Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Стоколос, О скорости сильного дифференцирования интегралов, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 565–585

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:00:58

О СКОРОСТИ СИЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

А. М. Стоколос

Следствием классической теоремы А. Лебега о дифференцировании интегралов является наличие почти всюду следующего фундаментального соотношения

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = o_x(1), \quad \text{diam } I \rightarrow 0, \quad (1)$$

где I обозначает интервалы, а $\text{diam } I$ — их длины. Соотношение (1) выражает некую локальную интегральную непрерывность суммируемых функций. Естественно, что порядок величины $o_x(1)$ должен повышаться с увеличением порядка гладкости функции f , и было бы интересным установить точную зависимость между этими величинами. В терминах интегральной гладкости эта задача получила свое окончательное решение в работе К. И. Осколкова [1]. Для формулировки этого результата нам понадобятся следующие объекты.

Пусть $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности*, не эквивалентный δ . Образует последовательность $\{\delta_k\}$ по следующему правилу [1]:

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_{k+1} = \min \left\{ \delta : \max \left(\frac{\omega(\delta)}{\omega(\delta_k)}, \frac{\omega(\delta_k)\delta}{\omega(\delta)\delta_k} \right) \geq \frac{1}{2} \right\},$$

и определим функцию $\Omega(\delta) = 2^{1-k}$, $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$.

Обозначим также

$$D_\delta^*(f, x) = \inf_{I, x \in I, |I|=\delta} |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy,$$
$$D_\delta(f, x) = \sup_{I, x \in I, |I|=\delta} |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy.$$

Следующая теорема представляет собой существенно ослабленный вариант основного результата из [1].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности такой, что

$$\frac{\omega(\delta)}{\delta} \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0,$$

и $\psi(t)$ – невозрастающая положительная функция, для которой

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\psi(t)} < \infty. \quad (2)$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^\omega(I^1)$ почти всюду на I^1 справедлива оценка

$$D_\delta(f, x) = O_x\{\omega(\delta)\psi(\Omega(\delta))\}. \quad (3)$$

Если же $\psi(t)$ – неотрицательная невозрастающая функция, для которой

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\psi(t)} = \infty,$$

то существует функция $f \in H_1^\omega(I^1)$, для которой почти всюду на I^1

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\omega(\delta)\psi(\Omega(\delta))} = \infty. \quad (4)$$

Распространение результатов К. И. Осколкова на многомерный случай было произведено В. И. Колядой [2]. Его подход отличается от методов исследований К. И. Осколкова и основан на следующем наблюдении.

Для $f \in L^1(I^n)$ и положительной полуаддитивной функции $\varphi(t)$ положим

$$\mathcal{N}_\varphi(f, x) = \sup_{Q, x \in Q} (|Q|\varphi(|Q|^{1/n}))^{-1} \int_Q |f(y) - f(x)| dy,$$

где Q обозначает куб в $\mathbb{R}^n$. Поскольку

$$|Q|^{-1} \int_{Q \ni x} |f(y) - f(x)| dy \leq \mathcal{N}_\varphi(f, x) \varphi(\text{diam } Q),$$

то вопрос о скорости сходимости может быть редуцирован к вопросу о конечности почти всюду $\mathcal{N}_\varphi(f, x)$. Соответствующие оценки для $\mathcal{N}_\varphi(f, x)$ и были получены В. И. Колядой [2].

А именно, пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Через $E(\omega)$ обозначим класс всех неотрицательных последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ таких, что $(s = 1, 2, \dots)$

$$\sum_{k=0}^s 2^k \varepsilon_k \leq 2^s \omega(2^{-s}), \quad \sum_{k=s}^\infty \varepsilon_k \leq \omega(2^{-s}).$$

Тогда условие конечности почти всюду $\mathcal{N}_\varphi(f, x)$ для всех $f \in H_1^\omega(I^n)$ записывается в виде

$$\sup_{\varepsilon \in E(\omega)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\varphi(2^{-k})} < \infty. \quad (5)$$

Таким образом, вопрос о скорости дифференцирования относительно кубов решен полностью.

Рассмотрим теперь вопрос о скорости сильного дифференцирования. Этот случай существенно отличается от вышеизложенного. Дело в том, что соотношение (1), в котором $I = I_1 \times \dots \times I_n$ — многомерные интервалы, не обязано выполняться для произвольной суммируемой функции. В силу теоремы Йессена–Марцинкевича–Зигмунда оно справедливо лишь для функции из $L(\log^+ L)^{n-1}(I^n)$ и этот класс не улучшаем (см., например, [3]). Таким образом, прежде чем рассматривать вопросы о скорости, необходимо найти условия на модули, при которых вообще имеет место сходимость. Достаточные условия мгновенно следуют из теорем вложения [4], [5]:

$$H_1^\omega(I^n) \subset L(\log^+ L)^{n-1}(I^n) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-2} d\delta < \infty, \quad (6)$$

$$H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n) \subset L(\log^+ L)^{n-1}(I^n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\omega_i(\delta)}{\delta} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-2} d\delta < \infty. \quad (7)$$

В [6] было показано, что в изотропном случае условие вложения (6) является также и необходимым. В анизотропном случае это оказалось не так, что представляется нам весьма интересным моментом.

Во-первых, отметим следующее. В условии (7) стоит сумма по всем модулям $\omega_i(\delta)$, что является вполне естественным моментом, так как отсутствие контроля гладкости по одному из направлений ведет к отсутствию контроля за глобальным ростом функции в целом, а тогда уже никакого вложения в класс $\Phi(L)$, более узкий, чем L , не будет.

С другой стороны, никакой класс $\Phi(L)$, более широкий, чем $L(\log^+ L)^{n-1}(I^n)$, не является хорошим классом с точки зрения сильной дифференцируемости. Тем не менее выяснилось, что в шкале классов $H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$, гладкость в одном из направлений (естественно считать его “худшим”) можно не контролировать вообще.

Во-вторых, условие на оставшийся $n-1$ модуль непрерывности является новым по форме. Оно не является точным условием вложения в классы $\Phi(L)$ в $(n-1)$ -мерном случае. Это условие записывается следующим образом.

Пусть θ_k^i такие, что

$$\omega_i(\theta_k^i) = 2^{-k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, \infty.$$

Тогда сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \prod_{i=1}^{n-1} \log \frac{1}{\theta_k^i} < \infty \quad (8)$$

является достаточным для сильного дифференцирования интегралов функций из $H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$. На классе регулярных модулей непрерывностей это условие окончательно (детали см. в [6]).

Теперь уже можно непосредственно переходить к вопросу о скорости сходимости почти всюду.

Классический подход к изучению вопросов сильного дифференцирования, предложенный впервые, по всей видимости, А. Зигмундом, состоит в мажорировании многомерного оператора композицией частных одномерных операторов. Тогда вопросы конечности почти всюду сводятся к вопросам суммируемости и принадлежности некоторым классам Орлича соответствующих частных операторов, т.е. к некоторым теоремам вложения. Для максимальной функции Харди–Литлвуда эти результаты хорошо известны (см., например, [3]).

Предложенной схемой можно воспользоваться и в нашем случае. Двумерный результат не требует предварительной подготовки и на нем можно сразу же продемонстрировать высказанный тезис.

Пусть $f \in H_1^{\omega}(I^2)$, $x \in I = I_1 \times I_2$. Тогда

$$\begin{aligned} & |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy \\ & \leq |I_1|^{-1} \int_{I_1} |I_2|^{-1} \int_{I_2} |f(y_1, y_2) - f(y_1, x_2)| dy_1 dy_2 \\ & \quad + |I_1|^{-1} \int_{I_1} |f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2)| dy_1 \\ & \leq (\mathcal{M}^1 \circ \mathcal{N}_{\psi}^2 f)(x) \psi(|I_2|) + (\mathcal{N}_{\varphi}^1 f)(x) \varphi(|I_1|). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{M}^1$ обозначает максимальную функцию Харди–Литлвуда по первой переменной, $\mathcal{N}_{\varphi}^1$ обозначает $\mathcal{N}_{\varphi}$ -функцию по первой переменной, а $\mathcal{N}_{\psi}^2$ обозначает $\mathcal{N}_{\varphi}$ -функцию по второй переменной. Конечность почти всюду $\mathcal{N}_{\varphi}^1$ обсуждалась выше, а конечность почти всюду $\mathcal{M}^1 \circ \mathcal{N}_{\psi}^2$ сводится к вопросу о суммируемости $\mathcal{N}_{\psi}^2$, решение которого содержится в [2]. А именно, условие

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t\psi(t)} dt < \infty \quad (9)$$

является необходимым и достаточным для суммируемости $\mathcal{N}_{\varphi} f$ для всех функций $f \in H_1^{\omega}(I^n)$.

Таким образом, если $\varphi(t)$ удовлетворяет (5), а $\psi(t)$ удовлетворяет (9), то для любой функции $f \in H_1^\omega(I^2)$ почти всюду на I^2 справедлива оценка

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x \{ \varphi(|I_1|) + \psi(|I_2|) \}. \quad (10)$$

Соотношение (10) является количественным уточнением (1) в случае, когда I — двумерный интервал.

Естественно, что правая часть (10) может быть заменена более точными, но и более сложными выражениями. Например, в силу инвариантности изотропных классов Гёльдера относительно выбора нумерации осей координат, справедлива аналогичная оценка с заменой I_1 и I_2 местами. Если обозначить $\Omega_{ij}(I) = \max(\varphi(|I_i|); \psi(|I_j|))$, а

$$\Omega = \min\{\Omega_{1,2}(I); \Omega_{2,1}(I)\},$$

то (10) можно переписать в виде

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x \{ \Omega(I) \}.$$

Здесь уже характеристика $\Omega(I)$ зависит не только от абсолютных размеров I , но и от величины “вытянутости”. Безусловно, подбор адекватных характеристик в правой части (10) является важной задачей, требующей дальнейших разработок. Однако, как нам кажется, важно не упустить достаточную прозрачность терминов, в которых выражается связь между размерами интервала и величиной малости o_x в (1). Этого принципа мы старались придерживаться в настоящей работе и в изотропном случае. Как нам кажется, это удалось.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-2} d\delta < \infty. \quad (11)$$

Пусть $\psi(\delta)$ — положительная неубывающая функция, для которой

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta \psi(\delta)} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-2} d\delta < \infty. \quad (12)$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^\omega(I^n)$ почти всюду на I^n справедлива оценка

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x \{ \psi(\text{diam } I) \}, \quad I = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Анизотропный же случай традиционно гораздо более сложен для изучения, по крайней мере в вопросах, связанных с интегральной гладкостью. При этом естественно требовать, чтобы в случае одинаковых мажорант частных модулей непрерывностей анизотропные характеристики превращались в изотропные.

Как это часто бывает в теоремах вложения, поиск вида соответствующих условий представляет, пожалуй, решающую трудность, которую необходимо сначала преодолеть. В связи с этим введем в рассмотрение следующие характеристики.

Считая, для простоты, $\omega_i(t)$ возрастающими функциями с условиями нормировки $\omega_i(1) = 1$, определим функции $\phi_{ij}(t)$ следующим образом:

$$\omega_i(\phi_{ij}(t)) = \omega_j(t), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad t \in (0, 1).$$

Положим также

$$A(j) = \{k : 1 \leq k \leq n, k \neq j\}, \quad A(j, s) = \{k \in A(j) : k \neq s\},$$

$$w_i(t) = \prod_{j \in A(i, n)} \log \frac{1}{\phi_{ji}(t)}.$$

Теперь заметим, что в изотропном случае, очевидно, $\phi_{ij}(t) = t$, поэтому

$$w_i(t) = \prod_{j \in A(i, n)} \log \frac{1}{t} = \left(\log \frac{1}{t} \right)^{n-2}.$$

Это и есть согласование анизотропного и изотропного случаев. Вместо (11) появляется условие

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{\omega_i(t) w_i(t)}{t} dt < \infty. \quad (13)$$

В [6] условие (13) присутствует при доказательстве основного результата. Именно оно является достаточным условием для сильного дифференцирования интеграла функции из $H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$. Условие (8) влечет (13), но является, с нашей точки зрения, более удобным и прозрачным, тем более, что для регулярных модулей (8) окончательно.

Что касается условия на n -й модуль непрерывности, то оно записывается в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_n(\delta_k)}{\psi_n(\delta_k)} < \infty,$$

где $\{\delta_k\}$ – разбивающая последовательность, построенная для $\omega_n(\delta)$. Это условие, на самом деле, – другая форма записи условия К. И. Осколкова (см. теорему А). В таком виде оно применялось в диссертации А. А. Соляника [7].

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему данной работы в анизотропном случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega_i(\delta)$ – модули непрерывности такие, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{\omega_i(t) w_i(t)}{t} dt < \infty$$

и $\{\delta_k\}$ – разбивающая последовательность, построенная для $\omega_n(\delta)$. Пусть $\psi_j(t)$ – положительные неубывающие функции, для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_n(\delta_k)}{\psi_n(\delta_k)} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{\omega_i(t) w_i(t)}{t \psi_i(t)} dt < \infty. \quad (14)$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$ для почти всех $x \in I^n$ справедлива оценка

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i(|I_i|) \right\}, \quad I = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Доказательство этой теоремы в целом следует обозначенной схеме, т.е. вводится некоторый “сильный” аналог $\mathcal{N}_\varphi$ -функции, исследуется вопрос о его суммируемости, а затем колебание оценивается через композиции частных максимальных функций Харди–Литтлвуда и сильных $\mathcal{N}_\varphi$ -функций всевозможных размерностей, меньших n .

Несмотря на прозрачность идейных соображений, их техническая реализация, учитывая разветвленность n -мерной структуры, является весьма нетривиальным моментом. Здесь очень удобным инструментом оказались введенные функции $\phi_{ij}(t)$. Точнее, их хорошие групповые свойства, выраженные в следующей лемме, в которой $\varphi_{ij}(t)$ обозначает обратную к $\phi_{ij}(t)$ функцию.

ЛЕММА А. Для любого $t \in (0, 1)$ и любых $i, j = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, \infty$ справедливы следующие равенства:

$$\phi_{ij}(\phi_{jk}(t)) = \phi_{ik}(t); \quad \varphi_{ij}(t) = \phi_{ji}(t); \quad \phi_{ii}(t) = t; \quad \phi_{ij}(\theta_k^j) = \theta_k^i.$$

Кроме этой леммы нам понадобятся и другие.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L(I^n)$, $f(x) = 0$ для $x \notin I^n$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^i f(x)| dx \leq C(f) \omega_i(f, h), \quad i = 1, \dots, n.$$

В этой лемме левая часть отличается от правой на интегралы от функции f по множествам меры h , возникающих при сдвиге. Очевидно, они мажорируются (с некоторой константой) суммой $\omega_i(f, h) + h\|f\|$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 2. Пусть $g(t) > 0$ такова, что

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \int_0^{2^{-k}} g(t) dt \leq 2 \int_0^1 \frac{g(t)}{t} dt.$$

Теперь мы переходим к лемме, которая вбирает в себя основную трудность работы с многомерными подобластями в I^n . Именно здесь и реализуется упоминавшаяся выше арифметика функций $\phi_{ij}(t)$.

А именно, пусть теперь $\tau \equiv (\tau(1), \dots, \tau(k))$ – некоторая перестановка набора $(1, \dots, k)$. Обозначим

$$\alpha_s \equiv \phi_{\tau(s), \tau(s-1)}(x_{\tau(s-1)})$$

и в этих терминах определим криволинейные симплексы в I^n :

$$E_\tau \equiv \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_{\tau(1)} \leq 1, \alpha_2 \leq x_{\tau(2)} \leq 1, \dots, \alpha_n \leq x_{\tau(n)} \leq 1\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $n = 2$, $\omega_1(t) = t$, $\omega_2(t) = \sqrt{t}$. В этом случае возможны лишь две перестановки набора $(1, 2)$: тождественная, т.е. $\tau: (1, 2) \rightarrow (1, 2)$, и циклическая, т.е. $\tau: (1, 2) \rightarrow (2, 1)$.

Первому случаю соответствует

$$E_{1,2} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_{\tau(1)} \leq 1, \alpha_2 \leq x_{\tau(2)} \leq 1\}.$$

Здесь $\alpha_2 = \phi_{\tau(2), \tau(1)}(x_{\tau(1)}) = \phi_{2,1}(x_1) = x_1^2$, так как подстановка $\phi_{2,1}(t)$ переводит $\omega_2(t) = \sqrt{t}$ в $\omega_1(t) = t$. Итак,

$$E_{1,2} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_1^2 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Во втором случае $\alpha_2 = \phi_{1,2}(x_2) = \sqrt{x_2}$, так как подстановка $\phi_{1,2}(t)$ переводит $\omega_1(t) = t$ в $\omega_2(t) = \sqrt{t}$. Тогда

$$E_{2,1} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq 1, \sqrt{x_2} \leq x_1 \leq 1\}.$$

Идея, лежащая в основе доказательства леммы 3, состоит в замене порядка следования координат в определении множества E , поскольку (см. рис. 1)

$$E_{2,1} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq x_1^2\}$$

и, таким образом, исключая саму параболу, $\chi_{E_{2,1}} + \chi_{E_{1,2}} = 1$ на I^2 .

Рис. 1

ЛЕММА 3. Для всех $x \in I^n$

$$1 \leq \sum_{\tau} \chi_{\tau}(x) \leq n!,$$

где сумма берется по всевозможным перестановкам набора τ , а χ_{τ} обозначает характеристическую функцию множества E_{τ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство очевидно. Докажем левое. Очевидно,

$$\begin{aligned} 1 = \int_{I^n} dx_1 \cdots dx_n &= \int_{I^{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-2} \int_0^1 dx_{n-1} \int_{\phi_{n,n-1}(x_{n-1})}^1 dx_n \\ &\quad + \int_{I^{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-2} \int_0^1 dx_{n-1} \int_0^{\phi_{n,n-1}(x_{n-1})} dx_n. \end{aligned}$$

Во втором интеграле поменяем местами порядок интегрирования по x_{n-1} и x_n :

$$\int_0^1 dx_{n-1} \int_0^{\phi_{n,n-1}(x_{n-1})} dx_n = \int_0^1 dx_n \int_{\varphi_{n,n-1}(x_n)}^1 dx_{n-1}.$$

Учитывая, что $\varphi_{ij}(t) = \phi_{ji}(t)$, получим

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{n-2} \int_0^1 dx_{n-1} \int_{\phi_{n,n-1}(x_{n-1})}^1 dx_n \\ &\quad + \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{n-2} \int_0^1 dx_n \int_{\phi_{n-1,n}(x_n)}^1 dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Применив к каждому из двух получившихся слагаемых описанную процедуру для внешнего $(n-1)$ -мерного интеграла, получим четыре слагаемых,

к которым снова применим описанную процедуру. Продолжая по индукции, получим

$$1 = \sum_{\tau \in T} \int_0^1 dx_{\tau(1)} \int_{\alpha_2}^1 dx_{\tau(2)} \cdots \int_{\alpha_{n-1}}^1 dx_{\tau(n)} = \int_{I^n} \sum_{\tau \in T} \chi_{\tau}(x) dx,$$

где сумма берется по множеству индексов, содержащему 2^n элементов.

Поскольку, по построению, интегралы в предыдущем равенстве получались последовательным разбиением области интегрирования, то подинтегральная сумма не превосходит почти всюду единицы, и, таким образом, лемма 3 доказана.

С помощью этой леммы мы можем заменить интегрирование по I^n интегрированием по множествам E_{τ} , в которых последние $n - 1$ переменных интегрирования отделены от нуля.

Теперь введем сильные $\mathcal{N}_{\varphi}$ -функции, полагая

$$\mathcal{N}_{\varphi}^s(f, x) = \sup_{I, x \in I} \left(|I| \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(|I_i|) \right)^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy,$$

а также соответствующие весовые функции

$$W_i(t) = \prod_{j \in A(i)} \log \frac{1}{\phi_{ji}(t)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega_i(\delta)$ – модули непрерывности такие, что

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\omega_i(t) W_i(t)}{t} dt < \infty,$$

а $\psi_j(t)$ – неубывающие положительные функции, для которых

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\omega_i(t) W_i(t)}{t \psi_i(t)} dt < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$

$$\mathcal{N}_{\psi}^s(f, x) \in L^1(I^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения. Пусть $I = I_1 \times \dots \times I_n$, знак $\ll$ обозначает неравенство, справедливое с некоторой константой, множества $A(j)$ и $A(j, s)$ определены выше. Через

$$I(j) = \prod_{k \in A(j)} I_k, \quad I(j, s) = \prod_{k \in A(j, s)} I_k$$

обозначим подинтервалы I , а через

$$dy(j) = \prod_{k \in A(j)} dy_k, \quad dy(j, s) = \prod_{k \in A(j, s)} dy_k$$

обозначим дифференциалы соответствующих размерностей.

Далее, пусть m_j – натуральные числа, для которых

$$2^{-m_j-1} < |I_j| \leq 2^{-m_j}.$$

Положим теперь $v(I) = (2^{-m_1}, \dots, 2^{-m_n})$.

В силу леммы 3 для x и y из I^n имеем

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \sum_{\tau} |f(y_1, \dots, x_{\tau(1)}, \dots, y_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \chi_{\tau}(v(I)) \\ &\quad + \sum_{\tau} |f(y_1, \dots, x_{\tau(1)}, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n)| \chi_{\tau}(v(I)), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy &\leq \sum_{\tau} |I|^{-1} \int_I |f(y_1, \dots, y_n) - f(y_1, \dots, x_{\tau(1)}, \dots, y_n)| dy \cdot \chi_{\tau}(v(I)) \\ &\quad + n! \sum_{j=1}^n |I(j)|^{-1} \int_{I(j)} |f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, x_j, \dots, y_n)| dy(j). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\psi}^{\tau}(f, x) &= \sup_{I, x \in I, v(I) \in E_{\tau}} (|I| \psi_{\tau(1)}(|I_{\tau(1)}|))^{-1} \\ &\quad \times \int_I |f(y_1, \dots, y_n) - f(y_1, \dots, x_{\tau(1)}, \dots, y_n)| dy, \\ \mathcal{N}_{\psi}^{s, j}(f, x) &= \sup_{I, x \in I} \left(|I(j)| \max_{i \in A(j)} \psi_i(|I_i|) \right)^{-1} \\ &\quad \times \int_{I(j)} |f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, x_j, \dots, y_n)| dy(j). \end{aligned}$$

Так как для любого $i = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{\max_{1 \leq j \leq n} \psi_j(|I_j|)} \leq \frac{1}{\psi_i(|I_i|)},$$

то

$$\mathcal{N}_\psi^s(f, x) \leq \sum_{\tau} \mathcal{R}_\psi^\tau(f, x) + n! \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_\psi^{s,j}(f, x).$$

Поскольку во второй сумме фактически стоят $(n-1)$ -мерные $\mathcal{N}_\varphi^s$ -функции, то, с учетом итеративных соображений, достаточно показать суммируемость $\mathcal{R}_\psi^\tau(f, x)$.

Обозначим

$$E_\tau^* = \{(m_1, \dots, m_n) : (2^{-m_1}, \dots, 2^{-m_n}) \in E_\tau\}.$$

Заменяя супремум по I супремумом по наборам $(2^{-m_1}, \dots, 2^{-m_n}) \in E_\tau$, а затем и на сумму по этим наборам, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\psi^\tau(f, x) &\ll \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in E_\tau^*} 2^{m_1} \int_{-2^{-m_1}}^{2^{-m_1}} dt_1 \dots \\ &\times 2^{m_n} \int_{-2^{-m_n}}^{2^{-m_n}} |f(x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n) \\ &\quad - f(x_1 + t_1, \dots, x_{\tau(1)} + t_{\tau(1)}, \dots, x_n + t_n)| dt_n \\ &\times [\psi_{\tau(1)}(2^{-m_{\tau(1)}})]^{-1} \\ &\ll \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in E_\tau^*} \sum_{|\varepsilon_1|=1, \dots, |\varepsilon_n|=1} 2^{m_1} \int_0^{2^{-m_1}} dt_1 \dots \\ &\times 2^{m_n} \int_0^{2^{-m_n}} |f(x_1 + \varepsilon_1 t_1, \dots, x_n + \varepsilon_n t_n) \\ &\quad - f(x_1 + \varepsilon_1 t_1, \dots, x_{\tau(1)} + \varepsilon_{\tau(1)} t_{\tau(1)}, \dots, x_n + \varepsilon_n t_n)| dt_n \\ &\times [\psi_{\tau(1)}(2^{-m_{\tau(1)}})]^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\psi^\tau(f, x)\|_1 &\ll \sum_{|\varepsilon_1|=1, \dots, |\varepsilon_n|=1} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in E_\tau^*} 2^{m_{\tau(1)}} \\ &\times [\psi_{\tau(1)}(2^{-m_{\tau(1)}})]^{-1} \int_0^{2^{-m_{\tau(1)}}} \|\Delta_{\varepsilon_{\tau(1)} t}^{\tau(1)} f(x)\|_1 dt. \end{aligned}$$

Оценим произвольное слагаемое. Не ограничивая общности, считаем

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1, \quad \tau(1) = 1, \dots, \tau(n) = n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in E_\tau^*} 2^{m_1} [\psi_1(2^{-m_1})]^{-1} \int_0^{2^{-m_1}} \|\Delta_t^1 f(x)\|_1 dt \\ & \ll \sum_{m_1=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m_2 \in M_2} \cdots \sum_{m_n \in M_n} 1 \right\} 2^{m_1} [\psi_1(2^{-m_1})]^{-1} \int_0^{2^{-m_1}} \|\Delta_t^1 f(x)\|_1 dt, \end{aligned}$$

где $M_k = \{m_k : \phi_{k, k-1}(2^{-m_{k-1}}) \leq 2^{-m_k}\}$. Сумму в фигурных скобках подсчитаем по индукции. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m_{n-1} \in M_{n-1}} \sum_{m_n \in M_n} 1 & \ll \sum_{m_{n-1} \in M_{n-1}} \log \frac{1}{\phi_{n, n-1}(2^{-m_{n-1}})} \\ & \ll \log \frac{1}{\phi_{n, n-1}(\phi_{n-1, n-2}(2^{-m_{n-2}}))} \sum_{m_{n-1} \in M_{n-1}} 1. \end{aligned}$$

Однако, в силу леммы 3 $\phi_{n, n-1}(\phi_{n-1, n-2}(2^{-m_{k-2}})) = \phi_{n, n-2}(2^{-m_{k-2}})$. Таким образом,

$$\sum_{m_{n-1} \in M_{n-1}} \sum_{m_n \in M_n} 1 \ll \log \frac{1}{\phi_{n, n-2}(2^{-m_{n-2}})} \log \frac{1}{\phi_{n-1, n-2}(2^{-m_{n-2}})}.$$

Продолжая эту процедуру по индукции, получим

$$\sum_{m_2 \in M_2} \cdots \sum_{m_n \in M_n} 1 \ll \prod_{j=2}^n \log \frac{1}{\phi_{j,1}(2^{-m_1})}.$$

Теперь, учитывая монотонность функций $\psi_1(t)$ и $\phi_{j,1}(t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\psi^\tau(f, x)\|_1 & \ll \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in E_\tau^*} 2^{m_1} [\psi_1(2^{-m_1})]^{-1} \int_0^{2^{-m_1}} \|\Delta_t^1 f(x)\|_1 dt \\ & \ll \sum_{m_1=0}^{\infty} \prod_{j=2}^n \log \frac{1}{\phi_{j,1}(2^{-m_1})} \cdot 2^{m_1} \int_0^{2^{-m_1}} \frac{\|\Delta_t^1 f(x)\|_1}{\psi_1(t)} dt \\ & \ll \sum_{m_1=0}^{\infty} 2^{m_1} \int_0^{2^{-m_1}} \frac{\|\Delta_t^1 f(x)\|_1}{\psi_1(t)} \prod_{j=2}^n \log \frac{1}{\phi_{j,1}(t)} dt. \end{aligned}$$

Применение лемм 1 и 2 дает

$$\|\mathcal{R}_\psi^\tau(f, x)\|_1 \ll \int_0^1 \frac{\omega_1(t)}{t\psi_1(t)} \prod_{j=2}^n \log \frac{1}{\phi_{j,1}(t)} dt = \int_0^1 \frac{\omega_1(t)W_1(t)}{t\psi_1(t)} dt < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-1} d\delta < \infty,$$

а $\psi(t)$ – положительная возрастающая функция, для которой

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta \psi(\delta)} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{n-1} d\delta < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in H_1^\omega(I^n)$

$$\mathcal{N}_\psi^s(f, x) \in L^1(I^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, достаточно заметить, что в изотропном случае $\phi_{ji}(t) = t$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Пусть $f \in H_1^{\omega_1, \dots, \omega_n}(I^n)$ и $\hat{x}$ означает отсутствие соответствующей координаты в векторной записи, например $\hat{x}_1 = (x_2, \dots, x_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} & |I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy \\ & \leq |I_n|^{-1} \int_{I_n} |I(n)|^{-1} \int_{I(n)} |f(y_1, \hat{y}_1) - f(y_1, \hat{x}_1)| dy_1 d\hat{y}_1 \\ & \quad + |I_n|^{-1} \int_{I_n} |f(x_1, \hat{x}_1) - f(y_1, \hat{x}_1)| dy_1 \\ & \leq (\mathcal{M}^1 \circ \mathcal{N}_\psi^{s,n})(f, x) \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \psi_j(|I_j|) \right\} + \mathcal{N}_{\psi_n}^1(f, x) \psi_n(|I_n|). \end{aligned}$$

Конечность почти всюду первого слагаемого следует из суммируемости $\mathcal{N}_\psi^{s,n}(f, x)$, которая, с учетом размерности, обеспечивается сходимостью интегралов в (14).

Конечность почти всюду второго слагаемого следует из сходимости ряда в (14). Действительно, если

$$\int_0^1 \frac{dt}{t \tilde{\psi}(t)} < \infty$$

или, что тоже самое,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\psi}(2^{-k})} < \infty,$$

то в силу теоремы А

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy \leq C(x) \{ \omega(|I|) \tilde{\psi}(\Omega(|I|)) \}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\psi}(2^{-k})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_k)}{\omega(\delta_k) \tilde{\psi}(\Omega(\delta_k))}.$$

Обозначив $\psi(t) = \omega(t) \tilde{\psi}(\Omega(t))$, получим $\mathcal{N}_{\psi}(f, x) < C(x)$ при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega(\delta_k)}{\psi(\delta_k)} < \infty.$$

Аналогичным образом доказывается конечность почти всюду $\mathcal{N}_{\psi_n}^1(f, x)$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 1 является очевидным следствием теоремы 2 в силу согласования изотропного и анизотропного случаев.

Обсудим теперь точность оценки из теоремы 1. Ограничимся двумерным случаем, но прежде сделаем следующее одномерное наблюдение.

Во-первых, $\Omega(t) \gg t$ и, таким образом, для $f \in H_1^{\omega}(I^1)$ почти всюду на I^1 справедлива оценка

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x\{\omega(|I|)\psi(|I|)\}, \quad \text{diam } I \rightarrow 0, \quad x \in I.$$

Во-вторых, если модуль непрерывности удовлетворяет условию Бари-Стечкина

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_{\delta}^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta)),$$

то для разбивающей последовательности $\{\delta_k\}$ справедливо соотношение

$$\frac{\delta_k}{\delta_{k+1}} = O(1).$$

Отсюда следует, что с некоторым $p \in (0; 1)$

$$\delta \leq \Omega(\delta) \leq C\delta^p.$$

Пусть теперь $\psi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\psi(t)} = \infty.$$

Определим функцию $\sigma(t) = \psi(t^{1/p}/C)$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\sigma(t)} = \infty,$$

и в силу теоремы А для некоторой функции $f \in H_1^\omega(I^1)$

$$\varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\omega(\delta)\sigma(\Omega(\delta))} = \infty.$$

Однако, $\sigma(\Omega(\delta)) \geq \sigma(C\delta^p) = \psi(\delta)$, и, следовательно, почти всюду

$$\varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\omega(\delta)\psi(\delta)} = \infty.$$

Таким образом, из теоремы А можно извлечь следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ А. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, не эквивалентный δ . Если $\psi(t) \in \Phi$ – положительная неубывающая функция, для которой

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t\psi(t)} < \infty, \quad (15)$$

то для любой функции $f \in H_1^\omega(I^1)$ почти всюду на I^1 справедлива оценка

$$D_\delta(f, x) = O_x\{\psi(\delta)\}.$$

Если же $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Бари–Стечкина, а для функции $\psi(t)$ условие (15) не выполнено, то существует функция $f \in H_1^\omega(I^1)$, для которой

$$\varlimsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\psi(\delta)} = \infty.$$

Таким образом, для модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Бари–Стечкина, точность оценки, полученной в теореме 1, следует из следствия А.

Условие Бари–Стечкина означает степенной рост модуля, однако, не наилучший. Оно нарушается при подходе как к быстро растущим модулям типа $\omega(\delta) = \delta$ (за счет второго слагаемого), так и при подходе к медленно растущим модулям, типа $\omega(\delta) = \{\log(1/\delta)\}^{-1}$ (за счет первого слагаемого).

Для быстро растущих модулей одномерные контрпримеры оставляют зазор между оценками снизу и сверху порядка логарифмического множителя. Вопрос о том, как его убрать, остается открытым. С нашей точки зрения он достаточно принципиальный, так как в одномерном случае при подходе к $\omega(\delta) = \delta$ качество сходимости улучшается, а для $\omega(\delta) = \delta$ и вовсе не происходит потерь (по сравнению со сходимостью по норме). Будет ли улучшаться качество сходимости в двумерном случае – нам не известно.

С другой стороны, для медленно растущих модулей одномерные контрпримеры не подходят совсем, так как при подходе модулей к $\omega(\delta) = \{\log(1/\delta)\}^{-1}$ сходимость ухудшается, а потом исчезает и вовсе.

В полном соответствии с этим ухудшается и качество оценки в теореме 1 ввиду все более и более медленной сходимости интеграла в (12). Однако, нам удалось показать, что в этом случае оценка остается точной для регулярных модулей непрерывности. Ей даже удается придать вид оценки из следствия А.

С этой целью обозначим

$$D_{\delta}^s(f, x) = \sup_{\substack{I, x \in I \\ \text{diam } I = \delta}} |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy.$$

Тогда, учитывая положительный результат для изотропного случая, приведем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. (i) Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, не эквивалентный δ , такой, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

и $\psi(t)$ – положительная неубывающая функция, удовлетворяющая условию (15). Тогда для любой функции $f \in H_1^{\omega}(I^2)$ почти всюду на I^2 справедлива оценка

$$D_{\delta}^s(f, x) = O_x\{\psi(\delta)\}.$$

(ii) Если же (15) не выполняется, а модуль непрерывности удовлетворяет условию невозрастания функции $\omega(t)t^{-1/2}$, и $\omega(t)/\psi(t)$ не убывает, то существует функция $f \in H_1^{\omega}(I^2)$, для которой

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_{\delta}^s(f, x)}{\psi(\delta)} = \infty,$$

почти всюду на I^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из теоремы 1. Докажем оценку снизу. Легко проверить, что условие регулярности модуля непрерывности относительно $\sqrt{t}$ обеспечивает выполнение следующего равенства: $\omega(\delta_k) = 2^{-k}$. Тогда, учитывая монотонность отношения $\omega(t)/\psi(t)$, получим

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta\psi(\delta)} d\delta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\delta_k}^{\delta_{k-1}} \frac{\omega(\delta)}{\delta\psi(\delta)} d\delta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_{k-1})}{\psi(\delta_{k-1})} \log \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_{k-1})}{\psi(\delta_{k-1})} \log \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} = \infty.$$

Теперь возможны две ситуации. Первая, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_k)}{\psi(\delta_k)} = \infty. \quad (16)$$

В этом случае легко видеть, что требуемая оценка следует из одномерного случая, так как сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta \psi_0(\delta)} d\delta$$

эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_0(2^{-k})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_0(\Omega(\delta_k))}.$$

При этом с некоторой функцией $f \in H_1^\omega(I^1)$ справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\omega(\delta) \psi_0(\Omega(\delta))} = \infty.$$

Если теперь $\psi_0(\Omega(t))\omega(t) = \psi(t)$, то последнее соотношение переписется в виде

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{D_\delta^*(f, x)}{\psi(\delta)} = \infty.$$

При этом оно имеет место почти всюду при наличии (16).

Таким образом, остался второй случай, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_k)}{\psi(\delta_k)} < \infty. \quad (17)$$

Введем множества

$$Q_k = [0, \delta_k]^2, \quad E_k = \{(x_1, x_2) : \delta_k \leq x_1 \leq \delta_{k-1}, 0 \leq x_2 x_1 \leq \delta_k \delta_{k-1}\}.$$

Тогда

$$|E_k| = \delta_k \delta_{k-1} \log \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}, \quad m_k = \left[\frac{\omega(\delta_{k-1})}{\psi(\delta_{k-1}) \delta_{k-1} \delta_k} \right] + 1$$

и, таким образом,

$$m_k |E_k| \geq \frac{\omega(\delta_{k-1})}{\psi(\delta_{k-1})} \log \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k |E_k| = \infty.$$

Тогда по лемме Кальдерона о сдвигах (см., например, [3]) определим сдвиги τ_i^k , $i = 1, \dots, m_k$, $k \geq 0$, так, чтобы верхний предел множеств $\tau_i^k(E_k)$ имел полную меру. Положим

$$\lambda_k = \psi(\delta_{k-1}) \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$$

и получим

$$\lambda_k m_k \delta_k^2 \leq 2\omega(\delta_{k-1}) = 4\omega(\delta_k).$$

Обозначив теперь через χ_i^k характеристическую функцию множества $\tau_i^k(E_k)$, определим функции

$$f_k^i = \lambda_k \chi_i^k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} f_k^i.$$

Тогда для $\delta_{j-1} < h \leq \delta_j$ и для $i = 1, 2$, с учетом свойств $\{\delta_k\}$ (см. [1]), имеем

$$\begin{aligned} \omega_i(f, h) &\ll h \sum_{k=1}^j \frac{\lambda_k m_k \delta_k^2}{\delta_k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \lambda_k m_k \delta_k^2 \\ &\ll h \sum_{k=1}^j \frac{\omega(\delta_k)}{\delta_k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \omega(\delta_k) \ll \omega(h). \end{aligned}$$

Таким образом, $f \in H_1^{\omega}(I^2)$.

Далее, с учетом (17),

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k |Q_k| \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_{k-1})}{\psi(\delta_{k-1})} \cdot \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\delta_k)}{\psi(\delta_k)} < \infty.$$

Следовательно, мера верхнего предела множеств $\tau_i^k(Q_k)$ равна нулю, и, таким образом, почти каждая точка x содержится в конечном числе носителей функций f_k^i .

Пусть теперь $F = \lambda_k \chi_{Q_k}$. Тогда для $x \in E_k$ можно подобрать $I \ni x$ (см. рис. 2) такой, что

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |F(y) - F(x)| dy &= |I|^{-1} \int_I |F(y)| dy = \frac{\lambda_k |Q_k|}{|I|} \\ &\geq \frac{\lambda_k \delta_k^2}{\delta_k \delta_{k-1}} = \psi(\delta_{k-1}). \end{aligned}$$

Рис. 2

Обозначив через $l(I) = \max(|I_1|; |I_2|)$, получим

$$|I|^{-1} \int_I |F(y) - F(x)| dy \geq \psi(l(I)). \quad (18)$$

Обозначим $Q_i^k = \tau_i^k(Q_k)$. Пусть теперь x принадлежит не более, чем n кубам Q_i^k . Пусть $x \in I$ и $\text{diam } I$ настолько мал, чтобы либо I входил целиком в Q_i^k , либо не пересекался с Q_i^k для $k \leq n$, а для $k = n$ выполняется соотношение типа (18). Тогда

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| dy &\geq \left| \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m_k} |I|^{-1} \int_I [f_k^i(y) - f_k^i(x)] dy \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_n} |I|^{-1} \int_I [f_n^i(y) - f_n^i(x)] dy \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} |I|^{-1} \int_I [f_k^i(y) - f_k^i(x)] dy \right| \\ &= |\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3|. \end{aligned}$$

В силу взаимного расположения I и носителей f_k^i $\Sigma_1 = 0$. Далее, с учетом (18), $\Sigma_2 \geq \psi(l(I))$, а так как $\Sigma_3 \geq 0$, то $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \geq \psi(l(I))$, откуда и следует требуемое. Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. (i) Пусть $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой функции $f \in H_1^\omega(I^2)$ для почти всех $x \in I^2$

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x\{(\text{diam } I)^{\alpha-\varepsilon}\},$$

где $\varepsilon > 0$. Положить $\varepsilon = 0$ нельзя.

(ii) Пусть $\omega(\delta) = \{\log(1/\delta)\}^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. Тогда для любой функции $f \in H_1^\omega(I^2)$ для почти всех $x \in I^2$

$$|I|^{-1} \int_{I \ni x} |f(y) - f(x)| dy = O_x\{\log(1/\text{diam } I)\}^{-\alpha+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$. Положить $\varepsilon = 0$ нельзя.

В заключение автор выражает благодарность Ю. В. Крякину за полезные обсуждения и помощь при подготовке работы к публикации.

Одесский государственный университет
Институт математики, экономики и механики
E-mail: root@opi.odessa.ua

Поступило
13.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Осколков К. И. Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). С. 563–589.
- [2] Коляда В. И. Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 3.
- [3] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [4] Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. 1968. Т. 32. С. 649–686.
- [5] Панджикидзе Л. К. Теоремы вложения для функций многих переменных // Сообщ. АН СССР. 1970. Т. 60. № 1. С. 29–31.
- [6] Стоколос А. М. О сильном дифференцировании интегралов функций из классов Гёльдера // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 84–104.
- [7] Соляник А. А. О приближении функций из H^p в верхней полуплоскости. Дисс. ... к. ф.-м. н.. Одесса: ОГУ, 1985.