Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова, Проблема Титчмарша с числами, имеющими заданное число простых делителей, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 586–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:03:22

ПРОБЛЕМА ТИТЧМАРША С ЧИСЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ ЗАДАННОЕ ЧИСЛО ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова

В 1930 году Е. К. Титчмарш [1], приняв расширенную гипотезу Римана, нашел асимптотику суммы

$$\sum_{p < N} \tau(p-1),$$

где p – простое число, $\tau(n)$ – число делителей n . Поэтому бинарные аддитивные задачи

$$\begin{aligned} p - xy &= a, & p < N, \\ p + xy &= N, & x, y \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1}$$

носят название проблемы Титчмарша.

Впервые безусловное решение этих задач было получено в 60-е годы Ю. В. Линником [2], созданным им дисперсионным методом. Он нашел асимптотику числа решений первого из уравнений (1) при $a = 1$. Б. М. Бредихин [3] решил эту проблему для любого фиксированного $a \neq 0$. Он доказал асимптотическую формулу с остатком $O(N/\ln^{1+\varepsilon} N)$, где $\varepsilon > 0$. Отметим, что с наилучшим остатком, к настоящему времени равным $O(N \ln^{-A} N)$, где A – любая положительная постоянная при фиксированном $a \neq 0$, результат получен в работе [4].

В последующие годы обобщением проблемы Титчмарша в направлении, которому посвящена настоящая работа, занимались М. Б. Барбан [5], А. К. Каршиев [6], Ж. А. Пияндина [7] и А. Фуджи [8]. В этих работах найдена асимптотика суммы

$$\sum_{n < N} \tau(n+a), \tag{2}$$

где n в работах [5] и [8] равно произведению двух простых чисел $p_1 < N^\alpha$, $p_2 < N^{1-\alpha}$, в [6] n равно произведению k простых чисел, причем $p_i \leq N^{\alpha_i}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00260.

$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < 1/7$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$. И, наконец, в работе [7] n имеет не больше шести простых делителей, больших $N^{1/883}$.

Целью настоящей работы является нахождение асимптотики числа решений уравнения

$$n + xy = N,$$

где x, y – натуральные числа, а n имеет ровно k простых делителей с учетом их кратности. Причем k , в отличие от предыдущих работ, может меняться вместе N и полученные результаты равномерны по $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$ и $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$, где $\varepsilon > 0$, $\ln_2 N = \ln \ln N$. Заметим, что исследования в этом направлении были начаты в работе [9]. В ней найдена асимптотика суммы (2), когда n имеет k простых делителей $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$ и $a = 1$.

Пусть $\Omega(n)$ – число простых делителей n с учетом их кратности. Обозначим

$$N(x, k) = |\{n : n \leq x, \Omega(n) = k\}|,$$

где $|\mathcal{A}|$ – число элементов в множестве $\mathcal{A}$. Саз [10] и Сельберг [11] доказали, что при $N \geq 3$, $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$

$$N(N, k) = \frac{N}{\ln N} F\left(\frac{k}{\ln_2 N}\right) \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\ln_2 N}\right)\right), \quad (3)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1},$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера. При $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq \ln N / \ln 2$ поведение $N(N, k)$ исследовал Николас [12]. Он доказал, что при $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq \ln N / \ln 2$

$$N(N, k) = \frac{CN}{2^k} \ln \frac{N}{2^k} + O\left(\frac{N}{2^k} \ln^\beta \frac{3N}{2^k}\right), \quad (4)$$

где $0 < \beta < 1$ и

$$C = \frac{1}{4} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right).$$

Заметим, что при $k \ln 2 > (2 + \varepsilon) \ln_2 N$ последовательность чисел, имеющих k простых делителей, будет более редкая, чем последовательность простых чисел.

Рассматриваемая задача сводится к нахождению асимптотики суммы

$$S(N, k) = \sum_{\substack{n < N \\ \Omega(n)=k}} \tau(N - n).$$

Основной результат работы следующий.

ТЕОРЕМА. Если $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$, то

$$S(N, k) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) N^{\frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!}} \Phi \left(\frac{k}{\ln_2 N} \right) \\ \times E \left(N, \frac{k}{\ln_2 N} \right) E(N) \left(1 + O \left(\frac{(\ln_3 N)^3}{\ln_2 N} \right) \right),$$

где $\ln_2 N = \ln \ln N$, $\ln_3 N = \ln(\ln_2 N)$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z \left(1 - \frac{z}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{p^2 - p + 1} \right),$$

$$E(N) = \prod_{p|N} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1},$$

$$E(N, z) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{z}{p^2 - p + 1} \right)^{-1} \\ \times \left(1 + \sum_{r < \alpha(N, p)} \frac{z}{p^r} + \left(\frac{p^2 - p + 1}{(p-1)^2} - \frac{z}{(p-1)^2} \right) \frac{z^{\alpha(N, p)}}{p^{\alpha(N, p)}} \right),$$

$\alpha(N, p)$ – показатель степени, с которой p входит в каноническое разложение N .

Если $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$ при $\alpha(N, 2) \leq k - (2 + \varepsilon_1) \ln_2 N$,

$$S(N, k) = D(N) (\alpha(N, 2) + 1) D \frac{N}{2^k} \ln^2 N + O \left(\frac{N}{2^k} \ln^{2-\rho} N \right),$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $0 < \rho < 1$,

$$D = \frac{1}{8} \prod_p \frac{(p^2 - p - 1)(p-1)}{p^2(p-2)},$$

$$D(N) = \prod_{\substack{p|N \\ p > 2}} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} \left(1 + \sum_{r < \alpha(N, p)} \frac{2^r}{p^r} + \frac{p^2 - p + 1}{(p-1)^2} \cdot \frac{2^{\alpha(N, p)}}{p^{\alpha(N, p)}} \right),$$

а при любых $\alpha(N, 2)$

$$S(N, k) = D \cdot D(N) \cdot N \alpha(N) 2^{-k} \ln^2 N (1 + o(1)),$$

где $\alpha(N) = \min(\alpha(N, 2), k - 2 \ln_2 N)$.

Приведем необходимые вспомогательные результаты. Первые две леммы являются соответственно аналогами теоремы А.И. Виноградова–Бомбьери и неравенства Бруно–Титчмарша. Они доказаны в [9] (см. теоремы 1, 2 и замечание к теореме 2). Обозначим

$$\mu(x, k, t, a, d) = |\{n : n \leq x, \Omega(n) = k, (n, P(t)) = 1, n \equiv a \pmod{d}\}|,$$

где $P(t) = \prod_{p < t} p$. Везде далее $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – сколь угодно малые положительные числа.

ЛЕММА 1. Пусть $2 \leq t \leq \sqrt{x}$, $k \leq (\ln_2 x)^2$ и

$$\Delta_k(t) = \sum_{d \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{(a,d)=1} \left| \mu(y, k, t, a, d) - \frac{1}{\varphi(d)} \left| \{n : n \leq y, \Omega(n) = k, (n, dP(t)) = 1\} \right| \right|.$$

Тогда

$$\Delta_k(t) \ll Q\sqrt{x} \exp((\ln_2 x)^{2+\varepsilon}) + x(\ln x)^{-B},$$

где $\varepsilon > 0$, B – любая положительная постоянная.

ЛЕММА 2. Пусть $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 x$, $0 < \varepsilon < 1$, $d \leq x^{1/2+\alpha(k)}$, $2 \leq t \leq x^{\beta(k)}$, $\alpha(k) = 1/(3k)$, $\beta(k) = \frac{1}{10} \exp(-k/2)$. Тогда существует постоянная $c(\varepsilon, \varepsilon_1)$, с которой

$$\mu(x, k, t, a, d) \leq c(\varepsilon, \varepsilon_1) \frac{x}{\varphi(d) \ln x} (1 + \varepsilon_1)^k \frac{(\ln(\ln x / \ln t))^{k-1}}{(k-1)!},$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1$.

Доказательство следующей леммы можно найти во многих работах (см., например, [13, лемма 3.2]). Здесь нам необходимо проследить за зависимостью остатка от a .

ЛЕММА 3. Пусть a – натуральное число. Тогда

$$\sum_{\substack{d < N \\ (d,a)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)^{-1} \ln N \\ + O\left(\sum_{d|a} \frac{1 + \ln d}{d}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)},$$

получим, что исследуемая сумма равна

$$\sum_{\substack{n < N \\ (n,a)=1}} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{\substack{d < N \\ (d,a)=1}} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \sum_{\substack{n < N/d \\ (n,a)=1}} \frac{1}{n}.$$

Во внутренней сумме, избавившись от условия $(n, a) = 1$, получим, что она равна

$$\sum_{t|a} \frac{\mu(t)}{t} \left(\ln \frac{N}{d} - \ln t + O(1) \right).$$

Подставив в предыдущее равенство, имеем

$$\sum_{\substack{d < N \\ (d, a) = 1}} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \ln N + O\left(\sum_{d|a} \frac{1 + \ln d}{d} \right).$$

Отсюда, отбросив в первой сумме условие $d < N$, получаем утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть N – натуральное число и $\sum'$ означает, что суммирование ведется по d с $r \leq b \ln_2 N$, где r – показатель степени, с которым 2 входит в каноническое разложение d . Тогда при $t < 3 - \varepsilon$

$$\sum'_{d|N} \frac{t^{\Omega(d)}}{d} \ll (\ln_2 N)^{t+1} \left(\left(\frac{t}{2} \right)^{b \ln_2 N} + 1 \right), \quad (5)$$

если $t \leq 2$, то

$$\sum'_{d|N} \frac{\ln d}{d} t^{\Omega(d)} \ll \ln_2^{t+2} N, \quad \sum'_{\substack{d|N \\ d > V}} \frac{t^{\Omega(d)}}{d} \ll \frac{\ln_2^{t+2} N}{\ln V}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sum_{p|N} \frac{t}{p} \leq t \sum_{p \leq \ln N} \frac{1}{p} + O(1) \leq t \ln_3 N + O(1),$$

где $\ln_3 N = \ln \ln \ln N$. Поэтому имеем

$$\sum'_{d|N} \frac{t^{\Omega(d)}}{d} \leq b \left(\left(\frac{t}{2} \right)^{b \ln_2 N} + 1 \right) \ln_2 N \sum_{\substack{d|N \\ (d, 2) = 1}} \frac{t^{\Omega(d)}}{d}.$$

Последняя сумма будет

$$\ll \exp \left(\sum_{p|N} \frac{t}{p} \right) \ll (\ln_2 N)^t.$$

То есть соотношение (5) доказано. Докажем второе неравенство. Имеем

$$\begin{aligned} \sum'_{d|N} \frac{\ln d}{d} t^{\Omega(d)} &\leq \sum_{p^r|N} \frac{\ln p^r}{p^r} \sum'_{d|N} \frac{t^{\Omega(d)}}{d} \\ &\ll \left(\sum_{p \leq \ln N} \frac{\ln p}{p} + O(1) \right) (\ln_2 N)^{t+1} \ll (\ln_2 N)^{t+2}. \end{aligned}$$

Последняя оценка следует из предыдущей, если условие $d > V$ отбросим, заменив $1/d$ на $\ln d/(d \ln V)$.

ЛЕММА 5. Пусть n пробегает числа вида $n = 2^r m$, где $r \leq T \leq \frac{1}{2} \ln x$, $(m, 2) = 1$. Тогда

$$\sum'_{n \leq x} 2^{\Omega(n)} \ll xT \ln x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через m нечетные числа. Тогда

$$\sum_{m \leq y} 2^{\Omega(m)} \leq \sum_{m \leq \sqrt{y}} 2^{\Omega(m)} + \frac{1}{\ln \sqrt{y}} \sum_{m \leq y} 2^{\Omega(m)} \ln m.$$

Первая сумма будет

$$\leq \sqrt{y} \sum_{m \leq \sqrt{y}} \frac{2^{\Omega(m)}}{m} \ll \sqrt{y} \ln^2 y \ll y \ln y.$$

Во второй сумме $\ln m$ заменим $\sum_{d|m} \Lambda(d)$, где $\Lambda(d)$ — функция Мангольда. Получим, что она

$$\begin{aligned} &\ll \frac{1}{\ln y} \sum_{m \leq y} 2^{\Omega(m)} \sum_{p \leq y/m} \ln p + \frac{1}{\ln y} \sum_{\substack{r \geq 2 \\ p^r \leq y \\ p > 2}} 2^r \ln p \sum_{m < y/p^r} 2^{\Omega(m)} \\ &\ll \frac{y}{\ln y} \sum_{m \leq y} \frac{2^{\Omega(m)}}{m} + y \ln y \sum_{r \geq 2} \sum_{p > 2} 2^r \frac{\ln p}{p^r} \ll y \ln y. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum'_{n \leq x} 2^{\Omega(n)} \ll \sum_{r \leq T} 2^r \sum_{m \leq x/2^r} 2^{\Omega(m)} \ll xT \ln x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим

$$\mu(N, a, d, k) = |\{n : n < N, n \equiv a \pmod{d}, \Omega(n) = k\}|.$$

Представив $\tau(n)$ как сумму по делителям и просуммировав под гиперболой, получим

$$\begin{aligned} S(N, k) &= \sum_{\substack{n < N \\ \Omega(n) = k}} \tau(N - n) = 2 \sum_{d \leq Q} \mu(N, N, d, k) \\ &\quad + O\left(\sum_{Q \leq d \leq \sqrt{N}} \mu(N, N, d, k) + \sum_{d \leq \sqrt{N}} \mu(\sqrt{N}, N, d, k) \right). \end{aligned}$$

Возьмем $Q = \sqrt{N} \exp(-\ln_2^4 N)$. Тогда часть третьей суммы по $d \leq Q$, оцененная тривиально, равна $O(N \ln^{-A} N)$, где A — любая положительная постоянная.

Таким образом, имеем

$$S(N, k) = 2S_1(N, k) + O\left(\sum_{Q \leq d \leq \sqrt{N}} \mu(N, N, d, k) + \frac{N}{\ln^A N} \right), \quad (7)$$

где

$$S_1(N, k) = \sum_{d \leq Q} \mu(N, N, d, k).$$

Оценим остаток. Учитывая, что $\tau(N) \ll N^\varepsilon$ [14, лемма 5], взяв $V = N^{3\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq Q}^{\leq \sqrt{N}} \mu(N, N, d, k) &\ll \sum_{\substack{\delta | N \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{d \geq Q \\ d\delta \geq N}}^{\leq \sqrt{N}} \mu\left(\frac{N}{\delta}, \frac{N}{\delta}, d, k - \Omega(\delta)\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{\delta | N \\ \delta > V}} \frac{N}{\delta} \ln N = R_1(N, k) + O(N^{1-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим $R_1(N, k)$ при $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$. Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{N}{\delta}, \frac{N}{\delta}, d, k - \Omega(\delta)\right) &\ll \frac{N}{\delta \ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k - \Omega(\delta) - 1}}{(k - \Omega(\delta) - 1)!} \frac{(1 + \varepsilon_1)^{k - \Omega(\delta) - 1}}{\varphi(d)} \\ &\ll \frac{(2 - \varepsilon)^{\Omega(\delta)}}{\delta} \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k - 1}}{(k - 1)!} \frac{(1 + \varepsilon_1)^k}{\varphi(d)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$(k-1) \cdots (k - \Omega(\delta) - 1) \leq (2 - \varepsilon)^{\Omega(\delta)} \ln_2^{\Omega(\delta)} N.$$

Подставляя полученный результат в $R_1(N, k)$, воспользовавшись леммой 3 и неравенством (5) из леммы 4, находим

$$\begin{aligned} R_1(N, k) &\ll \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} (1 + \varepsilon_1)^k \sum_{\delta|N} \frac{(2 - \varepsilon)^{\Omega(\delta)}}{\delta} \sum_{d\delta \geq Q}^{\leq \sqrt{N}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\ll \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \ln^{\varepsilon_2} N, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varepsilon_2 > 0$.

Оценим $R_1(N, k)$ в случае $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$. Из условий $n < N/\delta$, $n \equiv N/\delta \pmod{d}$ следует, что $n = N/\delta - dm$, $m < N/(\delta d)$.

Пусть $N/\delta - md = n_1 n_2$, где у n_1 все простые делители $\leq z$, а у n_2 они больше z . Возьмем $z = \exp(\sqrt[3]{\ln_3 N} \ln N / \ln_2 N)$. Тогда $\Omega(n_2) \leq T = \ln_2 N / \sqrt[3]{\ln_3 N}$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{N}{\delta}, \frac{N}{\delta}, d, l\right) \\ &\leq \sum_{\substack{n_1 \leq (N/\delta)^{1/10} \\ l - T \leq \Omega(n_1) \leq l}} \left| \left\{ m : m \leq \frac{N}{\delta d}, \frac{N}{\delta} - dm \equiv 0 \pmod{n_1}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{N/\delta - md}{n_1}, P(z) \right) = 1 \right\} \Big| \\ &+ \sum_{\substack{\leq N/\delta \\ n_1 \geq (N/\delta)^{1/10}}} \left| \left\{ m : m \leq \frac{N}{\delta d}, md \equiv \frac{N}{\delta} \pmod{n_1} \right\} \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

Вторая сумма после подстановки в (8) даст вклад в $R_1(N, k)$, равный

$$\ll \sum_{\delta \leq V} \sum_{n < N/\delta} \tau(n) \left| \left\{ n_1 : n_1 \mid \frac{N}{\delta} - n, \left(\frac{N}{\delta} \right)^{1/10} < n_1 < \frac{N}{\delta} \right\} \right|.$$

К сумме по n применим неравенство Коши. Получим, что она

$$\leq \left(\sum_{n < N/\delta} \tau^2(n) \tau\left(\frac{N}{\delta} - n\right) \sum_{(N/\delta)^{1/10} \leq n_1 \leq N/\delta} \frac{N}{\delta n_1} \right)^{1/2}.$$

Первая из вновь полученных сумм после повторного применения неравенства Коши и леммы 6 [14] равна

$$\ll \left(\sum_{n < N/\delta} \tau^4(n) \sum_{n < N/\delta} \tau^2(n) \right)^{1/2} \ll \frac{N}{\delta} \ln^9 N.$$

Вторая из вновь полученных сумм

$$\ll \frac{N}{\delta} \ln N \max_{N^{1/20} \leq M \leq N} \frac{1}{M} |\{n_1 : n_1 \leq 2M\}|.$$

Из леммы 5.2 [15], учитывая выбор z , получим

$$|\{n_1 : n_1 \leq 2M\}| \ll M \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln z} \ln_3 z + 2 \ln_2 z\right) \ll M \ln^{-2B} N$$

в указанной области изменения M . Таким образом, видим, что вторая сумма, стоящая в первой части соотношения (10), после подстановки в $R_1(N, k)$ даст вклад

$$\ll \sum_{\delta \leq V} \frac{N}{\delta} (\ln N)^{4-B/2} \ll N \ln^{-A} N,$$

где A – любая положительная постоянная. Оценим вклад в $R_1(N, k)$ первой суммы. Применив решето Сельберга (см. теорему 8.3 [13]), получим

$$\left| \left\{ m : m < \frac{N}{\delta d}, \frac{N}{\delta} - dm \equiv 0 \pmod{n_1}, \left(\frac{1}{n_1} \left(\frac{N}{\delta} - md \right), P(z) \right) = 1 \right\} \right| \ll \frac{N}{d n_1} \prod_{\substack{p < z \\ p \nmid 2d}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \sum_{\substack{r \leq \xi^2 \\ (r, 2d)=1}} 3^{\omega(r)} |R_{r n_1}|,$$

где

$$R_{r n_1} = \left| \left\{ m : m < \frac{N}{\delta d}, dm \equiv \frac{N}{\delta} \pmod{r n_1} \right\} \right| - \frac{N}{d n_1 r}.$$

Возьмем $n_1 \xi^2 = N^{1/2-2\varepsilon}$. Получим, что правая часть предыдущего соотношения

$$\ll \frac{N}{\delta n_1 \varphi(d) \ln z} + \frac{1}{n_1} N^{1/2-\varepsilon}.$$

То есть, возвращаясь к (8), находим

$$\begin{aligned} R_1(N, k) &\ll \frac{N}{\ln N} \sum_{\delta|N} \frac{1}{\delta} \sum_{d\delta \geq Q}^{\leq \sqrt{N}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n_1 \leq N/\delta \\ k-T \leq \Omega(n_1\delta) \leq k}} \frac{1}{n_1} + N \ln^{-A} N \\ &\ll \frac{N \ln_2^5 N}{\ln N} \sum_{\delta|N} \sum_{\substack{\delta n_1 \leq N \\ k-T \leq \Omega(n_1\delta) \leq k}} \frac{1}{\delta n_1}. \end{aligned}$$

Последняя сумма равна

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{m \geq k-T}^{\leq k} 2^{-m} \sum_{\delta|N} \sum_{\substack{\delta n_1 \leq N \\ \Omega(\delta n_1)=m}} \frac{2^{\Omega(\delta n_1)}}{\delta n_1} \\ &\ll 2^{-k} \exp\left(\frac{\ln 2 \ln_2 N}{\sqrt[3]{\ln_3 N}}\right) \ln_2 N \sum_{\delta|N} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} \sum_{(n_1, 2)=1} \frac{2^{\Omega(n_1)}}{n_1}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что все простые делители n_1 будут $\leq z$, и используя соотношение (5) леммы 4, получим, что эта сумма равна

$$O(2^{-k} \ln^2 z \ln^\varepsilon N) = O(2^{-k} \ln^{2+\varepsilon} N),$$

и поэтому

$$R_1(N, k) \ll 2^{-k} N \ln^{1+\varepsilon} N.$$

Таким образом, мы доказали

$$S(N, k) = 2S_1(N, k) + O(R_2(N, k)), \quad (11)$$

где

$$R_2(N, k) = \frac{N}{\ln^{1-\varepsilon_1} N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!},$$

если $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$,

$$R_2(N, k) = N 2^{-k} \ln^{1+\varepsilon_1} N,$$

если $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$. Представим $S_1(N, k)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} S_1(N, k) &= \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{n < N/\delta \\ \Omega(n\delta)=k}} \sum_{\substack{\delta d \leq Q \\ (d, nN/\delta)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\quad + \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{d\delta \leq Q \\ (d, N/\delta)=1}} \left(\mu\left(\frac{N}{\delta}, \frac{N}{\delta}, d, k - \Omega(\delta)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varphi(d)} \left| \left\{ n < \frac{N}{\delta}, (n, d) = 1, \Omega(n\delta) = k \right\} \right| \right) + O(N^{1-\varepsilon_1}). \end{aligned}$$

Вторая сумма в силу леммы 1 равна $O(N \ln^{-A} N)$. К сумме по d в первой сумме применим лемму 3. В результате получим

$$\begin{aligned} S_1(N, k) &= \frac{1}{2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \ln N \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{\delta n < N \\ \Omega(\delta n)=k}} \\ &\times \prod_{p|Nn/\delta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)^{-1} \\ &+ O\left(\ln_2^4 N \sum_{\delta|N} (1 + \ln \delta) \sum_{\substack{n < N/\delta \\ \Omega(n\delta)=k}} \sum_{m|Nn/\delta} \frac{1 + \ln m}{m}\right). \end{aligned}$$

Обозначим второе слагаемое в правой части через $R_3(N, k)$. Используя оценку (6) леммы 3, получим

$$R_3(N, k) \ll \ln_2^6 N \sum_{\delta|N} (1 + \ln \delta) N \left(\frac{N}{\delta}, k - \Omega(\delta)\right).$$

Пусть $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$. Тогда, воспользовавшись (3), находим

$$R_3(N, k) \ll \frac{N \ln_2^6 N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{\delta|N} \frac{(2 - \varepsilon)^{\Omega(\delta)}}{\delta} (1 + \ln \delta).$$

Отсюда из соотношения (6) леммы 3 следует, что $R_3(N, k) \ll R_2(N, k)$. Пусть $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$. Тогда

$$R_3(N, k) \ll 2^{-k} \ln_2^6 N \sum_{\delta|N} 2^{\Omega(\delta)} (1 + \ln \delta) \sum_{\substack{n < N/\delta \\ \Omega(n\delta) \leq b \ln_2 N}} 2^{\Omega(n)}.$$

Внутренняя сумма в силу леммы 5 будет равна $O((N \ln N/\delta) \ln_2 N)$. И поэтому, снова получим, что $R_3(N, k) \ll R_2(N, k)$. Таким образом, имеем

$$S_1(N, k) = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) S_2(N, k) \ln N + O(R_2(N, k)),$$

где

$$S_2(N, k) = \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{\delta n < N \\ \Omega(\delta n)=k}} \prod_{p|Nn/\delta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)^{-1}.$$

Представим произведение в следующем виде

$$\prod_{p|N} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} g_N(\delta) \sum_{d|n} \mu(d) f_\delta(d),$$

где $f_\delta(d)$, $g_N(\delta)$ — мультипликативные функции, $f_\delta(p) = 0$, если $p \mid N/\delta$ и $f_\delta(p) = p/(p^2 - p + 1)$ в противном случае,

$$g_N(\delta) = \prod_{\substack{p \mid \delta \\ p \nmid N/\delta}} \frac{p^2 - p + 1}{(p - 1)^2}.$$

Тогда, подставив в $S_2(N, k)$ и изменив порядок суммирования, имеем

$$S_1(N, k) = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) \prod_{p \mid N} \frac{p-1}{p^2 - p + 1} \ln N S_3(N, k) + O(R_2(N, k)), \quad (12)$$

где

$$S_3(N, k) = \sum_{\substack{\delta \mid N \\ \delta \leq V}} g_N(\delta) \sum_{\substack{\delta m \leq N \\ \Omega(\delta m) \leq k}} \mu(m) f_\delta(m) N \left(\frac{N}{\delta m}, k - \Omega(\delta m) \right).$$

Заметим, что $f_\delta(d) \leq 1/(\varphi(d))$, поэтому мы можем считать, что суммирование ведется по $m \leq \ln^{A+1} N$. Затем, воспользовавшись асимптотикой (3) или (4), снова сделаем суммирование по всем d . Возникающие при этом остатки будут равны $O(N \ln^{-A} N)$.

Рассмотрим сначала случай $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$. Функция $F(z)$ из соотношения (3) такова, что при $0 \leq z \leq 2 - \varepsilon$, $0 \leq z + \theta \leq 2 - \varepsilon$ имеем (см. соотношение (14) [9])

$$F(z + \theta) = F(z)(1 + O(\theta)).$$

Поэтому, воспользовавшись (3), получим

$$N \left(\frac{N}{\delta d}, k - \Omega(\delta d) \right) = \frac{N}{\delta d \ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} F \left(\frac{k}{\ln_2 N} \right) \times \frac{(k-1) \cdots (k - \Omega(\delta d) - 1)}{(\ln_2 N)^{\Omega(\delta d)}} \left(1 + O \left(\frac{1 + \Omega(\delta d)}{\ln_2 N} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{\ln \delta d}{\ln N} \right) \right). \quad (13)$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{(k-1) \cdots (k - \Omega(\delta d) - 1)}{(\ln_2 N)^{\Omega(\delta d)}} = \left(\frac{k}{\ln_2 N} \right)^{\Omega(\delta d)} \left(1 + O \left(\frac{\Omega^2(\delta d)}{k} \right) \right).$$

Подставим полученный результат в $S_3(N, k)$ и выпишем сначала главный член. Он равен

$$\begin{aligned} \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} F\left(\frac{k}{\ln_2 N}\right) \sum_{\delta|N} \frac{g_N(\delta)}{\delta} \sum_d \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(d\delta)} \frac{\mu(d) f_\delta(d)}{d} \\ = \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} F\left(\frac{k}{\ln_2 N}\right) S_4(N, k). \end{aligned}$$

Здесь отброшено условие $\Omega(d\delta) \leq k$. За счет этого возникает остаток, равный

$$\ll \sum_{\delta|N} \frac{g_N(\delta)}{\delta} \sum_d \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(d\delta)} \frac{\Omega(d\delta)}{k} \frac{1}{d\varphi(d)}.$$

Далее будет оценена сумма с $\Omega^2(d\delta)/k$ вместо $\Omega(d\delta)/k$. Запишем сумму по d в виде произведения. Тогда получим

$$S_4(N, k) = \sum_{\delta|N} \frac{g_N(\delta)}{\delta} \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(\delta)} \prod_{p \nmid N/\delta} \left(1 - \frac{1}{p^2 - p + 1} \frac{k}{\ln_2 N}\right).$$

Записав полученную сумму в виде произведения и вспомнив определение $g_N(\delta)$, находим

$$\begin{aligned} S_4(N, k) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2 - p + 1} \frac{k}{\ln_2 N}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - p + 1} \frac{k}{\ln_2 N}\right)^{-1} \\ \times \prod_{p|N} \left(1 + \sum_{r < \alpha(N, p)} \frac{1}{p^r} \frac{k}{\ln_2 N} + \left(\frac{p^2 - p + 1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^2} \frac{k}{\ln_2 N}\right) \right. \\ \left. \times p^{-\alpha(N, p)} \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\alpha(N, p)}\right), \end{aligned}$$

где $\alpha(N, p)$ – показатель степени, с которой p входит в каноническое разложение N .

Используя обозначения теоремы, главный член $S_1(N, k)$ (см. (12)) будет равен

$$\begin{aligned} \Gamma(N, k) = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) N \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \\ \times \Phi\left(\frac{k}{\ln_2 N}\right) E(N) E\left(N, \frac{k}{\ln_2 N}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что

$$A_1 \leq E(N) E\left(N, \frac{k}{\ln_2 N}\right) \exp\left(-\sum_{p|N} \frac{1}{p} \left(\frac{k}{\ln_2 N} - 1\right)\right) \leq A_2, \quad (15)$$

где $A_2 > A_1 > 0$.

Оценим остатки, возникающие при подстановке (13) в $S_3(N, k)$. Рассмотрим самый сложный из них, который появляется за счет $\Omega^2(\delta d)/k$. Он будет

$$\ll N \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} E(N) \sum_{\delta|N} \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_d \frac{\Omega^2(d\delta)}{d\varphi(d)} \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(d\delta)} \frac{1}{k}.$$

Если $(\ln_3 N)k \leq \ln_2 N$, то

$$\frac{\Omega^2(\delta m)}{k} \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(\delta m)} \leq \frac{\Omega^2(\delta m)}{\ln_2 N} \left(\frac{1}{\ln_3 N}\right)^{\Omega(\delta m)-1},$$

а при $\ln_2 N (\ln_3 N)^{-1} \leq k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$ справедливо неравенство

$$\frac{\Omega^2(\delta m)}{k} \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(\delta m)} \leq \frac{\Omega^2(\delta m)}{\ln_2 N} \ln_3 N \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\Omega(\delta m)}.$$

Следовательно, оцениваемая сумма будет

$$\ll N \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} E(N) \sum_{\delta|N} \frac{1 + \Omega^2(\delta)}{\varphi(\delta)} z_k^{\Omega(\delta)} \frac{\ln_3 N}{\ln_2 N},$$

где $z_k = 1/\ln_3 N$ при $k \leq \ln_2 N / \ln_3 N$ и $z_k = k/\ln_2 N$ в противном случае. Заметим, что эта сумма будет больше и тех, которые возникнут за счет $O(\Omega(\delta m)/\ln_2 N)$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{\delta|N} \frac{1 + \Omega^2(\delta)}{\varphi(\delta)} z_k^{\Omega(\delta)} &\ll \left(\sum_{p|N} \frac{z_k}{p-1} + \left(\sum_{p|N} \frac{z_k}{p-1} \right)^2 + 1 \right) \exp\left(\sum_{p|N} \frac{z_k}{p-1} \right) \\ &\ll (\ln_3 N)^2 \exp\left(\sum_{p|N} \frac{1}{p} \frac{k}{\ln_2 N} \right) \end{aligned}$$

и (15) получаем, что оцениваемая сумма

$$\ll \Gamma(N, k) \frac{(\ln_3 N)^3}{\ln_2 N}.$$

Остаток, который получается за счет подстановки $O(\ln \delta d / \ln N)$, оценивается проще и будет меньше приведенного. Подставляя полученные результаты в (12), а затем в (11), находим

$$S(N, k) = 2\Gamma(N, k) \left(1 + O\left(\frac{(\ln_3 N)^3}{\ln_2 N} \right) \right),$$

т.е. утверждение теоремы при $k \leq (2 - \varepsilon) \ln_2 N$.

Предположим, что $(2 + \varepsilon) \ln_2 N \leq k \leq b \ln_2 N$. Представим δ в сумме $S_3(N, k)$ (см. (12)) в виде $\delta = 2^l \delta_1$, где $(\delta_1, 2) = 1$. Та часть суммы $S_3(N, k)$, в которой либо $m \geq \ln^{A+1} N$, либо $\Omega(\delta_1 m) \geq \varepsilon_1 \ln_2 N$ будет равна $O(N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N)$, где $\rho > 0$. Если $m \geq \ln^{A+1} N$, то это мы доказывали ранее. Для той части, где $\Omega(\delta_1 m) \geq \varepsilon_1 \ln_2 N$ имеем, что она

$$\begin{aligned} &\ll 2^{-k} \left(\frac{3 - \varepsilon}{2} \right)^{-\varepsilon_1 \ln_2 N} \sum_{2^l \delta_1 | N} 2^{\Omega(2^l \delta_1)} g_N(\delta_1) \left(\frac{3 - \varepsilon}{2} \right)^{\Omega(\delta_1)} \\ &\quad \times \sum_m \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)} (3 - \varepsilon)^{\Omega(m)} \sum_{\substack{n \leq N/(2^l \delta_1 m) \\ \Omega(2^l n) \leq k}} 2^{\Omega(n)}. \end{aligned}$$

Оценив внутреннюю сумму с помощью леммы 5, учитывая, что ряд по m сходится, получим, что она

$$\ll \frac{N \ln^{1-\rho} N}{2^k} \ln_2^2 N \sum_{\delta_1 | N} \frac{(2 - \varepsilon)^{\Omega(\delta_1)}}{\varphi(\delta_1)} \ll N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N \ln_2^6 N,$$

где $\rho = \varepsilon_1 \ln((3 - \varepsilon)/2) > 0$.

Рассмотрим ту часть суммы $S_3(N, k)$, в которой $\Omega(\delta m) \leq k - (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N$, т.е. $\Omega(n) \geq (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N$. Тогда, используя соотношение (4), получим, что эта часть суммы $S_3(N, k)$, которую обозначим $S_{3,1}(N, k)$, равна

$$\begin{aligned} S_{3,1}(N, k) &= C N 2^{-k} \ln N \sum_{\delta | N} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} g_N(\delta) \\ &\quad \times \sum_{\substack{m \\ \Omega(\delta m) \leq k - (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N}} f_\delta(m) \mu(m) \frac{2^{\Omega(m)}}{m} + O(N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N), \end{aligned}$$

где $0 < \rho < 1$. Возникающий после подстановки (4) остаток, будет (см. лемму 4)

$$\ll N 2^{-k} \ln^\beta N \sum_{\substack{\delta | N \\ \Omega(\delta) \leq k}} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} (1 + \ln \delta) \ll N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N.$$

Обозначим через $S_{3,2}(N, k)$ ту часть суммы $S_3(N, k)$, в которой $\Omega(\delta m) \geq k - (2 - \varepsilon_2) \ln_2 N$, т.е. $\Omega(n) \leq (2 - \varepsilon_2) \ln_2 N$. Подставив (3), мы получим

$$S_{4,2}(N, k) \ll \frac{N}{\ln N} \sum_{\delta|N} \frac{g_N(\delta)}{\delta} \times \sum_{\substack{m \\ -(2-\varepsilon_2) \ln_2 N \leq \Omega(\delta m) - k \leq 0}} \frac{1}{m\varphi(m)} \frac{(\ln_2 N)^{k - \Omega(\delta) - 1}}{(k - \Omega(\delta) - 1)!}.$$

Положим $r = k - \Omega(\delta m) - 1 = \theta \ln_2 N \leq (2 - \varepsilon_2) \ln_2 N$. Из формулы Стирлинга следует, что

$$2^r \frac{(\ln_2 N)^r}{r!} \ln^{-2} N \ll \exp((\theta \ln 2 - 2 - \theta \ln \theta + \theta) \ln_2 N) \ll \exp\left(\left(-\varepsilon_2 - (2 - \varepsilon_2) \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right) \ln_2 N\right) \ll (\ln_2 N)^{-(\varepsilon_2/2)^2}.$$

Поэтому

$$S_{3,2}(N, k) \ll N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N \sum_{\delta|N} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} g_N(\delta) \sum_m \frac{2^{\Omega(m)}}{m\varphi(m)} \ll N 2^{-k} \ln^{1-\rho_1} N,$$

где $0 < \rho_1 < \rho < 1$.

Рассмотрим ту часть суммы $S_3(N, k)$, в которой $k - (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N \leq \Omega(\delta m) \leq k - (2 - \varepsilon_2) \ln_2 N$. Обозначим ее $S_{3,3}(N, k)$. Для оценки последней суммы воспользуемся результатами работы [12]. Имеем

$$N(x, k) = \sum_l \left| \left\{ n : (n, 2) = 1, n 2^{-(k-l)} \leq \frac{x}{2^k}, \Omega(n) = k - l \right\} \right| \leq \left| \left\{ n : (n, 2) = 1, n 2^{-\Omega(n)} \leq \frac{x}{2^k} \right\} \right|.$$

Из леммы 5 [12] следует, что

$$\left| \left\{ n : (n, 2) = 1, n 2^{-\Omega(n)} \leq x 2^{-k} \right\} \right| \ll x 2^{-k} \ln 3x,$$

поэтому

$$N(x, k) \ll x 2^{-k} \ln 3x.$$

Следовательно, получим

$$S_{3,3}(N, k) \ll \sum_{\delta|N} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} g_N(\delta) \sum_{\substack{m \\ \Omega(\delta m) \geq k - (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N}} \frac{\mu^2(m)}{m\varphi(m)} 2^{\Omega(m)} N 2^{-k} \ln N.$$

Представив δ в виде $\delta = 2^l \delta_1$, $(\delta_1, 2) = 1$, имеем

$$S_{3,3}(N, k) \ll \varepsilon_2 N 2^{-k} \ln N \ln_2 N \sum_{\delta_1 | N} \frac{2^{\Omega(\delta_1)}}{\delta_1} g_N(\delta_1). \quad (16)$$

Перейдем к нахождению асимптотики $S_3(N, k)$. Обозначим через $\alpha(N, 2)$ показатель степени, с которой 2 входит в каноническое разложение N . Предположим, что $\alpha(N, 2) \leq k - (2 + \varepsilon_3) \ln_2 N$, где $\varepsilon_3 > 0$. Взяв $2\varepsilon_2 < \varepsilon_3$, мы видим, что в суммах $S_{3,2}(N, k)$ и $S_{3,3}(N, k)$ выполняется неравенство $\Omega(\delta_1 m) \geq (\varepsilon_3/2) \ln_2 N$, и поэтому они, как мы доказали ранее, равны $O(N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N)$. Таким образом, в этом случае

$$S_3(N, k) = S_{3,1}(N, k) + O(N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N).$$

Если в сумме $S_{3,1}(N, k)$ запишем δ в виде $\delta = 2^l \delta_1$, $(\delta_1, 2) = 1$, то $l \leq \alpha(N, 2) \leq k - (2 + \varepsilon_3) \ln_2 N$ и $\Omega(2^l \delta_1 m) \leq k - (2 + \varepsilon_2) \ln_2 N$. Учитывая оценку для части суммы с $\Omega(\delta_1 m) > \varepsilon_1 \ln_2 N$, находим

$$\begin{aligned} S_3(N, k) &= C N 2^{-k} \ln N \sum_{\substack{\delta_1 | N \\ 0 \leq l \leq \alpha(N, 2)}} \frac{2^{\Omega(\delta_1)}}{\delta_1} g_N(2^l \delta_1) \\ &\quad \times \prod_{p \nmid N / \delta_1 2^l} \left(1 - \frac{2}{p^2 - p + 1} \right) + O(N \ln^{1-\rho} N) \\ &= C \prod_p \left(\frac{p^2 - p - 1}{p^2 - p + 1} \right) \prod_{p | N} \frac{p^2 - p + 1}{p^2 - p - 1} (1 + \alpha(N, 2)) N 2^{-k} \ln N \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta | N \\ (\delta, 2) = 1}} \frac{2^{\Omega(\delta)}}{\delta} \prod_{\substack{p | \delta \\ p \nmid N / \delta}} \frac{p^2 - p - 1}{(p - 1)^2} + O(N 2^{-k} \ln^{1-\rho} N). \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя полученный результат в (12), а затем в (11), используя обозначения теоремы 2, имеем

$$S(N, k) = DD(N) N 2^{-k} (\alpha(N, 2) + 1) \ln^2 N + O(N 2^{-k} \ln^{2-\rho} N), \quad (17)$$

где $0 < \rho < 1$.

Предположим, что при $\varepsilon_3 > 0$ будет справедливо неравенство $\alpha(N, 2) \geq k - (2 + \varepsilon_3) \ln_2 N$. Возьмем $\varepsilon_2 = \varepsilon_3/2$ и в сумму $S_{3,1}(N, k)$ отнесем только те слагаемые, соответствующие $\delta = 2^l \delta_1$, у которых $l \leq k - (2 + \varepsilon_3) \ln_2 N$. Тогда, учитывая оценки для $S_{3,2}(N, k)$ и $S_{3,3}(N, k)$, подставляя результат в (12) и затем в (11), получим

$$\begin{aligned} S(N, k) &= DD(N) N 2^{-k} (k - (2 + \varepsilon_3) \ln_2 N) \ln^2 N \\ &+ O\left(\varepsilon_3 \ln_2 N N 2^{-k} \ln^2 N \prod_{p | N} \frac{(p - 1)^2}{p^2 - p + 1} \sum_{\delta_1 | N} \frac{2^{\Omega(\delta_1)}}{\delta_1} g_N(\delta_1) + N \ln^{2-\rho} N \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\prod_{p|N} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} \sum_{\delta_1|N} \frac{2^{\Omega(\delta_1)}}{\delta_1} g_N(\delta_1) \ll D(N),$$

то при $\alpha(N) = \min(\alpha(N, 2) + 1, k - 2 \ln_2 N)$ имеем

$$S(N, k) = DD(N)N2^{-k}\alpha(N) \ln^2 N + O(\varepsilon_3 D(N)N2^{-k} \ln_2 N \ln^2 N).$$

Отсюда из (17) следует, что в любом случае справедливо последнее утверждение с любым $\varepsilon_3 > 0$, что доказывает заключительную часть теоремы.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило
05.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Titchmarsh E. C. A divisor problem // *Rediconti Palermo*. 1930. V. 54. P. 414–429.
- [2] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: ЛГУ, 1961.
- [3] Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. I // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1963. Т. 27. № 2. С. 439–462.
- [4] Bobieri E., Friedlander I. B., Iwaniec H. Primes in arithmetic progressions to large moduli // *Acta Math.* 1986. V. 156. P. 203–251.
- [5] Барбан М. Б. Об аналогах проблемы делителей Титчмарша // *Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон.* 1963. Т. 19. С. 5–13.
- [6] Каршиев А. К. Обобщение проблемы делителей Титчмарша // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук.* 1969. Т. 13. № 1. С. 69–70.
- [7] Пияндина Ж. В. Аддитивные задачи с почти простыми числами // *Тезисы докладов Всесоюзной школы “Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел”*. Минск, 1989.
- [8] Fujii A. On some analogues of Titchmarsh divisor problem // *Nagoya Math. J.* 1976. V. 64. P. 149–158.
- [9] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // *Матем. заметки*. 1994. Т. 55. № 2. С. 144–156.
- [10] Sathe L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors // *J. Indian Math. Soc.* 1953. V. 17. P. 63–141.
- [11] Selberg A. Note on a paper by L. G. Sathe // *J. Indian Math. Soc.* 1954. V. 18. P. 83–87.
- [12] Nicolas J.-L. Sur la distribution des nombres ehtiers ayant une quantie fixe de facteurs premiers // *Acta Arith.* 1984. V. XLIV. P. 191–200.
- [13] Halberstam H., Richert H.-E. *Sieve Methods*. London, New York: Academic Press, 1974.
- [14] Виноградов И. М. *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*. М.: Наука, 1971.
- [15] Прахар К. *Распределение простых чисел*. М.: Мир, 1967.