delta_{\theta}^p \Phi(\theta) w_k(\theta) d\theta \right|.$$

Применяя к правой части неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|c_k| \leq \frac{1}{\lambda_k^p} \sqrt{\int_{\mathcal{S}} (\Delta_{\theta}^p \Phi(\theta))^2 d\theta} \sqrt{\int_{\mathcal{S}} w_k^2(\theta) d\theta} = \frac{a}{\lambda_k^p},$$

где a – константа, зависящая от $\mathcal{S}$ и p . Из асимптотики Вейля следует, что $\lambda_k \geq a_1 k^{2/n}$, где a_1 – константа, зависящая от $\mathcal{S}$. Поэтому

$$|c_k| \leq \frac{a}{a_1^p k^{2p/n}}.$$

Из теоремы вложения Соболева и стандартных эллиптических оценок вытекает

$$|w_k(\theta)| < a_2 k^N,$$

где a_2 и N – константы, зависящие от компакта $\mathcal{S}$. Тогда справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)| \cdot |w_k(\theta)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot |w_k(\theta)| \\ &\leq \frac{a a_2}{a_1^p} \sum_{k=1}^{\infty} k^{N-2p/n} \end{aligned}$$

и при достаточно большом p ряд сходится. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$$

сходится абсолютно и равномерно.

Учитывая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_k(r) = c_k,$$

получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta) = \Phi(\theta).$$

Таким образом, мы построили на $\mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$ гармоническую функцию

$$u_0(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$

удовлетворяющую условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_0(r, \theta) = \Phi(\theta), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \Big|_{\partial \mathcal{B}} = 0$$

(последнее следует из $v'(r_0) = 0$).

Построим гармоническую на всем многообразии $\mathcal{M}$ функцию $u(x)$ такую, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (u(r, \theta) - u_0(r, \theta)) = 0.$$

Для этого рассмотрим последовательность функций, удовлетворяющих задаче

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad \text{в } B_i, \quad \varphi_i|_{\partial B_i} = u_0|_{\partial B_i},$$

где B_i – возрастающая последовательность предкомпактных подмножеств $\mathcal{M}$, имеющих гладкие границы и исчерпывающих $\mathcal{M}$.

Пусть $G_i(x, y)$ – функция Грина предкомпакта B_i . Кроме того, пусть φ_0 – финитная функция, равная нулю в $\mathcal{B}$ и равная единице вне некоторой окрестности $\mathcal{B}$. Тогда положим $U = u_0 \varphi_0$, $\Delta U = f$. Заметим, что $\text{supp } f$ лежит в некоторой окрестности $\mathcal{B}$. Рассмотрим последовательность функций $\psi_i = \varphi_i - U$. Для них выполнено $\Delta \psi_i = -f$, $\psi_i|_{\partial B_i} = 0$. Тогда

$$\psi_i(x) = \int_{B_i} G_i(x, y) f(y) dy.$$

Из существования предела функций Грина G_i при $i \rightarrow \infty$ (см. замечание 1) следует существование предела последовательности $\{\psi_i\}$ и, соответственно, существование предела последовательности $\{\varphi_i\}$.

Обозначим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i = u,$$

где u – гармоническая функция. Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} &= \int_{B_i} \Delta \psi_i = - \int_{B_i} f = - \int_{B_i} \Delta(u_0 \varphi_0) \\ &= - \int_{\partial B_i} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = - \int_{\partial B_i \cup \partial \mathcal{B}} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = - \int_{B_i \setminus \mathcal{B}} \Delta u_0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (см. также [4]), что для любой предкомпактной области K выполнено

$$\sup_{\mathcal{M} \setminus K} (u - u_0) = \sup_K (u - u_0), \quad \inf_{\mathcal{M} \setminus K} (u - u_0) = \inf_K (u - u_0).$$

Учитывая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_0 = \Phi(\theta),$$

получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u = \Phi(\theta).$$

Таким образом, на многообразии $\mathcal{M}$ решена задача Дирихле для любой бесконечно дифференцируемой функции $\Phi(\theta)$.

Пусть теперь на $\mathcal{S}$ задана непрерывная функция $\Phi(\theta)$. И пусть $\{\Phi_i\}$ – последовательность бесконечно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к Φ . Пусть $\{u_i\}$ – последовательность решений задачи Дирихле на $\mathcal{M}$ с граничными функциями Φ_i . Тогда функция

$$u = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$$

будет решением задачи Дирихле с граничной функцией $\Phi(\theta)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathcal{M}$ – полное риманово многообразие, устроенное следующим образом: внешность некоторого компакта $\mathcal{B}$ в $\mathcal{M}$ состоит из m компонент связности $D_1, \dots, D_m$, каждая из которых изометрична прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ с метрикой

$$ds^2 = h_i^2(r) dr^2 + g_i^2(r) d\theta^2.$$

Введем обозначение

$$I_i = \int_{r_0}^{\infty} h_i(t) g_i^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^t h_i(\xi) g_i^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt.$$

Пусть $\mathcal{M}$ таково, что все $I_i = \infty$ и по крайней мере один из интегралов

$$\int_{r_0}^{\infty} h_i(t) g_i^{1-n}(t) dt < \infty.$$

В работе [4] показано, что размерность множества положительных гармонических функций на таких многообразиях равно m . Таким образом, при $m > 1$ так устроенные многообразия являются многообразиями параболического типа.

Волгоградский государственный университет
E-mail: losev@math.vgu.tsaritsyn.su

Поступило
11.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Anderson M. T. The Dirichlet problem at infinity for manyfolds with negative curvature // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 701–722.
- [2] Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manyfolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 723–732.
- [3] Yau S. T. Nonlinear analysis in geometry // L'Enseignement Mathematique. 1987. V. 33. P. 109–158.
- [4] Лосев А.Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–24.